Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort....1
Material für den Prüfungsteilnehmer 2
Allgemeine Arbeitshinweise 2
Prüfungsinhalt....2
Pflichtaufgaben....2
Teil A: Analysis....2
Teil B: Geometrie /Algebra 3
Teil C: Stochastik 3
Teil D: Wahlaufgaben 4
Aufgabe D 1: Analysis 4
Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra 5
Lösungsvorschläge....6
Teil A....6
Teil B....6
Teil C....9
Teil D1....10
Teil D2....10

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2009, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+/92) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@gymnasium-delitzsch.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 10.02.10.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 25 BE,
im Teil B 15 BE,
im Teil C 10 BE,
im Teil D 10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) oder Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“[1]

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
60 BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

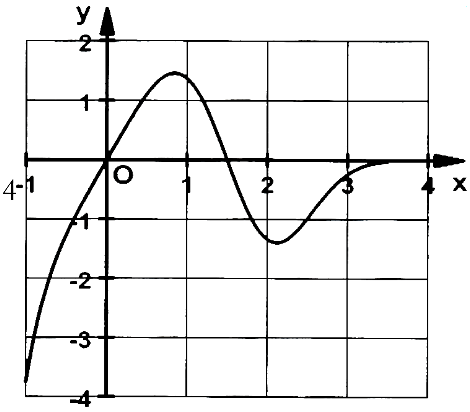
Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis (für Prüfungsteilnehmer, die ein CAS benutzen)

Für jedes k ($k \in \mathbb{R}$, $k > 0$) ist eine Funktion f_k durch $y = f_k(x) = 6 \cdot k \cdot x^2 \cdot e^{-k \cdot x^3}$ ($x \in \mathbb{R}$) gegeben.

a) Nebenstehende Abbildung zeigt eine Funktion f_k den Graphen ihrer ersten Ableitungsfunktion f_k' im Intervall $-1 \le x \le 3{,}5$.
Geben Sie aufgrund dieser Abbildung für die zugehörige Funktion f_k bzw. für ihren Graphen folgende Eigenschaften im gegebenen Intervall an:

1 Diese werden hier nicht wiedergegeben. Sie enthalten zumeist eine Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Manchmal eine Tabelle zur Summenfunktion der Binomialverteilung. Beides kann durch Verwendung des GTR leicht ersetzt werden. Die Tabellen finden Sie im Inhalt der Online-Ausgabe dieses Textes www.sn.schule.de/~matheabi.



1. Abszisse des lokalen Minimumpunktes
2. Intervall, in dem f_k monoton wachsend ist
3. Anzahl der Wendestellen

Begründen Sie Ihre Entscheidungen mithilfe der Abbildung.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Maximumpunktes des Graphen der Funktion f_k.
Der lokale Maximumpunkt des Graphen der Funktion f_k kann in der Form $P_{Max}\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3\cdot k}}\ \middle|\ 6\cdot\sqrt[3]{\frac{4\cdot k}{9\cdot e^2}}\right)$ angegeben werden.
Geben Sie den Wert für k an, für den der lokale Maximumpunkt an der Stelle x = 1 liegt.
Die lokalen Maximumpunkte der Graphen jeder der Funktionen f_k liegen auf dem Graphen einer Funktion g.
Geben Sie eine Gleichung der Funktion g an. Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Die Gerade t_k ist die Tangente an den Graphen der Funktion f_k im Punkt $P_k(1 \mid f_k(1))$.
Begründen Sie, dass t_k durch die Gleichung $y=t_k(x)=\frac{12\cdot k-18\cdot k^2}{e^k}\cdot x+\frac{18\cdot k^2-6\cdot k}{e^k}$ $(x \in \mathbb{R})$ beschrieben werden kann.
Die Tangente t_k und die Koordinatenachsen bilden für bestimmte Werte für k ein Dreieck.
Ermitteln Sie die Werte für k, für die kein solches Dreieck entsteht.
Es gibt Werte für k, so dass das entstehende Dreieck gleichschenklig ist.
Bestimmen Sie einen Näherungswert für einen solchen Wert für k. Erreichbare BE-Anzahl: 7

