Schriftliche Abiturprüfung – Grundkurs – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2017, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung. Für die Bewertung ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier CASIO ClassPad II (FX-CP400)) eingesetzt.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: L. Wendrock (wendrock@googlemail.com) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 11.01.18.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Hinweise für den Teilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 30 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten. Es sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	58	55	52	49	46	43	40	37	34	31	28	25	21	17	13	0

Prüfungsinhalt

Aufgabe A

Tragen Sie die Antworten zur Aufgabe 1 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 2 bis 4 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Welche der angegebenen Gleichungen beschreibt die erste Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}\cdot x^3-\sin(3\cdot x+2)$ ($x\in D_f$)

☐ $f'(x)=x^2-3\cdot\cos(3\cdot x+2)$ ($x\in D_{f'}$)

☐ $f'(x)=x^2+3\cdot\cos(3\cdot x+2)$ ($x\in D_{f'}$)

☐ $f'(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}\cdot\cos(3\cdot x+2)$ ($x\in D_{f'}$)

☐ $f'(x)=x^4+\frac{1}{3}\cdot\sin(2\cdot x)$ ($x\in D_{f'}$)

☐ $f'(x)=\frac{1}{4}\cdot x^4+3\cdot\cos(3\cdot x+2)$ ($x\in D_{f'}$)

1.2 Der Graph der Funktion f mit $f(x)=\frac{4}{x^2-9}$ ($x \in D_f$) besitzt

▢ zwei waagerechte Asymptoten mit den Gleichungen $y=-3$ bzw. $y=3$ und keine senkrechte Asymptote.

▢ eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y=0$ als einzige Asymptote.

▢ keine waagerechte Asymptote und eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x=0$.

▢ eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y=0$ und zwei senkrechte Asymptoten mit den Gleichungen $x=-3$ bzw. $x=3$.

▢ keine waagerechte Asymptote und keine senkrechte Asymptote.

1.3 Für welchen Wert von a ($a \in \mathbb{R}$) verläuft der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$ senkrecht zur Ebene

E mit E: $4 \cdot x + 2 \cdot y - 2 \cdot z = 3$?

▢	▢	▢	▢	▢
$a=-5$	$a=-3$	$a=1$	$a=3$	$a=5$

1.4 Gegeben sind die Gerade g und der Punkt P_k mit g: $\vec{x}=\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}+t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$)

bzw. $P_k(6|k|-4)$ ($k \in \mathbb{R}$).

Für welchen Wert von k liegt der Punkt P_k auf der Geraden g?

▢	▢	▢	▢	▢
$k=-9$	$k=-3$	$k=0$	$k=3$	$k=5$

1.5 Ein idealer Würfel wird zweimal jeweils zufällig geworfen und die Summe der beiden geworfenen Augenzahlen gebildet.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Die Augensumme ist größer als 8.“ beträgt:

▢	▢	▢	▢	▢
$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$

Für Aufgabe 1 erreichbare BE-Anzahl: 05

2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=(x-1) \cdot e^x$ ($x \in \mathbb{R}$).

2.1 Zeigen Sie, dass die Funktion f'' mit $f''(x)=(x+1) \cdot e^x$ ($x \in \mathbb{R}$) die zweite Ableitungsfunktion der Funktion f ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

2.2 Der Graph der Funktion f besitzt genau einen Wendepunkt.

Geben Sie die Koordinaten dieses Wendepunktes an.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

3 Die Geraden g und h mit g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ ($t\in\mathbb{R}$) bzw h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ ($r\in\mathbb{R}$) schneiden sich im Punkt S.

3.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

3.2 Zeigen Sie, dass sich die Geraden g und h nicht senkrecht schneiden.

Erreichbare BE-Anzahl: 01

4 Bei einer Lotterie werden Lose angeboten. Jedes Los ist mit einer Wahrscheinlichkeit von einem Drittel ein Gewinnlos.
Ein Spieler zieht bei dieser Lotterie vier Lose zufällig.

