Schriftliche Abiturprüfung – Grundkursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2008, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@gymnasium-delitzsch.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 24.04.09.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt 24**0 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 25 BE,
im Teil B 15 BE,
im Teil C 15 BE,
im Teil D 15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System
- Tabellen- und Formelsammlung (im Unterricht eingeführt, ohne ausführliche Musterbeispiele)
- Zeichengeräte

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
60 BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und f' durch
$y = f(x) = e \cdot x \cdot \ln(x)$ $(x \in \mathbf{D}_f)$ und $f'(x) = e \cdot (\ln(x) + 1)$ $(x \in \mathbf{D}_{f'})$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an.
Begründen Sie, dass die Funktion f genau eine Nullstelle hat.
Geben Sie diese Nullstelle an.
Zeigen Sie, dass f' die erste Ableitungsfunktion der Funktion f ist.
Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen der Funktion f und weisen Sie die Art des Extremums nach.
Begründen Sie, dass der Graph der Funktion f keinen Wendepunkt besitzt.
Erreichbare BE-Anzahl: 10

b) Es gibt genau eine Tangente an den Graphen der Funktion f, die parallel zur Geraden mit der Gleichung$y = 2 \cdot e \cdot x + 5$verläuft.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes, in dem diese Tangente den Graphen der Funktion f berührt. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $S_x(1;0)$ und die Senkrechte zu dieser Tangente in S_x begrenzen mit der y-Achse ein Dreieck vollständig.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Der Graph der Ableitungsfunktion f', die Geraden x = 1 und x = e sowie die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Erreichbare BE-Anzahl: 4

e) Der Graph der Funktion f soll im Intervall $\frac{1}{e} \leq x \leq 1$ durch den Graphen einer quadratischen Funktion q angenähert werden. Der Graph von q verläuft durch den Punkt $S_x(1 \mid 0)$ und hat den Scheitelpunkt $S\left(\frac{1}{e}\middle| -1\right)$.
Ermitteln Sie die Stelle, an der die Differenz der zugehörigen Funktionswerte der beiden Funktionen f und q im angegeben Intervall am größten ist. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte P(6 | -5 | 0), Q(2 | -1 | 0), R(1 | -3 | 0) und T(1 | -2 | 5) gegeben.

a) Zeigen Sie, dass durch die Punkten P, R und T eine Ebene E eindeutig bestimmt ist.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in allgemeiner Form an. Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Untersuchen Sie, ob der Punkt A(-1 | -4 | 15) auf der Geraden durch die Punkte Q und T liegt.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Die Strecke $\overline{PQ}$ ist der Durchmesser eines in der x-y-Ebene liegenden Kreises k.
Bestimmen Sie eine Gleichung des Kreises k.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Berührungspunktes einer Tangente an den Kreis k, die parallel zur Geraden durch die Punkte P und Q ist. Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Gegeben ist ein Prisma PQRSTU mit dem Dreieck PQR als Grundfläche. Die Strecke $\overline{PS}$ ist eine Kante des Prismas.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte S und U.
Berechnen Sie das Volumen dieses Prismas.
Begründen Sie, dass die y-z-Koordinatenebene das Prisma nicht in zwei Teilkörper teilt.
Erreichbare BE-Anzahl: 7

Teil C: Stochastik

Für den Tag der offenen Tür an ihrem Gymnasium planen Schüler ein Glücksspiel. Der Erlös soll gespendet werden.
Es wird ein Kartenspiel mit je vier weißen, gelben, roten, grünen und blauen Karten mit neutraler Rückseite verwendet. Die Karten jeder Farbe sind jeweils mit genau einer der Zahlen 1, 2, 3 oder 4 unterschiedlich nummeriert.
Das Spiel besteht darin, aus dem vollständigen und gut gemischten Kartenstapel, der mit der Rückseite nach oben liegt, drei beliebige Karten nacheinander ohne Zurücklegen zu entnehmen.