d) Der Graph der Funktion f_k, die Abszissenachse und die Gerade x = c ($c \in \mathbb{R}$, c > 0) begrenzen eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie c in Abhängigkeit von k so, dass der Inhalt dieser Fläche 1 beträgt.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche für $c \to \infty$. Erreichbare BE-Anzahl: 4

e) Betrachtet wird die Funktion f_k für $k=\frac{1}{12}$. Für jedes u ($u \in \mathbb{R}$, 0 < u < 2) sind die Punkte $P_u(u \mid f_{1/12}(u))$ und R(2 | 0) diagonal gegenüberliegende Eckpunkte genau zweier Trapeze mit folgenden Eigenschaften:
1. eine Seite jedes Trapezes liegt auf der Abszissenachse
2. eine Seite jedes Trapezes liegt auf der Geraden mit der Gleichung x = 2
3. genau zwei Eckpunkte jedes Trapezes liegen auf dem Graphen von $f_{1/12}$
4. der Koordinatenursprung ist ein Eckpunkt genau eines dieser beiden Trapeze

Skizzieren Sie den Graphen von $f_{1/12}$ für $-1 \le x \le 3$ und diese beiden Trapeze für u =1,5 in einem gemeinsamen Koordinatensystem.
Es existiert genau ein Wert u, für den die Inhalte dieser beiden Trapeze gleich groß sind.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für diesen Wert u. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil A: Analysis (für Prüfungsteilnehmer, die kein CAS benutzen)

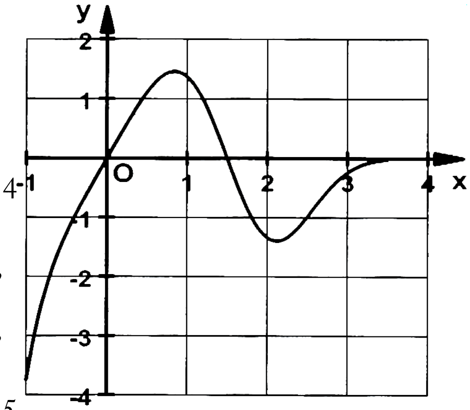
Für jedes k ($k \in \mathbb{R}$, k > 0) ist eine Funktion f_k durch $y = f_k(x) = 6\cdot k\cdot x^2\cdot e^{-k\cdot x^3}$ $(x \in \mathbb{R})$ gegeben.

a) Nebenstehende Abbildung zeigt eine Funktion f_k den Graphen ihrer ersten Ableitungsfunktion f'_k im Intervall $-1 \le x \le 3{,}5$.
Geben Sie aufgrund dieser Abbildung für die zugehörige Funktion f_k bzw. für ihren Graphen folgende Eigenschaften im gegebenen Intervall an:

1. Abszisse des lokalen Minimumpunktes
2. Intervall, in dem fk monoton wachsend ist
3. Anzahl der Wendestellen

Begründen Sie Ihre Entscheidungen mithilfe der Abbildung.

Erreichbare BE-Anzahl: 4



b) *Geben Sie die Nullstelle der Funktion f_k an.*
Der Graph der Funktion f_k besitzt genau einen lokalen Maximumpunkt, dessen Abszisse nicht mit der Nullstelle übereinstimmt.
Bestimmen Sie den Wert für k, für den dieser lokale Maximumpunkt die Abszisse $x=1$ besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl 5

c) Die Gerade t_k ist die Tangente an den Graphen der Funktion f_k im Punkt $P_k(1 \mid f_k(1))$.
Begründen Sie, dass t_k durch die Gleichung $y = t_k(x) = \frac{12\cdot k - 18\cdot k^2}{e^k}\cdot x + \frac{18\cdot k^2 - 6\cdot k}{e^k}$ $(x \in \mathbb{R})$
beschrieben werden kann.
Die Tangente t_k und die Koordinatenachsen bilden für bestimmte Werte für k ein Dreieck.
Ermitteln Sie die Werte für k, für die kein solches Dreieck entsteht.
Es gibt Werte für k, so dass das entstehende Dreieck gleichschenklig ist.
Bestimmen Sie einen Näherungswert für einen solchen Wert für k. Erreichbare BE-Anzahl: 7

