Schriftliche Abiturprüfung – Grundkurs – Mathematik Nachtermin

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2014 (Nachtermin), wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier ClassPad330) eingesetzt.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: L. Wendrock (wendrock@googlemail.com) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 11.07.17.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Hinweise für den Teilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 30 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten. Es sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	58	55	52	49	46	43	40	37	34	31	28	25	21	17	13	0

Prüfungsinhalt

Aufgabe A

Tragen Sie die Antworten zur Aufgabe 1 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 2 bis 4 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Welcher der angegebenen Terme beschreibt die erste Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x)=4\cdot x-e^{2\cdot x}$ ($x\in\mathbb{R}$)

☐	☐	☐	☐	☐
$4-e^{2\cdot x}$	$4\cdot x-2\cdot e^{2\cdot x}$	$4-2\cdot e^{x}$	$4-2\cdot e^{2\cdot x}$	$4\cdot x-2\cdot x\cdot e^{2\cdot x}$

1.2 Der Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion g mit mit $g(x)=\sin x$ ($x\in\mathbb{R}$) an der Stelle $x=\Pi$ beträgt

☐	☐	☐	☐	☐
$-\Pi$	-1	0	1	Π

1.3 Welche Funktion h hat bei $x=-1$ eine Nullstelle?

☐ $h(x)=\ln(x+1)$ ($x\in D_h$)

☐ $h(x)=\frac{1}{x+1}$ ($x\in D_h$)

☐ $h(x)=\frac{2\cdot x+2}{x^2+1}$ ($x\in D_h$)

☐ $h(x)=e^{x+1}$ ($x\in D_h$)

☐ $h(x)=x^3+3\cdot x^2-2\cdot x$ ($x\in D_h$)

1.4 Der Schnittpunkt S der Geraden g mit $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\-3\\-9\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$ ($t\in\mathbb{R}$)mit der x-z-Koordinatenebene besitzt die Koordinaten

☐	☐	☐	☐	☐
$S(-4\|0\|3)$	$S(0\|-1\|0)$	$S(0\|-1\|-5)$	$S(-10\|1{,}5\|0)$	$S(-4\|0\|-3)$

1.5 In einer Urne befinden sich zehn Kugeln: sechs grüne und vier weiße.

Aus dieser Urne werden nacheinander zufällig und ohne Zurücklegen zwei Kugeln gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese beiden Kugeln die gleiche Farbe besitzen, beträgt

☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$

Für Aufgabe 1 erreichbare BE-Anzahl: 5

2 Die Graphen der Funktionen f und g mit

$f(x)=-x^2+5$ ($x\in\mathbb{R}$) und $g(x)=1$ ($x\in\mathbb{R}$) schließen eine Fläche vollständig ein.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

3 Gegeben ist die Ebene E mit $E: 2\cdot x-2\cdot y-z=1$.

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $A(7|-2|-1)$ von der Ebene E.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

4 Von fünf Spielkarten mit gleicher Rückseite besitzen zwei auf der Vorderseite ein rotes und drei ein schwarzes Kartenbild. Diese fünf Spielkarten werden gemischt und nebeneinander mit der Rückseite nach oben auf den Tisch gelegt.

Diese Spielkarten werden nacheinander aufgedeckt, bis das erste schwarze Kartenbild sichtbar wird.

Ermitteln Sie, wie viele aufgedeckte Karten im Mittel zu erwarten sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

Aufgabe B 1

Eine Grünbrücke dient wildlebenden Tieren zur gefahrlosen Überquerung einer stark befahrenen Schnellstraße.

Jede Ebene, welche die Grünbrücke senkrecht zur Fahrtrichtung der Schnellstraße schneidet, erzeugt die gleiche Querschnittsfläche der Grünbrücke. Diese Querschnittsfläche der Grünbrücke wird in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) dargestellt (siehe Abbildung 1). Die x-Achse verläuft in Höhe der Schnellstraße. Die Grünbrücke ist an den Stellen $x=-20{,}0$ und $x=20{,}0$ in Höhe der Schnellstraße am Erdboden verankert. Die Querschnittslinie des oberen Brückenbogens der Grünbrücke kann durch den Graphen der Funktion f mit $y=f(x)=-\frac{3}{640}\cdot x^2+12{,}5$ ($x\in\mathbb{R}, -40{,}0\le x\le 40{,}0$) beschrieben werden.