a) Geben Sie an, wie viele Möglichkeiten es gibt, drei Karten mit verschiedenen Farben zu ziehen, wenn die Reihenfolge der gezogenen Karten keine Rolle spielt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, drei Karten mit gleicher Nummer zu ziehen.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

Für einen Gewinnplan wird zunächst ein Einsatz von einem Euro erwogen. Für jede rote unter den gezogenen Karten wird ein Euro ausgezahlt.

b) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der pro Spiel gezogenen roten Karten an.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.
Untersuchen Sie, ob der Spieler nach diesen Regeln auf lange Sicht einen Gewinn erzielt.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

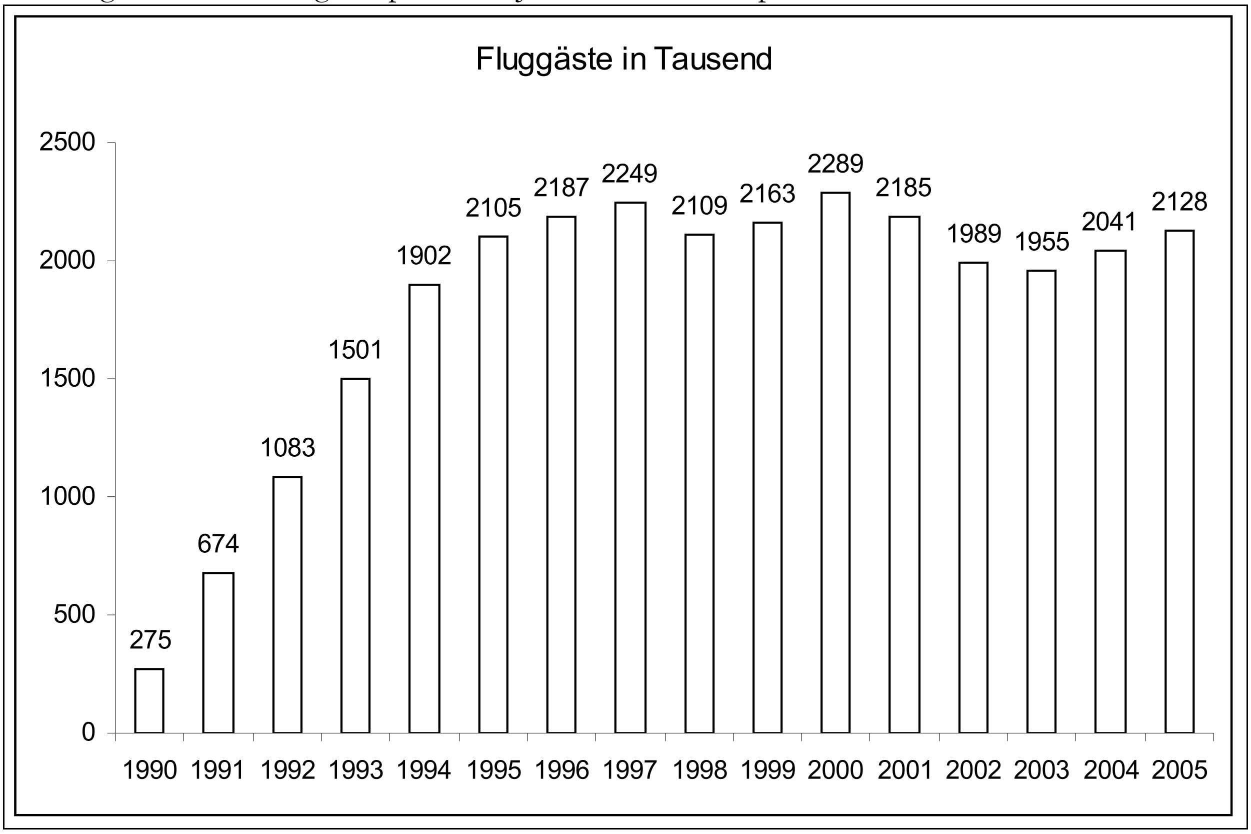
c) Ein Spieler gewinnt bei diesem Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von circa 8,77 %.
Berechnen Sie unter Angabe von Zwischenschritten, wie oft ein Besucher mindestens spielen müsste, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % mindestens einmal gewinnt.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1