d) *Die Funktion F_k mit $F_k(x) = -2\, e^{-k\cdot x^3}$ $(x \in \mathbb{R})$ ist eine Stammfunktion der Funktion f_k.*
Der Graph der Funktion f_k, die Abszissenachse und die Gerade x = c ($c \in \mathbb{R}$, c > 0) begrenzen eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie c in Abhängigkeit von k so, dass der Inhalt dieser Fläche 1 beträgt.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche für $c \to \infty$. Erreichbare BE-Anzahl: 4

e) Betrachtet wird die Funktion f_k für $k = \frac{1}{12}$. Für jedes u ($u \in \mathbb{R}$, 0 < u < 2) sind die Punkte
$P_u(u \mid f_{1/12}(u))$ und R(2 | 0) diagonal gegenüberliegende Eckpunkte genau zweier Trapeze mit folgenden Eigenschaften:
1. eine Seite jedes Trapezes liegt auf der Abszissenachse
2. eine Seite jedes Trapezes liegt auf der Geraden mit der Gleichung x = 2
3. genau zwei Eckpunkte jedes Trapezes liegen auf dem Graphen von $f_{1/12}$
4. der Koordinatenursprung ist ein Eckpunkt genau eines dieser beiden Trapeze

Skizzieren Sie den Graphen von $f_{1/12}$ für $-1 \le x \le 3$ und diese beiden Trapeze für u =1,5 in einem gemeinsamen Koordinatensystem.
Es existiert genau ein Wert u, für den die Inhalte dieser beiden Trapeze gleich groß sind.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für diesen Wert u. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem liegen die Punkte A (-8 | 9 | 1) , B(-4 | 2 | -3) und C(4 | 6 | z_c) in einer Ebene. Für jeden Wert k ($k \in \mathbb{R}$) liegt der Punkt D_k (8 + 16 ·k | -1-10 ·k | -6 - 7 ·k) ebenfalls in dieser Ebene. Es gibt Werte k, für die das Viereck $ABCD_k$ Grundfläche eines vierseitigen, geraden Prismas mit dem Viereck EFGH als Deckfläche ist.

Die Strecke $\overline{BF}$ ist eine Kante des Prismas. Sie verläuft parallel zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene, in der die Grundfläche des Prismas liegt.
Zeigen Sie, dass gilt: z_c = -2. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Der Punkt C besitzt die Koordinaten C(4 | 6 | -2).

b) Alle Punkte D_k liegen auf einer Geraden g.
Geben Sie eine Gleichung von g an.
Weisen Sie nach, dass folgende Aussage wahr ist: „Es gibt genau zwei Werte für k, für die der Punkt D_k nicht der vierte Eckpunkt der Grundfläche des Prismas sein kann."
Geben Sie einen derartigen Wert für k an. Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Ermitteln Sie Näherungswerte für diejenigen Werte für k, für die die Strecken $\overline{BD_k}$ und $\overline{CD_k}$ orthogonal zueinander verlaufen. Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes F so, dass die Höhe des Prismas 3 beträgt.
Es existiert genau ein Wert für k, für den die Größe des Winkels BFD_k minimal ist.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um diesen Wert für k zu ermitteln. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil C: Stochastik

Beim Biathlon müssen die Athleten Schießeinlagen absolvieren.

a) Bei einem Biathlon-Wettbewerb muss ein Teilnehmer einmal liegend und einmal stehend auf jeweils 5 Scheiben schießen. Dafür stehen ihm je genau 5 Patronen zur Verfügung. Für jeden Fehlschuss muss der Läufer eine Strafrunde absolvieren.
Für Biathletin Simone wird unter optimalen Bedingungen im Liegen eine Trefferwahrscheinlichkeit von 95 % und im Stehen eine Trefferwahrscheinlichkeit von 90 % angenommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Simone unter optimalen Bedingungen bei diesem Wettbewerb genau eine Strafrunde absolvieren muss. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Die Patronen für die Schießeinlagen liefert die Firma „Knall & Rauch". Erfahrungsgemäß sind 0,5 % aller durch diese Firma hergestellten Patronen fehlerhaft.