Die Durchfahrtshöhe für Fahrzeuge beträgt an den Stellen $x=-20{,}0$ und $x=20{,}0$ jeweils 8,5 m; an der Stelle $x=0{,}0$ beträgt die Durchfahrtshöhe $10{,}0\,m$.

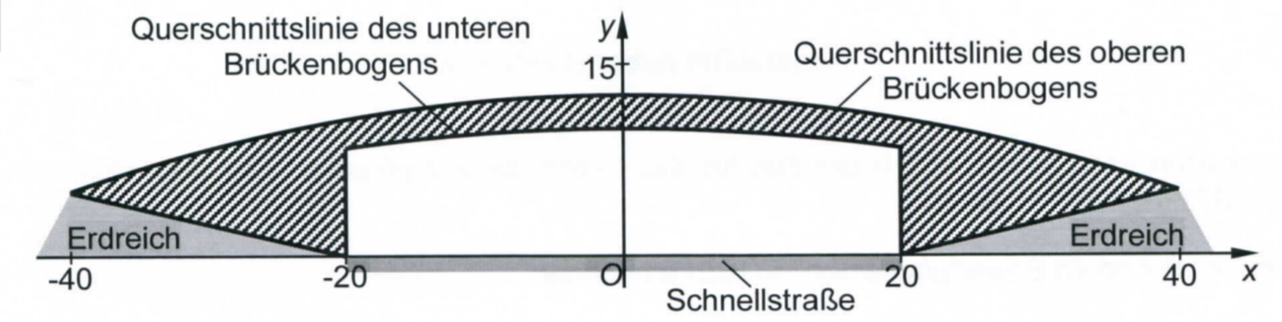


Abbildung 1 (nicht maßstäblich)

1.1. Weisen Sie nach, dass aufgrund der gegebenen Eigenschaften die Querschnittslinie des unteren Brückenbogens der Grünbrücke im Intervall $-20{,}0\le x\le 20{,}0$ ($x\in\mathbb{R}$) durch den Graphen der Funktion g mit $y=g(x)=-\frac{3}{800}\cdot x^2+10{,}0$ beschrieben werden kann.

Geben Sie den Abstand der Querschnittslinien der beiden Brückenbögen an der Stelle $x=0{,}0$ an.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

1.2. Ein Tierschützer behauptet, dass die Neigung der Querschnittslinie des oberen Brückenbogens der Grünbrücke gegenüber der Horizontalen an der Stelle $x=-20{,}0$ größer als 20% ist.

Untersuchen Sie, ob diese Behauptung wahr ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

1.3. Das Teilstück der Grünbrücke hat im Bereich $-20{,}0 \leq x \leq 20{,}0$ eine Breite von $75{,}0\,m$. Dieses Teilstück besteht aus einer speziellen Stahlkonstruktion, die mit Beton vergossen wird. 77 % des Gesamtvolumens dieses Teilstücks der Grünbrücke besteht aus Beton.

Ermitteln Sie das Volumen an Beton, welches zum Gießen dieses Teilstücks der Grünbrücke notwendig ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 05

1.4. Die Querschnittsfläche der Grünbrücke wird im Intervall $20{,}0 \leq x \leq 40{,}0$ ($x \in \mathbb{R}$) von einer Strecke s mit den Endpunkten $P_1(20{,}0|0{,}0)$ und $P_2(40{,}0|f(40{,}0))$ begrenzt. Die Strecke s liegt auf dem Graphen einer linearen Funktion h.

Im Intervall $20{,}0 < x < 40{,}0$ ($x \in \mathbb{R}$) soll eine rechteckige Informationstafel an der Querschnittsfläche der Grünbrücke angebracht werden. Eine Ecke soll auf der Querschnittslinie des oberen Brückenbogens der Grünbrücke und eine weitere Ecke auf der Strecke s liegen (siehe Abbildung 2).