Ein Lehrer erarbeitet Aufgaben zum Thema Funktionen für die Schüler seines Grundkurses Mathematik. Anlässlich des 80. Geburtstages des Flughafens Halle-Leipzig entnimmt er den entsprechenden Internetseiten Angaben zur Entwicklung des jährlichen Fluggastaufkommens.
In der folgenden Abbildung entspricht das Jahr 1990 dem Zeitpunkt $t = 0$.



a) Für den Zeitraum 1990 bis 1994 legt er ein lineares Wachstumsmodell zu Grunde.
Begründen Sie, dass die Annahme eines linearen Wachstumsmodells für diesen Zeitraum sinnvoll ist.
Ermitteln Sie eine Gleichung einer dafür geeigneten linearen Funktion.
Im Jahr 1992 wurde aus den Wertepaaren von 1990 und 1991 unter Annahme von linearem Wachstum eine Prognose erstellt.
Berechnen Sie die Abweichung der Fluggastzahl dieser Prognose zum tatsächlichen Wert für das Jahr 1994.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

Für den gesamten Zeitraum ist ein lineares Wachstumsmodell offensichtlich nicht sinnvoll. Der Lehrer legt deshalb für die Entwicklung der Fluggastzahlen ein neues Funktionsmodell zugrunde, das durch

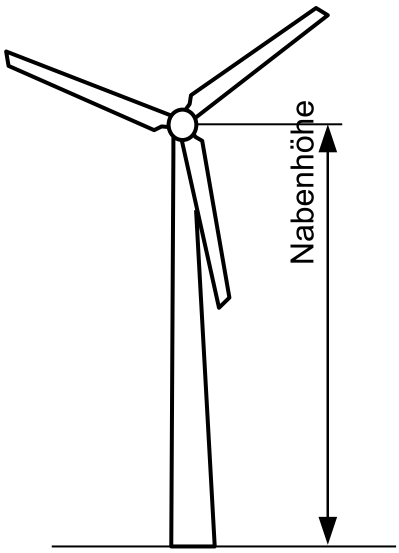
die Funktion f_a mit $f_a(t)=\frac{a}{1+7{,}0102\cdot e^{-0{,}9479\cdot t}}$ $(t\in\mathbb{R}, t\geq 0; a>0)$ beschrieben wird.

b) Ermitteln Sie den Wert a so, dass die Zahl der Fluggäste zum Zeitpunkt t = 0 (Jahr 1990) erfüllt wird.
   Begründen Sie, dass bei diesem Modell ein Grenzwert existiert, über den die Anzahl der Fluggäste nicht hinausgeht. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Zeigen Sie, dass die Funktion f_a monoton wächst und damit positives Wachstum beschreibt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Aufgabe 2

In der Nähe von Ökostadt wurde eine neue Windkraftanlage errichtet. Für Untersuchungszwecke wird für die Umgebung des Windrades ein Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 1 m) mit der x-y-Ebene als Landschaftsoberfläche so festgelegt, dass sich der Fußpunkt des Windrades im Punkt F(0 | 0 | 0) befindet. Der Mast des Windrades verläuft entlang der z-Achse.



Zeichnung 1: nicht maßstäblich

a) Die theoretische Leistung P_{theor} (in Watt) einer Windkraftanlage kann mit der Gleichung $P_{theor}=\frac{1}{2}A\cdot\varrho\cdot v^3$ berechnet werden

   ϱ = 1,29: Dichte der Luft in $\frac{kg}{m^3}$;

   A: Inhalt der Kreisfläche in m², die der Rotor bei Rotation überstreicht;

   v: Windgeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$.

   Die theoretische Leistung des Windrades bei einer Windgeschwindigkeit von $11{,}5\frac{m}{s}$ beträgt $2{,}96\cdot 10^6$ Watt.