b) Die Firma liefert Patronen in Packungen zu genau 60 Stück.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine solche Packung keine fehlerhafte Patrone beinhaltet.
Ermitteln Sie, wie viele Packungen wenigstens kontrolliert werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % insgesamt wenigstens zwei fehlerhafte Patronen zu finden.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Eine Patrone gilt als fehlerhaft, wenn mindestens eine von zwei möglichen Fehlerquellen auftritt.
Erfahrungsgemäß treten bei 0,30 % aller Patronen ein defektes Zündhütchen und bei 0,22 % aller Patronen Risse in der Hülse auf.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
Ereignis A: Eine zufällig ausgewählte Patrone mit Rissen in der Hülse besitzt ein defektes Zündhütchen.
Ereignis B: Eine zufällig ausgewählte Patrone besitzt sowohl Risse in der Hülse als auch ein defektes Zündhütchen. Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Zum Befüllen der Patronen mit Schießpulver benutzt die Firma einen Automaten.
Die Masse des Schießpulvers in jeder befüllten Patrone ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert 1,62g und der Standardabweichung 0,02g.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Masse des Schießpulvers in einer zufällig ausgewählten befüllten Patrone zwischen 1,59g und 1,63g liegt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1

In einem Wintersportgebiet soll eine neue Biathlonarena errichtet werden.
Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems mit dem Koordinatenursprung O (1 Längeneinheit entspricht 50,00m) liegen folgende Planungen vor:
Die Eckpunkte A und C des rechteckigen Schießbereichs ABCD in der Arena haben die Koordinaten A(1,70 | -2,40 | 0,00) und C(0,10 | -0,20 | 0,00).
Die Begrenzungen des Schießbereichs verlaufen achsenparallel (siehe Abbildung). Die Athleten absolvieren ihre Schießeinlagen in positiver x-Richtung.

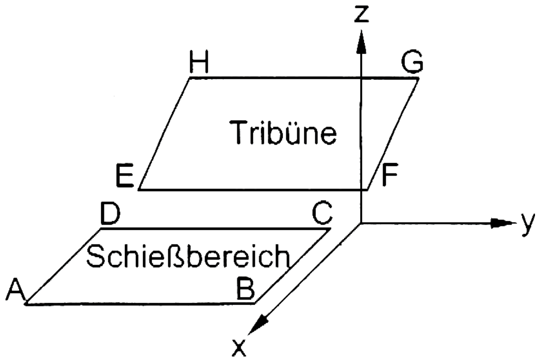


Abbildung 1: (nicht maßstäblich)

a) Im Schießbereich sollen 30 Schießbahnen mit einer Mindestbreite von je 2,75m und einer Länge von 50,00m eingerichtet werden.
Begründen Sie, dass der geplante Schießbereich dafür die notwendigen Voraussetzungen bietet.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Die 5500m² große rechteckige Zuschauertribüne EFGH befindet sich in einer Ebene, welche parallel zur y-Achse verlauft und um 30° zur x-y-Koordinatenebene geneigt ist. Die Punkte E und F besitzen die Koordinaten E(-0,10 | -2,40 | 0,05) und F(-0,10 | -0,20 | 0,05).
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte G und H. Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Die Profillinie des Geländes in der y-z-Koordinatenebene kann für $2{,}5 \leq y \leq 10{,}0$ näherungsweise durch den Graphen der Funktion f mit $z = f(y) = 0{,}5 + 0{,}2 \cdot \cos(1{,}5 - y) + 0{,}7 \ln(y - 2)$ $(y \in \mathbb{R})$ beschrieben werden. Die erste Ableitung der Funktion f ist durch
$z' = f'(y) = \dfrac{0{,}7}{y-2} \cdot \sin(y - 1{,}5)$ $(y \in \mathbb{R})$ gegeben.
Eine in der y-z-Koordinatenebene liegende Laufspur soll durch einen Teil des Graphen einer ganzrationalen Funktion g beschrieben werden. Folgende Bedingungen müssen dabei erfüllt sein:
Die Laufspur geht in einer Höhe von 30,00m über der x-y-Koordinatenebene tangential in die Profillinie des Geländes und im Koordinatenursprung tangential in die y-Achse über.
Begründen Sie, dass die Funktion g mindestens dritten Grades sein muss. Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

In der Lausitz befindet sich ein großes Braunkohlerevier. Um die kohleführende Schicht frei zu legen, wird der darüber liegende Abraum von Eimerkettenbaggern aufgenommen.