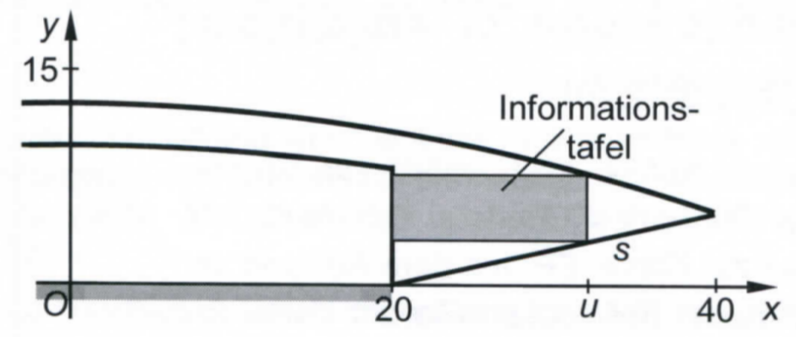


Abbildung 2 (nicht maßstäblich)

Für jeden Wert von u mit $20{,}0 < u < 40{,}0$ ($u \in \mathbb{R}$) kann der Flächeninhalt A der Informationstafel mit der Gleichung $A(u) = (u-20)(f(u)-h(u))$ beschrieben werden.

Ermitteln Sie die Länge einer Seite der rechteckigen Informationstafel mit größtmöglichem Flächeninhalt.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

Mithilfe einer Videostudie des örtlichen Naturschutzbundes wurde ermittelt, wie viele Tiere Rot- und Schwarzwild die Grünbrücke im Laufe von 5 Jahren querten. Insgesamt wurden dabei 23 045 Tiere gezählt. Es wurden 6 918 Querungen von Schwarzwild gezählt, wobei 5 134 dieser Querungen in der Nacht stattfanden.

1.5. Ermitteln Sie den Anteil des Rotwildes an den gesamten gezählten Querungen.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

1.6. Es werden jetzt nur die Querungen betrachtet, die nicht in der Nacht stattfanden. Die Auswertung ergab, dass 40 % aller gezählten Querungen nicht in der Nacht stattfanden.

Bestimmen Sie den Anteil von Schwarzwild an diesen Querungen.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

1.7. Verhaltensanalysen der Tiere auf der Grünbrücke ergaben, dass 40 % aller Querungen ruhig ziehend und 19% flüchtend jeweils ohne Nahrungsaufnahme erfolgten. Bei den restlichen Tieren wurde während der Querung Nahrungsaufnahme beobachtet. Von der jeweiligen Tierart war dies unabhängig.

Berechnen Sie, wie viele Tiere nahrungsaufnehmendes Schwarzwild in der Videostudie des örtlichen Naturschutzbundes entsprechend dieser Verhaltensanalyse zu erwarten sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

Aufgabe B 2

Ein Denkmal besteht aus einem Quader ABCDEFGH mit der Grundfläche ABCD und einem Teil einer geraden quadratischen Pyramide KLMNOPQR.
Das Denkmal wird in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) dargestellt (siehe Abbildung).
Die Fläche ABCD liegt in der x-y-Koordinatenebene. Der Punkt A liegt im Koordinatenursprung.

Es gilt: $B(0{,}00|6{,}30|0{,}00)$, $C(-4{,}60|6{,}30|0{,}00)$ und $G(-4{,}60|6{,}30|2{,}40)$.

Das Quadrat KLMN liegt vollständig in der Deckfläche EFGH des Quaders. Die Kante $\overline{KL}$ liegt parallel zur Kante $\overline{EF}$ mit dem Abstand von $0{,}55\,m$. Die Kante $\overline{KN}$ liegt parallel zur Kante $\overline{EH}$ mit dem Abstand von $1{,}40\,m$. Die Kante $\overline{LM}$ liegt parallel zur Kante $\overline{FG}$ mit dem Abstand von $1{,}40\,m$.

Die Fläche OPQR liegt parallel zur Fläche KLMN.

