Schriftliche Abiturprüfung – Grundkurs – Mathematik Nachtermin

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2012 (Nachtermin).

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier ClassPad330) eingesetzt.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: L. Wendrock (wendrock@googlemail.com) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 24.07.17.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Hinweise für den Teilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 15 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten. Es sind 45 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	58	55	52	49	46	43	40	37	34	31	28	25	21	17	13	0

Prüfungsinhalt

Aufgabe A

Tragen Sie die Antworten zur Aufgabe 1 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 2 bis 4 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Welchen Anstieg besitzt der Graph der Funktion f mit $f(x)=x^3-4\cdot x^2-3\cdot x+12$ ($x\in\mathbb{R}$)an der Stelle $x=-1$?

☐ -8 ☐ -4 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 8

1.2 Eine Gleichung einer Stammfunktion F der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{9}{2}$ ($x\in D_f$) lautet:

☐ $F(x)=x$ ($x\in D_F$)

☐ $F(x)=\frac{1}{6}\cdot x^3$ ($x\in D_F$)

☐ $F(x)=\frac{1}{6}\cdot x^3-\frac{9}{2}\cdot x+1$ ($x\in D_F$)

☐ $F(x)=\frac{3}{2}\cdot x^3-\frac{9}{2}\cdot x$ ($x\in D_F$)

☐ $F(x)=\frac{1}{2}\cdot x^3-\frac{9}{2}\cdot x+1$ ($x\in D_F$)

1.3 Die Funktion f mit $y=f(x)=\frac{2\cdot x^2}{x^2-1}$ ($x\in D_f$) besitzt

- ▢ keine senkrechte Asymptote und genau zwei waagerechte Asymptoten mit den Gleichungen y=-1 und y=1.
- ▢ keine senkrechte und genau eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung y=2.
- ▢ keine achsenparallelen Asymptoten.
- ▢ genau eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung x=2.
- ▢ genau zwei senkrechte Asymptoten mit den Gleichungen x=-1 und x=1 und genau eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung y=2.

1.4 Für welchen Wert für t ($t\in\mathbb{R}$) verlaufen die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\t\\-3\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}t\\4\\-2\end{pmatrix}$ orthogonal zueinander?

▢	▢	▢	▢	▢
t=-2	t=0	t=0,5	t=1,2	t=2

1.5 In einem Regal befinden sich genau 10 Porzellanfiguren, davon sind 6 fehlerfrei und 4 fehlerbehaftet. Durch eine Umräumaktion sind diese Figuren durcheinander geraten. Es werden genau drei Figuren zufällig nacheinander aus dem Regal genommen, auf Fehler geprüft und dann zur Seite gestellt.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle drei Figuren fehlerbehaftet sind, beträgt:

▢	▢	▢	▢	▢
$\frac{1}{30}$	$\frac{8}{125}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$

Für Aufgabe 1 erreichbare BE-Anzahl: 5

2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=x\cdot e^x$ ($x\in D_f$).
Ermitteln Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen der Funktion f.
Untersuchen Sie die Art dieses lokalen Extrempunktes.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

3 Eine Ebene E ist eindeutig durch die Punkte $A(1|2|-1)$, $B(1|3|2)$ und $C(-1|1|-1)$ bestimmt.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform an.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in parameterfreier Form.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

4 In einer Urne befinden sich genau eine weiße und genau vier schwarze Kugeln.
Es wird ein Glücksspiel vereinbart, bei dem zweimal nacheinander genau eine Kugel mit Zurücklegen gezogen wird.

Für die Teilnahme am Glücksspiel zahlt der Spieler zunächst einen Einsatz. Sind beide gezogenen Kugeln weiß, werden 30 Euro an ihn ausgezahlt, andernfalls erhält er keine Auszahlung.

Ermitteln Sie, wie hoch der Einsatz sein muss, damit der Spieler auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust macht.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

Aufgabe B 1

Gemessen an ihrer Spannweite ist die „Storebaeltsbroen“ die größte Brücke in Europa. Seit 1998 überspannt das Bauwerk den Großen Belt, die Meeresstraße zwischen den dänischen Inseln Seeland und Fünen.

Die beiden Brückenpfeiler, deren Breite vernachlässigt werden soll, haben einen Abstand von 1 624 m. Zwischen den oberen Enden der Brückenpfeiler sind hängende Stahlseile befestigt.

Ein solches Stahlseil kann in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) durch den Graphen der Funktion f mit $y=f(x)=0{,}0002684\cdot x^2+77$ ($x\in\mathbb{R}, -812\leq x\leq 812$) beschrieben werden

(siehe Abbildung).