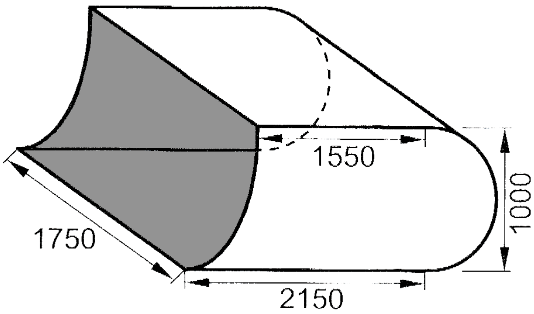


Abbildung 2: (nicht maßstäblich)

a) Die Abbildung 1 (Längeneinheit 1 mm) stellt vereinfacht einen Eimer des Baggers dar. Die vordere und hintere Seitenfläche sind kongruent, parallel zueinander und werden jeweils durch zwei Strecken, einen Halbkreis bzw. einen Teil einer quadratischen Parabel begrenzt. Diese Parabel geht ohne Knick in die gedachte Verlängerung einer der beiden Strecken über.
Für die Bearbeitung der Oberfläche des Eimers ist die Kenntnis des Inhalts der vorderen Seitenfläche erforderlich.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Die Eimer des Baggers sind an einer Kette befestigt, die über einen 30 Meter langen Ausleger senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung $\overline{AB}$ läuft (siehe Abbildung 3).

Der Bagger bewegt sich auf der Strecke $\overline{AB}$ vor und zurück. Dabei trägt er Schicht für Schicht des Abbaubereichs $ABT_\alpha S_\alpha$ ab.

In einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) besitzen die Punkte A und B die Koordinaten $A(600 \mid 500 \mid 0)$ und $B(200 \mid 500 \mid 0)$.
Zur Vereinfachung wird der Ausleger als Strecke angesehen. Der Ausleger ist parallel zur y-z-Koordinatenebene um einen Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 50°$ schwenkbar. Für jeden Winkel α liegt der Abbaubereich $ABT_\alpha S_\alpha$ in einer Ebene E.
Für $\alpha = 0°$ liegt diese Ebene E_α in der x-y-Koordinatenebene.

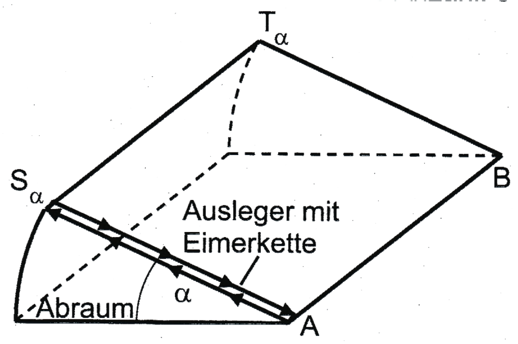


Abbildung 3: (nicht maßstäblich)

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S_α.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene E_α, an.
Zur Kontrolle des Abbaus werden die Koordinaten von Messpunkten M_α bestimmt, welche in der Ebene E_α liegen.
Ermitteln Sie den Winkel α des Auslegers, wenn der Messpunkt die Koordinaten $M_\alpha(350 \mid 480 \mid 15)$ besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Lösungsvorschläge

Teil A - mit CAS

a) Abszisse des lokalen Minimumpunktes: $x_{Min} = 0$
(Wechsel von fallend zu steigendem Graphen, heißt Durchgang der Ableitungsfunktion durch die x-Achse von „unten“ nach „oben“)
Begründung für Abszisse des lokalen Minimumpunktes
Monotonieintervall mit Begründung: wachsend für $0 \le x \le 1.5$, da Ableitung dort positiv ist
Anzahl der Wendestellen mit Begründung: zwei Wendestellen, denn die Kurve wechselt von Rechtskurve nach Linkskurve bei ca. 1.5 und dann wieder zu Rechtskurve bei 2.5 etwa

b) Abszisse des lokalen Maximumpunktes: $f_k'(x) = \left(12\cdot k\cdot x - 18\cdot k^2\cdot x^4\right)e^{-kx^3} = 6\cdot k\cdot x\cdot\left(2 - 3\cdot k\cdot x^3\right)e^{-kx^3}$
dabei gilt $f_k'(0) = 0$, das ist nach a) der Minimumpunkt und für $2 - 3kx^3 = 0$ ergibt sich die angegebene Minimumstelle; die Ordinate folgt aus $f_k\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3k}}\right)$
Art des Extrempunktes: ergibt sich aus der gegebenen Abbildung bzw. aus der 2. Ableitung