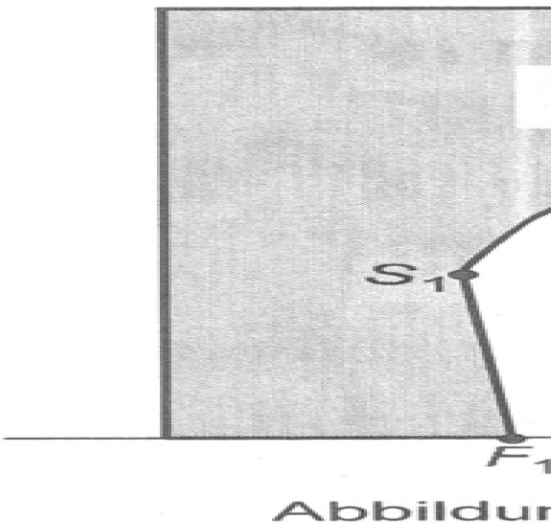
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter diesen vier gezogenen Losen mindestens ein Gewinnlos befindet.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

Aufgabe B 1

Im Jahr 1882 wurde im Odenwald der Krähbergtunnel eröffnet.

Die Frontfläche des Tunnelportals des Krähbergtunnels mit der Portalöffnung kann in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) dargestellt werden (siehe Abbildung 1).



Die unteren Begrenzungslinien der Frontfläche des Tunnelportals liegen auf der x-Achse, die obere Begrenzungslinie parallel dazu.

Die seitlichen Begrenzungslinien der Frontfläche des Tunnelportals verlaufen parallel zur y-Achse.

Die Frontfläche des Tunnelportals ist 6,24 Meter hoch und 6,48 Meter breit.

Die obere Begrenzungslinie der Portalöffnung kann durch den Graphen der Funktion f mit $f(x)=-0.1128\cdot x^4-0.0789\cdot x^2+3.8400$ ($x\in\mathbb{R};-1.80\leq x\leq 1.80$) beschrieben werden.

Die rechte Begrenzungslinie der Portalöffnung liegt auf dem Graphen der Funktion g mit $g(x)=10.0\cdot x-15.6$ ($x\in\mathbb{R};1,56\leq x\leq 1,80$).

In den Punkten S_1 und S_2 gehen die linke bzw. die rechte Begrenzungslinie der Portalöffnung in die obere Begrenzungslinie der Portalöffnung über.

In den Punkten F_1 und F_2 gehen die linke bzw. die rechte Begrenzungslinie der Portalöffnung in die jeweilige untere Begrenzungslinie der Frontfläche des Tunnelportals über.

Die Frontfläche des Tunnelportals ist achsensymmetrisch.

1.1. Ermitteln Sie die Länge der Strecke $\overline{F_1F_2}$.

Zeigen Sie, dass der Punkt $S_2(1.80|2.40)$ auf den Graphen der Funktionen f und g liegt.

Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, auf der die Punkte F_1 und S_1 liegen.

Erreichbare BE-Anzahl: 05

1.2. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die obere Begrenzungslinie der Portalöffnung in die rechte Begrenzungslinie der Portalöffnung übergeht.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

1.3. Der Krähbergtunnel ist 3100 Meter lang und verläuft geradlinig sowie senkrecht zur Portalöffnung. Die Deckenfläche und die Seitenflächen im Inneren des Tunnels sollen saniert werden.

Die Deckenfläche schließt sich an die obere Begrenzungslinie der Portalöffnung an. Die Seitenflächen schließen sich an die rechte und linke Begrenzungslinie der Portalöffnung an.

An jeder Stelle des Tunnels ist die Querschnittsfläche des Tunnels kongruent zur Fläche der Portalöffnung.

Die Länge der oberen Begrenzungslinie der Portalöffnung zwischen den Punkten S_1 und S_2 beträgt 5.09 Meter.

Bestimmen Sie den Inhalt der zu sanierenden Fläche im Inneren des Krähbergtunnels. Erreichbare BE-Anzahl: 03

1.4. Die Frontfläche des Tunnelportals soll ebenfalls saniert werden.

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Frontfläche des Tunnelportals.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

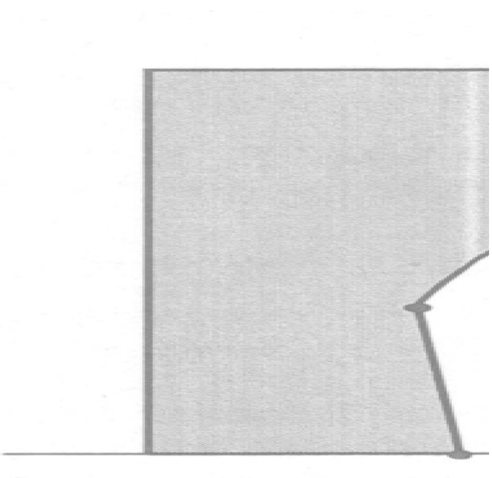
1.5. Für den Krähbergtunnel wird der Verkehrsraum analysiert.
Der Verkehrsraum ist der maximal mögliche Flächeninhalt eines Rechtecks, welches wie folgt in die Portalöffnung einbeschrieben werden kann (siehe Abbildung 2):

(1) Eine Seite des Rechtecks liegt auf der x-Achse.