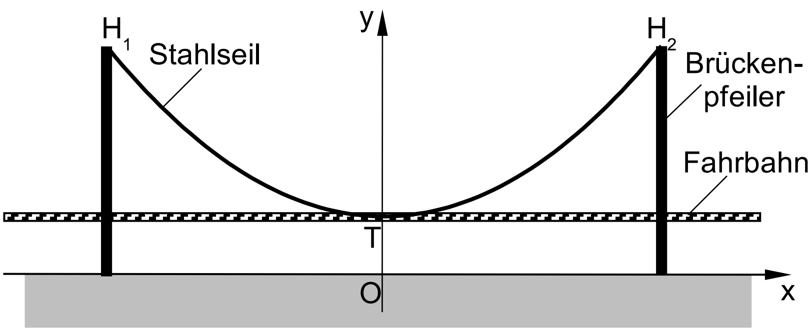

Abbildung (nicht maßstäblich)

H_1 und H_2 sind die höchsten Punkte dieses Stahlseiles. Die x-Achse verläuft in Höhe der Wasseroberfläche. Der tiefste Punkt T des Stahlseiles befindet sich ebenso wie die ebene Fahrbahn der Brücke 77 m über der Wasseroberfläche.

1.1. Geben Sie die Koordinaten der Punkte T, H_1 und H_2 an.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

1.2. Ein Künstler erwägt, die Fläche unter dem Stahlseil bis zur Fahrbahn für ein Kunstprojekt zu nutzen.

Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

1.3. Zur Brückenüberwachung wird ein Laser so angebracht, dass sein Lichtstrahl im angegebenen Koordinatensystem tangential zum Stahlseil durch den Punkt $L(-459|f(-459))$ verläuft und den linken Brückenpfeiler anstrahlt.

Untersuchen Sie, ob der Laserstrahl den linken Brückenpfeiler höher als 150 m über der Fahrbahn trifft.

Berechnen Sie den Winkel, unter dem der Laserstrahl auf den linken Brückenpfeiler auftrifft.

Erreichbare BE-Anzahl: 06

1.4. Ermitteln Sie die Länge des in der Abbildung dargestellten Stahlseils.

Hinweis: Für die Länge s des Graphen einer Funktion f über dem Intervall $a \leq x \leq b$ gilt: $s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

An diesem Stahlseil sollen insgesamt 94 Lampen angebracht werden. Dabei sollen die Längen der Seilabschnitte zwischen zwei benachbarten Lampen jeweils gleich groß sein. Die beiden äußeren Lampen sollen sich in den Punkten H_1 und H_2 befinden.

Bestimmen Sie die Länge eines Seilabschnittes zwischen zwei benachbarten Lampen.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

1.5. Das dargestellte Stahlseil kann im angegebenen Koordinatensystem auch näherungsweise durch den Graphen der Funktion k mit $y = k(x) = 105{,}5 \cdot (e^{0{,}0015 \cdot x} + e^{-0{,}0015 \cdot x}) - 134$ ($x \in \mathbb{R}, -812 \leq x \leq 812$) beschrieben werden.

Bestimmen Sie die beiden Stellen im Intervall $-812 \leq x \leq 812$, für welche der Betrag der Differenz der Funktionswerte der Funktionen f und k am größten ist.

Geben Sie diesen größtmöglichen Betrag an.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

Die Brücke ist für den Autoverkehr freigegeben und wird von sehr vielen Autos genutzt. Erfahrungsgemäß besitzen 75 % aller Autos, die diese Brücke befahren, ein dänisches Kennzeichen.

1.6. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 Autos, welche die Brücke befahren, höchstens 80 ein dänisches Kennzeichen besitzen.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

1.7. Ermitteln Sie, wie viele Autos die Brücke mindestens befahren müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 99 % mindestens ein Auto mit dänischem Kennzeichen dabei ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

1.8. Eine Bürgerinitiative behauptet, dass 40 % der Autos zu schnell über die Brücke fahren. Das zuständige Verkehrsamt spricht in diesem Zusammenhang von 20 %. Bei einer Stichprobe von 30 Autos soll die Nullhypothese H_0 mit $p_0=0{,}4$ gegen die Alternativhypothese H_1 mit $p_1=0{,}2$ getestet werden, indem man prüft, wie viele der 30 Autos zu schnell über die Brücke fahren.

Ermitteln Sie für den Ablehnungsbereich $\overline{A}$ der Nullhypothese von $\overline{A}=\{0;...;7\}$ die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler 1. und 2. Art.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Aufgabe B 2

In einer Eigenheimsiedlung ist ein neuer Spielplatz geplant, der in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) dargestellt werden kann.