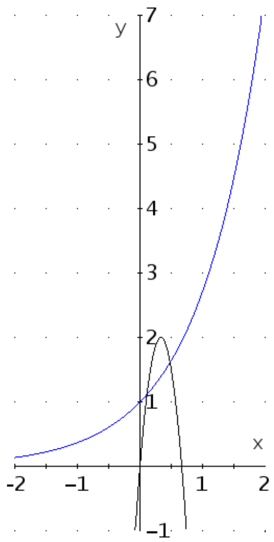
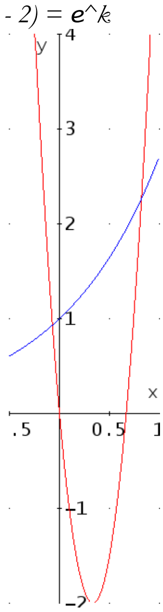


Abbildung 4:

$f_k''(x) = \left(54\cdot k^3\cdot x^6 - 108\cdot k^2\cdot x^3 + 12\cdot k\right)e^{-kx^3}$ und
$f_k''\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3k}}\right) = -36\cdot k\cdot e^{-\frac{2}{3}} < 0$
CAS: `dif(f(x,k),x,2)|x=(2/3k)^(1/3)` → `-36ke^(-2/3)`
Ordinate des lokalen Maximumpunktes
Wert für k: k=32, folgt aus $1 = \sqrt[3]{\frac{\ln 2}{k}}$
eine Gleichung der Funktion g: z. B. $g(x) = 4\frac{e^{-\frac{2}{3}}}{x}$

c) mit GTR: *muss von Hand gerechnet werden*
Nachweis für Anstieg der Tangente t_k: $m = f_k'(1)$ (siehe b))
Nachweis für Achsenabschnitt: $n = f(1) - f_k'(1)\cdot 1$
Ansatz für einen Wert für k:
falls n = 0 ist, ergibt sich kein Dreieck ⇒ k = -1/3 oder falls m = 0 ⇒ k = -2/3 *- 6 ·k ·(3 ·k - 2) = **e**^k*
ein Wert für k: $k_1 = 1/3$ oder $k_2 = 2/3$
zweiter Wert für k
Ansatz für Gleichschenkligkeit: dann sollte $t_k(x)$ zum Beispiel den Anstieg 1 haben: → k = 0.1120; k = 0.4795 oder Anstieg -1 → k = 0.8205; k = 6.5381
GTR: `solve(-6·k·e^(-k)·(3·k-2)-1,k,0.5)`
Näherungswert für einen Wert für k:
z. B. k ≈ 0,11 oder k ≈ 0,48; k ≈ 0,82; k ≈ 6,54



d) Ansatz für Flächeninhalt: `solve(int(f(x,k),x,0,c)=1,c,real)`
oder GTR: *geht nicht – muss von Hand gerechnet werden*
Abhängigkeit: $c = \sqrt[3]{\frac{\ln 2}{k}}$
Ansatz für Inhalt der Fläche: $\int_0^c f_k(x)\,dx = 2 - 2e^{-c^3\cdot k}$ mit $\lim_{c\to\infty} e^{-c^3\cdot k} = 0$
Inhalt der Fläche: A=2

e) grafische Darstellung (2 BE)
Flächeninhalte der beiden Trapeze (2 BE)
es reicht, wenn die nicht überdeckten Dreiecke gleich groß sind: $2 \cdot F_{\Delta grün} = u \cdot f_{1/12}(u)$ und
$2 \cdot F_{\Delta rot} = (2 - u) \cdot (f_{1/12}(2) - f_{1/12}(u))$
`NSOLVE(u·f(u,1/12)=(2-u)·(f(2,1/12)-f(u,1/12)),u,0,2)`
$\rightarrow$ 1.04035
Näherungswert für u: $u \approx 1{,}04$