(2) Zwei Eckpunkte des Rechtecks liegen auf der oberen Begrenzungslinie der Portalöffnung.

Ermitteln Sie den Verkehrsraum.

Erreichbare BE-Anzahl: 03



Abbildu

Für die Sanierung des Tunnelportals werden von einer Firma Sandsteinplatten geliefert. Erfahrungsgemäß ist eine gelieferte Sandsteinplatte zu 95 % für die Sanierung geeignet.

1.6. Die Firma liefert zunächst 130 Sandsteinplatten für die Sanierung des Tunnelportals.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

Ereignis A: Es sind mindestens 96 Sandsteinplatten, jedoch höchstens 120 Sandsteinplatten für die Sanierung geeignet.

Ereignis B: Es sind mehr Sandsteinplatten für die Sanierung geeignet als zu erwarten ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

1.7. Für die Sanierung des Tunnelportals werden 125 Sandsteinplatten benötigt.

Ermitteln Sie die Anzahl der zu liefernden Sandsteinplatten, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% die Anzahl der gelieferten Sandsteinplatten für die Sanierung ausreicht.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

Aufgabe B 2

Eine Kletterhalle kann in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) dargestellt werden (siehe Abbildung).

Der ebene Hallenboden der Kletterhalle befindet sich in der x-y-Koordinatenebene. Die beiden zum Hallenboden senkrechten Kletterwände befinden sich in der x-z- bzw. in der y-z- Koordinatenebene. Zwischen diesen beiden Kletterwänden befindet sich eine schräge Kletterwand, ein sogenannter Überhang.
Dieser dreieckige Überhang befindet sich in der Ebene E mit E: $3\cdot x+3\cdot y-4\cdot z=-16$.
Ein Eckpunkt des Überhangs liegt auf der z-Achse. Die beiden anderen Eckpunkte des Überhangs befinden sich auf den senkrechten Kletterwänden 10,0 m über dem Hallenboden.

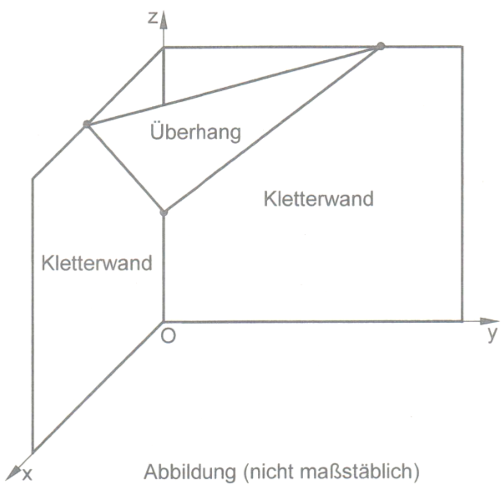


Abbildung (nicht maßstäblich)

2.

2.1. Ein Eckpunkt des Überhangs besitzt die geringste Höhe über dem Hallenboden.
Weisen Sie nach, dass diese geringste Höhe 4,0 m beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

2.2. Bestimmen Sie den Neigungswinkel des Überhangs gegenüber dem Hallenboden.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

2.3. Vom Punkt $P(0{,}0|0{,}0|10{,}0)$ verläuft ein geradliniges Spannseil senkrecht zum Überhang.
Dieses Spannseil ist im Punkt Q des Überhangs befestigt.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Q.
Geben Sie die Länge des Spannseils zwischen den Punkten P und Q an.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

2.4. Der dreieckige Überhang soll ausgetauscht werden. Die Materialkosten betragen 50,00€ pro Quadratmeter ohne Mehrwertsteuer. Die Mehrwertsteuer beträgt 19 %.