Die Begrenzungspunkte der geradlinig begrenzten ebenen Grundfläche $P_1P_2P_3P_4$ des Spielplatzes besitzen die folgenden Koordinaten: $P_1(0|0|0), P_2(30|0|0), P_3(27|13|0), P_4(4|13|0)$.

2.1. Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Grundfläche des Spielplatzes ein Trapez ist.

Begründen Sie, dass die Grundfläche des Spielplatzes kein Parallelogramm ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

2.2. Die Grundfläche des Spielplatzes soll eine 30 cm dicke Kiesschicht als Unterbau erhalten. Die Dichte des Kieses beträgt $1{,}9\frac{g}{cm^3}$.

Ermitteln Sie, wie viele Lkw-Ladungen notwendig sind, wenn der vorhandene Lkw ein Ladevermögen von 20 t hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 05

2.3. Auf dem Spielplatz soll ein Kletterhaus mit quadratischer Grundfläche gebaut werden. Die Koordinaten von drei Eckpunkten der Grundfläche des Kletterhauses sind: $A(14|6|0), B(17|7|0), C(16|10|0)$.

Begründen Sie, dass die Punkte A, B und C Eckpunkte eines Quadrates sein können.

Berechnen Sie die Koordinaten des vierten Eckpunktes dieses Quadrates.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

Als Begrenzung des Spielplatzes soll auf der Begrenzungslinie $\overline{P_1P_2}$ eine Koniferenreihe gepflanzt werden.

2.4. Ein Baumarkt bietet Koniferen der Sorten 1 und 2 zum Kauf an. Eine Konifere der Sorte 1 kostet 7,00 Euro und wächst erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 96 % an. Eine Konifere der Sorte 2 kostet 6,00 Euro und wächst erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % an.

Es sollen 75 Koniferen der Sorte 1 gekauft werden.

Ereignis A: Von den 75 Koniferen wachsen mindestens 73 an.

Zeigen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A gilt: $P(A) \approx 0{,}4186$.

Es soll geprüft werden, ob der Kauf von n Koniferen der Sorte 2 kostengünstiger wäre. Dabei geht man davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auch mindestens 73 der n Koniferen anwachsen, mindestens so groß wie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A sein soll.

Untersuchen Sie, ob der Kauf der 75 Koniferen der Sorte 1 oder der Kauf der n Koniferen der Sorte 2 kostengünstiger wäre.

Erreichbare BE-Anzahl: 05

2.5. Die 30 Meter lange dichte Koniferenreihe hat nach drei Jahren eine gleichmäßige Höhe von 2,20 m. Die Breite der Koniferenreihe wird vernachlässigt.

Zu einem bestimmten Zeitpunkt verlaufen die Sonnenstrahlen in Richtung des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. Dadurch wirft die Koniferenreihe einen Schatten auf den Spielplatz.
Berechnen Sie den Abstand der Schattengrenze von der Begrenzungslinie $\overline{P_1P_2}$ des Spielplatzes.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

Lösungsvorschläge

Teil A

1 Feld 5, Feld 3, Feld 5, Feld 1, Feld 1

2
$$f'(x)=e^x+x\cdot e^x$$
$$f'(x)=e^x+e^x+x\cdot e^x=2e^x+x\cdot e^x$$

erste Ableitung Null setzen: $0=e^x(1+x)$, $x_E=-1$

in die zweite Ableitung einsetzen: $f''(-1)=2e^{-1}-e^{-1}=\frac{1}{e}>0$

also Minimum

$f(-1)=\frac{-1}{e}$ also $Min(-1|\frac{-1}{e})$

3 eine Parameterform: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$

Normalenvektor mit Kreuzprodukt $crossp(\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}3\\-6\\2\end{pmatrix}=\vec{n}$

ax+by+cz=d

=> Normalenvektor und Punkt A einsetzen $3\cdot1-6\cdot2+2\cdot(-1)=-11$

also $3x-6y+2z=-11$

4 Die Wahrscheinlichkeit für 2 mal weiß ist $\frac{1}{25}$

faires Spiel, wenn Erwartungswert Null ist $\frac{1}{25}\cdot(30-x)+\frac{24}{25}\cdot(-x)=0$, $x=\frac{6}{5}$

also 1,20€

Teil B1

1.1 $T(0|77)$ aus Aufgabenstellung

$H_1(-812|253{,}97)$ Funktionswert von -812

$H_2(812|253{,}97)$ Funktionswert von 812

1.2 $\int_{-812}^{812} f(x)-77\,dx\approx 95798{,}64\,[m^2]$

1.3 $f'(-459) \approx -0{,}2464$

$f(-459) \approx 133{,}5468$

in y=mx+n einsetzen ergibt $\begin{aligned} 133{,}5468 &= -0{,}2464 \cdot (-459) + n \\ n &\approx 20{,}4532 \end{aligned}$