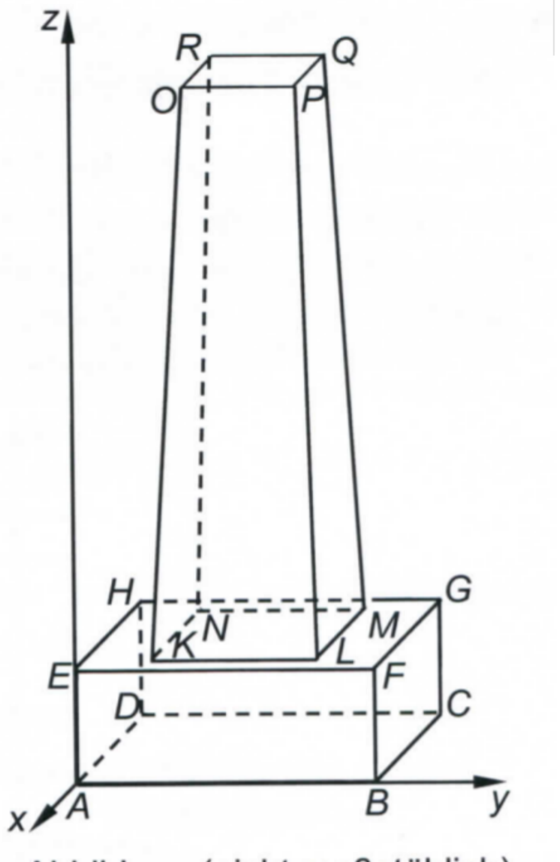


Abbildung (nicht maßstäblich)

2.1. Geben Sie die Länge der Kante $\overline{BC}$ an.

Begründen Sie, dass der Punkt L die Koordinaten $L(-0{,}55|4{,}90|2{,}40)$ besitzt.

Geben Sie die Koordinaten des Punktes M an.

Erreichbare BE-Anzahl: 05

Für die Punkte P und Q gilt: $P(-1{,}10|4{,}35|14{,}00)$ und $Q(-3{,}50|4{,}35|14{,}00)$.

2.2. Berechnen Sie den Neigungswinkel der Fläche LMQP zur Fläche EFGH.

Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche LMQP.

Erreichbare BE-Anzahl: 06

2.3. Der Körper KLMNOPQR sollte im Zuge einer Sanierung zu einer vollständigen Pyramide ergänzt werden.

Berechnen Sie die Gesamthöhe des Denkmals, die sich dabei ergeben hätte.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

2.4. Jemand behauptet, dass die Fläche KLPO senkrecht zur Fläche LMQP verläuft, da auch die Kanten $\overline{KL}$ und $\overline{LM}$ sowie $\overline{OP}$ und $\overline{PO}$ einen rechten Winkel bilden.

Untersuchen Sie, ob diese Behauptung wahr ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

2.5. Erfahrungsgemäß kennen 18 % der Besucher des Denkmals dessen Geschichte. Berechnen Sie, wie viele Besucher des Denkmals hinsichtlich Ihrer Kenntnis der Geschichte mindestens befragt werden müssten, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85 % wenigstens einen Besucher zu finden, der die Geschichte des Denkmals kennt.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

2.6. Bei einer Sanierung müssen Natursteine am Denkmal ausgewechselt werden. Aus Kostengründen werden Natursteine von Qualität I und II bestellt. Bei Qualität I sind 10 % der Natursteine nicht maßgerecht. Bei Qualität II sind 25 % der Natursteine nicht maßgerecht.

Die Natursteine werden auf Paletten geliefert. Jede Palette enthält Natursteine genau einer Qualität. Bei der Anlieferung wird nicht sichtbar, welcher Qualität die Natursteine einer Palette sind.

Es werden 20 Natursteine einer Palette getestet.

Es wird folgende Nullhypothese angenommen: „Die Natursteine dieser Palette sind von Qualität I".