Ermitteln Sie die Materialkosten einschließlich Mehrwertsteuer für den Austausch des dreieckigen Überhangs.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

2.5. Es gibt Kletterrouten, die entlang der beiden zum Hallenboden senkrechten Kletterwände vom Punkt $A(4{,}0|0{,}0|0{,}0)$ über einen Punkt B auf der z-Achse zum Punkt $C(0{,}0|6{,}0|6{,}0)$ verlaufen. Unter diesen Kletterrouten gibt es eine kürzeste Route.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B für diese kürzeste Route.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

In der Kletterhalle können Kletterrouten der Kategorie I und Kletterrouten der Kategorie II gewählt werden.
Erfahrungsgemäß sind von allen gewählten Kletterrouten 68 % Kletterrouten der Kategorie I. Von diesen werden 54 % ohne Absturz bewältigt.
Insgesamt werden 62 % aller gewählten Kletterrouten ohne Absturz bewältigt.

2.6. Ermitteln Sie die Anzahl der zu erwartenden Abstürze bei 100 gewählten Kletterrouten.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

2.7. Eine Kletterroute der Kategorie I wurde gewählt.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass dabei ein Absturz erfolgt.

Eine Kletterroute der Kategorie II wurde gewählt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei kein Absturz erfolgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

Lösungsvorschläge

Teil A

1. Je eine BE für das richtige Feld: Feld 1, Feld 4, Feld 3, Feld 1, Feld 2
2.

2.1. $\left((x-1)\cdot e^x\right)'=(x-1)e^x+e^x=x\cdot e^x$

$\left(x\cdot e^x\right)'=x\cdot e^x+e^x=(x+1)\cdot e^x$

2.2. $0=(x+1)\cdot e^x$, $x_w=-1$ $\qquad f(-1)=(-1-1)\cdot e^{-1}=-2\cdot e^{-1}=\frac{-2}{e}$ $\qquad P_w(-1|\frac{-2}{e})$

3.

3.1. $\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ ergibt t=1 und r=-1 und damit $S(2|2|2)$

3.2. Skalarprodukt der Richtungsvektoren:

$1\cdot(-1)+3\cdot 3+(-2)\cdot 2=-1+9-4=4\neq 0$

4. $1-P(kein)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^4=1-\frac{16}{81}=\frac{65}{81}$

Teil B1

1.

1.1. Nullstelle der Funktion g: $0=10x-15{,}6$, $x=1{,}56$

Länge der Strecke: $2\cdot 1{,}56=3{,}12$

Punkt in f einsetzen: $-0.1128\cdot 1{,}8^4-0.0789\cdot 1{,}8^2+3{,}8400=2{,}4$
$2{,}40023472\approx 2{,}4$

Punkt in g einsetzen: $10\cdot 1{,}8-15{,}6=2{,}4$

Gleichung: $g(x)=-10x-15{,}6$

1.2. $\tan\alpha=10$, $\alpha\approx 84{,}2894°$ $\qquad f'(1{,}8)\approx -2{,}9154$, $\tan\beta=-2{,}9154$, $\beta\approx -71{,}06795°$ $\qquad \alpha-\beta=155{,}357°$

1.3. Decke: $5{,}09\cdot 3100=15779$

Wände: $2\cdot|\overline{F_1S_2}|=2\cdot\sqrt{(1{,}56-1{,}8)^2+(0-2{,}4)^2}\approx 4{,}8239$

Fläche der Wände: $4{,}8239\cdot 3100=14954{,}09$

zusammen $30733{,}09\,m^2$

1.4. Rechteck: $A_R = 6{,}24 \cdot 6{,}48 = 40{,}4352$

Fläche unter f: $\int_{-1{,}8}^{1{,}8} f(x)\,dx \approx 12{,}66466$

zwei Dreiecke: $\frac{2{,}4(1{,}8-1{,}56)}{2} = 0{,}288$

Frontfläche: $40{,}4352 - 12{,}66466 + 2 \cdot 0{,}288 = 28{,}3465\,[m^2]$

1.5. Extremwertaufgabe:

Zielfunktion: $A = a \cdot b$

Nebenbedingungen: $\begin{array}{c} a = 2 \cdot x \\ b = f(x) \end{array}$

mod ZF: $A = 2x \cdot f(x)$

Maximum mit dem Taschenrechner: $Max(1{,}5517 | 9{,}2980)$

Verkehrsraum: $9{,}2980\,m^2$

1.6. $P(96 \le X \le 120) = binomialCDF(120, 130, 0.95) - binomialCDF(95, 130, 0.95) \approx 0{,}117078$

$E(X) = n \cdot p = 130 \cdot 0{,}95 = 123{,}5$

$P(X \ge 124) = 1 - binomialCDF(123, 130, 0.95) \approx 0{,}5245$

1.7. Binomialverteilung mit gesuchtem n, gegebenen $p = 0.95$ und $k = 125$

$$\begin{array}{r} P(125 \le X) \ge 0.99 \\ 1 - binomialCDF(124, n, 0.95) \ge 0.99 \end{array}$$

durch sinnvolles Probieren erhält man n=138

Alternativer Weg (Martin Günther)

Funktion $y_1 = 1 - binomialCDF(124, x, 0.95)$ im Taschenrechner („Grafik und Tabelle“) definieren und über eine Wertetabelle (Step=1) die Werte anzeigen lassen

Teil B2

2.