   Berechnen Sie die Länge eines Rotorblattes. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Die Nabenhöhe (siehe Abbildung) eines solchen Windrades beträgt 68,5 m.

b) Zu einem Beobachtungszeitpunkt strahlt die Sonne aus Richtung $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3{,}0\\-2{,}0\\-1{,}0\end{pmatrix}$.

   Geben Sie den Einstrahlungswinkel der Sonne bezüglich der Landschaftsoberfläche an.
   Berechnen Sie die Länge des Schattens, den das Windrad vom Fußpunkt bis zur Nabe wirft (die räumliche Ausdehnung der Nabe wird vernachlässigt). Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Untersuchungen von Ökologen haben gezeigt, dass die Projektion des Flugkorridors für Fledermäuse in die x-y-Ebene ein 500 m breiter Streifen ist, dessen Mittellinie durch die Gerade mit der Gleichung5 x + 7 y = 2 500beschrieben werden kann.
   Zeigen Sie, dass diese Windkraftanlage nicht in diesem Flugkorridor liegt. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Lösungsvorschläge

Teil A

a) Definitionsbereich: $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$
Begründung
Nullstelle
Nachweis für erste Ableitung (2 BE)
Koordinaten des Extrempunktes: $P_{Min}\left(\frac{1}{e}\middle|-1\right)$ (2 BE)
Nachweis der Art des Extremums (2 BE)
Begründung

b) Ansatz
Koordinaten des Berührungspunktes: $P(e \mid e^2)$ (2 BE)

c) Ansatz für Flächeninhalt (2 BE)
Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}\cdot(e + 1/e)$

d) Ansatz
eine Stammfunktion
Anwendung des Hauptsatzes
Flächeninhalt: $A = e^2$

e) Ansatz für eine Gleichung von q (2 BE)
eine Gleichung für q: z. B. $q(x) = 2{,}50x^2 - 1{,}84x - 0{,}66$ ($x \in \mathbb{R}$)
Ansatz für Differenz der Funktionswerte
Stelle: $x_d \approx 0{,}77$

Teil B

a) Nachweis
eine mögliche Gleichung der Ebene E: $2x + 5y - z + 13 = 0$

b) Geradengleichung
Schlussfolgerung: Der Punkt A liegt auf der Geraden.

c) Ansatz für Kreisgleichung
Gleichung des Kreises k: $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 8$
Ansatz für Koordinaten eines Berührungspunktes
Koordinaten eines Berührungspunktes: $B1(6 \mid -1 \mid 0)$ oder $B_2(2 \mid -5 \mid 0)$

d) Ansatz für Punkte der Deckfläche
Koordinaten von U: $U(0 \mid -4 \mid 5)$
Koordinaten von S: $S(5 \mid -6 \mid 5)$
Ansatz für das Volumen
Volumen: $V = 30$
Begründung (2 BE)

Teil C

a) Anzahl: 10
Ansatz für Wahrscheinlichkeit
Wahrscheinlichkeit: $p \approx 0{,}0351$

b) Werte der Zufallsgröße
eine Wahrscheinlichkeit

k	0	1	2	3
P(X=k)	0,4912	0,4211	0,0842	0,0035

vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung:
Gewinn: -0,40 €

c) Ansatz
Angabe von Zwischenschritten
Ergebnis: mindestens 8 Spiele

Teil D1

a) Begründung (2 BE)
Ansatz für Gleichung
Gleichung: z. B.n = 407 t + 275 (in Tausend)
Abweichung: z. B. 31000

b) Ansatz für Wert a
Wert a: $a \approx 2{,}2 \cdot 10^6$
Begründung

c) Nachweis (2 BE)

Teil D2

a) Ansatz für die Länge (2 BE)
Länge des Rotors: l = 31 m

b) Einstrahlungswinkel: $\alpha = 15{,}5°$
Geradengleichung
Ansatz für Schattenlänge
Schattenlänge: s = 247 m

c) Ansatz für Abstand der Geraden zum Fußpunkt
Abstand: 291 m
Schlussfolgerung