Befinden sich unter den getesteten 20 Natursteinen mindestens 5 nicht maßgerechte, so wird Qualität II angenommen, ansonsten Qualität I.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Entscheidung für Qualität I fällt, obwohl die Natursteine der getesteten Palette von Qualität II sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

Lösungsvorschläge

Teil A

1 Feld 4, Feld 2, Feld 3, Feld 5, Feld 3

2 Schnittstellen ermitteln $-x^2+5=1$ ergibt -2 und 2

$$\int_{-2}^{2}(-x^2+5-1)\,dx=\left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2}=\frac{32}{3}$$

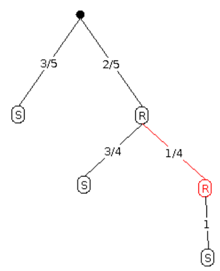
3 HNF ermitteln ==> Länge des Normalenvektors $\left|\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4+4+1}=3$

HNF ist dann $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-\frac{1}{3}=0$

Punkt einsetzen ergibt als Abstand 6

4 Erwartungswert

$$1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+3\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=1{,}5$$



Teil B1

1.1 I: $g(-20)=\frac{-3}{800}\cdot(-20)^2+10=8{,}5$

II: $g(20)=\frac{-3}{800}\cdot 20^2+10=8{,}5$

III: $g(0)=10$

$f(0)-g(0)=12{,}5-10=2{,}5$

1.2 $f'(x)=\frac{-6}{640}x$

$f'(-20)=0.1875$ also weniger als 20%

1.3 $0.77\cdot 75\cdot\int_{-20}^{20} f(x)-g(x)\,dx\approx 5486\,[m^3]$

1.4 Gleichung von g(x) über Zweipunkteform ermitteln: $g(x)=\frac{1}{4}x-5$

Ermittle mit dem Taschenrechner das Maximum der angegebenen Funktion $A(x)=(x-20)(f(x)-g(x))$ ==> bei 30,4m (A_{max}=57,9)

also wenn man die 20 abzieht l=10,4 (zweite Seite =5,6)

1.5 $\frac{23045-6918}{23045}\approx 0.70$ also 70%

1.6 40% von 23045 sind 9218

$\frac{6918-5134}{9218} \approx 0.1935$ also 19,4%

1.7 40%+19%=59% ohne Nahrungsaufnahme

==> 41% mit Nahrungsaufnahme ==> $0{,}41 \cdot 6918 \approx 2836$

Teil B2

2.1 $|\overline{BC}| = 4{,}6$

x- Wert von L, da x-Wert von A minus 0,55

y- Wert von L, da y-Wert von G minus 1,4

z- Wert von L, da gleich z-Wert von G

$M(-4{,}05|4{,}90|2{,}40)$

2.2 TR $angle\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-0{,}55\\11{,}6\end{bmatrix}\right) \approx 92{,}71$ also rund 87,29°

$\frac{\overline{LM}+\overline{PQ}}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\-0{,}55\\11{,}6\end{pmatrix}\right| \approx \frac{3{,}5+2{,}4}{2} \cdot 11{,}61 \approx 34{,}26$

2.3 $\begin{pmatrix}-0{,}55\\4{,}9\\2{,}4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-0{,}55\\-0{,}55\\11{,}6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4{,}05\\4{,}9\\2{,}4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0{,}55\\-0{,}55\\11{,}6\end{pmatrix}$ ergibt $t = \frac{35}{11}$ und $r = \frac{35}{11}$

also einen Schnittpunkt bei $z \approx 39{,}31$ =Höhe

2.4 Normalenvektoren von KLPO mit dem Kreuzprodukt bilden

==> $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix}40{,}6\\0\\1{,}925\end{pmatrix}$ Normalenvektor von LMQP ==> $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}0\\40{,}6\\1{,}925\end{pmatrix}$

und Skalarprodukt berechnen $0 \cdot 40{,}6 + 40{,}6 \cdot 0 + 1{,}925 \cdot 1{,}925 \neq 0$

2.5 $B_{n;0{,}18}$ => $\boxed{\begin{array}{c}0{,}85 = 1 - 0{,}82^n\\ n = \frac{\ln(0{,}15)}{\ln(0{,}82)}\\ n \approx 9{,}56\end{array}}$ also mindestens 10

2.6 erster Art bedeutet H_0 stimmt ($B_{20;0.1}$), wird aber abgelehnt

$B20;0.1(X \geq 5) = 1 - binomialCDF(4{,}20{,}0.1) \approx 0{,}0432$

zweiter Art

$B20;0.25(X \leq 4) = binomialCDF(4{,}20{,}0.25) \approx 0{,}4148$