2.1. x und y in der Ebenengleichung Null setzen: $\begin{array}{r} -4z = -16 \\ z = 4 \end{array}$

2.2. Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen Normalenvektor und Normalenvektor der x-y-Ebene:

$angle\left(\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\approx 133{,}31°$ also $180°-133{,}31=46{,}6861°$

2.3. senkrechte Gerade durch den Punkt P: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix}$

mit dem Programm „pge“ den Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene ermitteln ==> $Q\left(\frac{36}{17}\middle|\frac{36}{17}\middle|\frac{122}{17}\right)$

Länge: $\sqrt{\left(\frac{36}{17}\right)^2+\left(\frac{36}{17}\right)^2+\left(10-\frac{122}{17}\right)^2}\approx 4{,}11597[m]$

2.4. Drei Eckpunkte ermitteln:

$E_1(0|0|4)$

y=0 und z=10 setzen: $\begin{matrix}3x-4\cdot 10=-16\\ x=8\end{matrix}$ also $E_2(8|0|10)$

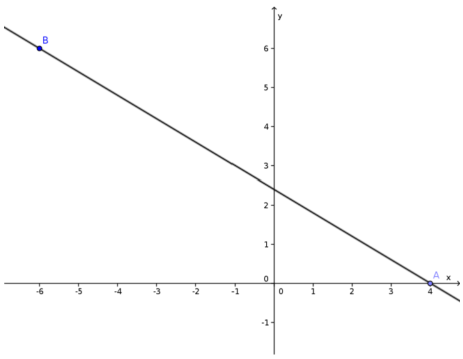
x=0 und z=10 setzen: $\begin{matrix}3y-4\cdot 10=-16\\ y=8\end{matrix}$ also $E_3(0|8|10)$

Fläche berechnen z.B. über ein Programm oder das Kreuzprodukt:

$\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}8\\0\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\8\\6\end{pmatrix}\right|\approx 46{,}6476[m^2]$

Kosten: $46{,}6476\cdot 50\cdot 1{,}19\approx 2775{,}53[€]$

2.5. Man kann sich die Wände in eine Ebene geklappt vorstellen und eine lineare Funktion ermitteln mit der y-Achse als ehemalige z-Achse:



$y=m\cdot x+n$ und setzt die beiden Punkte $A(4|0)$ und $B(-6|6)$ ein:

$\begin{matrix}0=4\cdot m+n\\ 6=-6\cdot m+n\end{matrix}$ Das LGS hat als Lösung $\begin{matrix}m=-0{,}6\\ n=2{,}4\end{matrix}$ also $B(0|0|2{,}4)$

Alternativer Weg (Martin Günther)

$B(0|0|z)$ Daraus ergibt sich $\vec{AB}=\begin{pmatrix}-4\\0\\z\end{pmatrix}$ und $\vec{BC}=\begin{pmatrix}0\\6\\6-z\end{pmatrix}$

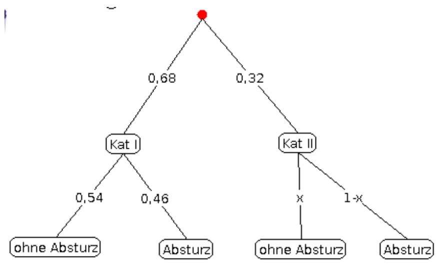
Die Zielfunktion ist dann $\sqrt{(-4)^2+0^2+z^2}+\sqrt{0^2+6^2+(6-z)^2}$

Das Minumum der Zielfunktion ergibt für z=2,4 die Länge von 11,66m

2.6. $100\cdot(1-0.62)=38$

2.7. Wahrscheinlichkeit für keinen Absturz bei Kat II: $0{,}62=0{,}68\cdot 0{,}54+0{,}32\cdot x$

$x=0{,}79$



$P_I(Absturz)=0{,}46$

$P_{II}(kein\ Absturz)=0{,}79$