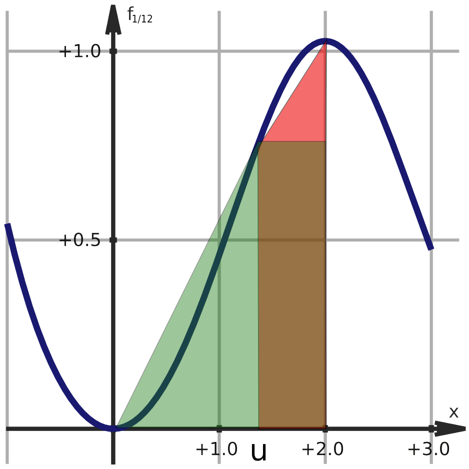


Abbildung 5: zwei Trapeze

Teil A – ohne CAS

alles andere wie oben

b) Nullstelle: $x_0 = 0$
Ansatz für erste Ableitung: Produktregel
erste Ableitung: siehe oben
Abszisse des lokalen Maximumpunktes: $x_{max} = \sqrt[3]{\frac{2}{3k}}$
Wert für k: k=2/3

Teil B

a) Ansatz: z. B.: GTR prgmGeometri | Ebene | Eingabe der Punkte A, B und D_0
CAS – z. B. Normalenform A:=[-8,9,1] usw.: `dotP(A-[x,y,z],crossP(B-A,D₀-A)=0`
eine Gleichung der Ebene E: $x - 4 \cdot y + 8 \cdot z + 36 = 0$
Nachweis: C in E $\Rightarrow$ z = -2

b) eine Gleichung von g: $\overrightarrow{OD_k}\begin{pmatrix} 8+16\cdot k \\ -1-10\cdot k \\ -6-7\cdot k \end{pmatrix}$ anders aufgeschrieben: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -10 \\ -7 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$
vollständiger Nachweis (3 BE)
$A = D_{-1}$ und $g_{BC} \cap g = (0 \mid 4 \mid -2.5)$ für k = -½
ein Wert für k: $k_1 = -1$ oder $k_2 = -½$

c) Ansatz für Werte für k (2 BE): $\overrightarrow{BD_k} \cdot \overrightarrow{CD_k} = 0 \Rightarrow 405 \cdot k^2 + 405 \cdot k + 81 = 0 \Rightarrow k_{½} = -½ \pm \sqrt{5}/10$
Näherungswerte für k: $k_1 \approx -0{,}72$ und $k_2 \approx -0{,}28$

d) Ansatz für Koordinaten eines Punktes F: $\overrightarrow{OF_{½}} = \overrightarrow{OB} \pm 3 \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
Koordinaten eines Punktes F: $F_1 = \left(-\frac{11}{3} \middle| \frac{2}{3} \middle| -\frac{1}{3}\right)$ oder $F_2 = \left(-\frac{13}{3} \middle| \frac{10}{3} \middle| -\frac{17}{3}\right)$
vollständige Beschreibung (2 BE): Ich berechne mit Hilfe des Skalarprodukts die Winkelgröße. Es ergibt sich der Winkel als Funktion in Abhängigkeit von k etwa in der Form α = arccos(g(k)). Dann bestimme ich das Minimum für diese Funktion in Abhängigkeit von k.

Teil C

a) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: Schüsse sind binomialverteilt b(n,p,k)
Wahrscheinlichkeit: $p \approx .3741 = b(5,.9,4) \cdot b(5,.95,5) + b(5,.95,4) \cdot b(5,.9,5)$

b) Wahrscheinlichkeit: $P(X=0) \approx 0{,}7403 = .995^{60}$
Ansatz für Mindestanzahl der Packungen: verwende kumulierte Binomialverteilung: B(n,p,k)
$1 - B(n,.005,1) < .95 \Rightarrow .05 < B(n,.005,1)$; n ist die Anzahl der untersuchten Patronen
B(946,.005,1)= 0.050186 und B(947,.005,1)= 0.04998
CAS: `tistat.binomcdf(946,.005,0,1)` $\rightarrow$ .050186
Mindestanzahl der Packungen: 16 3 BE

c) Ansatz für Wahrscheinlichkeiten:
$p_z = .003$; $p_h = .0022$; treten vermutlich unabhängig voneinander auf
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: $P(A) \approx 0{,}0909$
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B: $P(B) \approx 0{,}0002$

d) Ansatz für Wahrscheinlichkeit:
CAS: `tistat.normCdf(1.59,1.63,1.62,.02)` $\longrightarrow$ .6247
Wahrscheinlichkeit: $P(1{,}59g < X < 1{,}63g) \approx 0{,}6247$