Die Geradengleichung ist dann $g(x) = -0{,}2464\,x + 20{,}4532$

$g(-812) \approx 220{,}5229$ Nun noch die 77m Starßenhöhe abziehen und man bekommt $220{,}5229 - 77 = 143{,}5229$, also unter den 150m

Winkel: $\tan(\alpha) = -0{,}2464$ ergibt $\alpha \approx -13{,}8419°$ mit der x-Achse

also $90 + \alpha = 76{,}16°$

1.4 $s = \int_{-812}^{812} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \approx 1674{,}0503$ also rund 1674m

Abstand der Lampen $\frac{1674}{93} \approx 18$ also 18m

1.5 $d(x) = k(x) - f(x)$

zeichnen und Extrema ermitteln ==> $\begin{aligned} &Min_1(-579{,}3367 | -5{,}2713) \\ &Min_2(579{,}3367 | -5{,}2713) \end{aligned}$

Die Stellen sind also $x_1 = -579{,}3$ und $x_2 = 579{,}3$ und der maximale Abstand ist 5,27m

1.6 $B_{100/0.75}$ verteilt ==> $binomialCDF(80{,}100{,}0.75) \approx 0{,}9004696$

1.7 $\begin{aligned} 1 - P(0) &= 0.99 \\ 1 - 0.25^x &= 0.99 \\ x &= 3{,}32 \end{aligned}$ also müssen mindestens 4 Autos fahren

1.8 $p_0 = 0{,}4$ $\qquad p_1 = 0{,}2$

Fehler 1. Art: Nullhypothese wird abgelehnt, obwohl wahr

also $binomialCDf(7{,}30{,}0.4) \approx 0{,}043524119$

Fehler 2. Art: Nullhypothese wird angenommen, obwohl H_1 wahr

also $1 - binomialCDf(7{,}30{,}0.2) \approx 0{,}2392$

Teil B2

2.1 zwei Seiten parallel: $\overline{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overline{P_3P_4} = \begin{pmatrix} -23 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

sind beide parallel zur x-Achse

Es ist kein Parallelogramm, da dann die beiden Seiten gleich lang sein müssten. Sie sind aber 30 und 23 lang.

2.2 Fläche des Spielplatzes $\frac{1}{2}(a+c)\cdot h=\frac{1}{2}(30+23)\cdot 13=344{,}5\,[m^2]$

Volumen $V=344{,}5\cdot 0.3=103{,}35\,[m^3]$ also

$$m=V\cdot\rho$$
$$\rho=\frac{m}{V}$$
$$1{,}9=m/1033500$$
$$m=196365000\,[g]$$

also 196,4t

Das sind dann 9,8 Ladungen also 10 LKW-Ladungen

2.3 Quadrat, wenn $|\overline{AB}|=|\overline{BC}|$, $\sqrt{9+1}=\sqrt{1+9}$

und wenn der Winkel ein rechter ist: $\vec{AB}\cdot\vec{BC}=3\cdot-1+1\cdot 3+0\cdot 0=0$

Der vierte Eckpunkt: $\vec{OD}=\vec{OA}+\vec{BC}$ also $D(13|9|0)$

2.4 $B_{75/0.96}$ also $1-binomialCDF(72{,}75{,}0.96)\approx 0{,}4186118754$

Kauf 75 der Sorte 1: $75\cdot 7=525\,[€]$

Ermitteln von n für Sorte 2: $B_{n/0{,}8}$ nun gilt $0{,}4186\leq 1-binomialCDF(72,n,0.8)$ das kann man durch systematisches Probieren lösen ==> $n\geq 90$

Kauf 90 der Sorte 2: $90\cdot 6=540$

Sorte 1 zu kaufen wäre also kostengünstiger

2.5 Geradengleichung durch einen oberen Punkt der Hecke:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\2{,}2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-5\end{pmatrix}$$

Nun den Spurpunkt der Geraden mit der x-y-Ebene

$$2{,}2-5t=0$$
$$t=\frac{11}{25}$$

$$=> \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\2{,}2\end{pmatrix}+\frac{11}{25}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{44}{25}\\0\end{pmatrix}$$

also in einem Abstand von 1,76