Teil D1

a) Begründung für Breite: 2.75 m * 30 Bahnen / 50 m = 1.65 < 2.20 in y-Richtung
Begründung für Länge: in x-Richtung 1.70 - .10 = 1.60 entspricht 80m länge

b) Ansätze für Koordinaten der Punkte G und H (2 BE): $5500m^2 \triangleq 2{,}20$; Länge der Tribüne l = 1,00;
Richtungen: $x = -.10 - \cos(30°)$; $z = .05 + \sin(30°)$, rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse l
Koordinaten des Punktes G: G(-,97 | -,20 | ,55)
Koordinaten des Punktes H: H(-,97 | -2,40 | ,55)

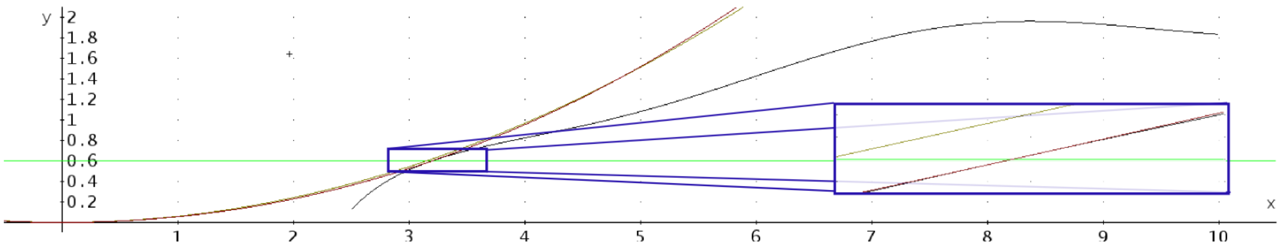
c) Begründung: $30m \triangleq .6$; Eine Parabel müsste folgende Gleichungen erfüllen

I:	$p(y,a) = ay^2$	tangential im Koordinatenursprung
II:	$p'(3.1952,a) = f'(3.1952)$	tangential im Punkt P(3.1952 | .6)

es ergibt sich: $a \approx .060595$ und mit $p(3.1952, .060595) \approx .61863 \triangleq 31m$ Höhe;
das ist zu hoch bzw. in der richtigen Höhe zu flach
Ansatz für eine Gleichung der Funktion g (2 BE):

I:	$q(y,a,b,c) = ay^3 + by^2 + cy + 0$	durch Koordinatenursprung
II:	$q'(0,a,b,c) = 0$	tangential im Koordinatenursprung $\Rightarrow c = 0$
III:	$q(3.1952,a,b,0) = .6$	durch P
IV:	$q'(3.1952,a,b,0) = f'(3.1952)$	tangential in P

`[a = 0.001142 ∧ b = 0.05512]`
eine Gleichung der Funktion g: z. B. $z = g(y) = 0{,}001y^3+0{,}055y^2$
Abbildung 6: Profillinie mit Parabel (braun) und g(y) (rot)



Teil D2

a) Ansatz für eine Gleichung der Parabel: z. B.: $1000 = a\,600^2$
eine Gleichung der Parabel: $y = x^2/360$
Ansatz für Inhalt einer Seitenfläche (2 BE):
$A_{Parabel} + A_{Rechteck} + A_{Halbkreis} = 600^3/3/360 + 1550 \cdot 1000 + \pi/2 \cdot 500^2 = .2 + 1.55 + .393$
Inhalt einer Seitenfläche: $A \approx 2{,}14m^2$

b) Ansatz für Koordinaten von S_α
Koordinaten von : $S_\alpha(600 \mid 500 - 30\cos\alpha \mid 30\sin\alpha)$ $(0° \le \alpha \le 50°)$
eine Gleichung der Ebene E_α: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \kappa \cdot \overrightarrow{AS_\alpha}$

Ansatz für Größe des Winkels α: $\begin{pmatrix}350\\480\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}600\\500\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}400\\0\\0\end{pmatrix} + \kappa\begin{pmatrix}0\\-30\cos\alpha\\30\sin\alpha\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \approx 36{,}87°$

Größe des Winkels: $\alpha \approx 37°$