Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2007, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@gymnasium-delitzsch.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 08.06.07.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 25 BE,
im Teil B 15 BE,
im Teil C 10 BE,
im Teil D 10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- 1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
- 1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
- Zeichengeräte
- beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“[1]

Bewertungsmaßstab

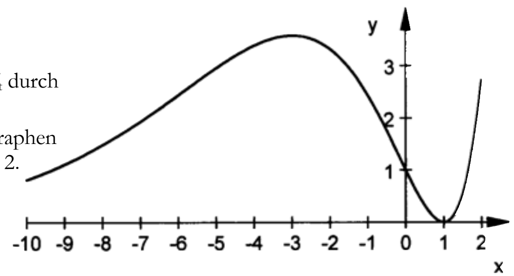
Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
60 BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jedes t ($t \in \mathbb{R}, t > 0$) ist eine Funktion f_t durch $y=f_t(x)=e^{tx}\,(x-1)^2$ ($x \in \mathbb{R}$) gegeben.



a) Nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f_t im Intervall $-10 \leq x \leq 2$. Geben Sie für die zugehörige erste Ableitungsfunktion f_t' im vorgegebenen Intervall an:
   1. Näherungswerte für die Nullstellen,

1 Diese werden hier nicht wiedergegeben. Sie enthalten zumeist eine Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Manchmal eine Tabelle zur Summenfunktion der Binomialverteilung. Beides kann durch Verwendung des GTR leicht ersetzt werden. Die Tabellen finden Sie im Inhalt der Online-Ausgabe dieses Textes www.sn.schule.de/~matheabi.

Winkel β ausfallender Strahl: $\tan\beta = \lim\limits_{m_r\to\infty}\left(\dfrac{m_r+\dfrac{1}{2ab}}{1-\dfrac{m_r}{2ab}}\right) = -2ab$ ⇒ α = β, wenn der reflektierte Strahl parallel zur y-Achse verläuft)

Ansatz für Anstieg der Tangente: $m_t = 2ab$
Anstieg der Tangente an f_a im Punkt B_a
Anstieg der Normale an f_a im Punkt B_a
vollständiger Nachweis (4 BE):
z. B. Ansatz für Spiegelpunkt (2 BE)
Abszisse eines Spiegelpunktes
Schlussfolgerung

b) Ansatz für Wahrscheinlichkeit (2 BE): Normalverteilung mit μ = 700 und σ = 80
GTR: `normalcdf(800,1EE99,700,80)` → 10,56%
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses: P(L>800) ≈ 0,1056

Teil D2

a) Für t = 100 ⇒ Koordinaten des Punktes B: B(600 | 400 | 0)
Begründung: aufgrund der kongruenten Seitenflächen und der Rechtwinkligkeit zu der x- und y-Achse, ergibt sich C
Ansatz für Volumen:
$A_G = 600^2 - \frac{1}{2}200^2$ (Quadrat ohne rechtwinkliges Dreieck) und
analog $A_D = \frac{1}{16}A_G$; h = 900
$$V = \frac{h}{3}\left(A_G + \sqrt{A_G\cdot A_D} + A_D\right) = \frac{7}{16}\,h\,A_G$$
Volumen: V ≈ 134 dm³

Abbildung 4

b) Variante I: siehe Abbildung 4 - offensichtlich sind die beiden eingezeichneten Dreiecke nicht kongruent. Zwar haben sie eine gemeinsame Seite und der gegenüberliegende Winkel beträgt 90°, jedoch ist der markierte Winkel unterschiedlich.
Variante II: Es lässt sich zeigen $h^* = \frac{5}{6}\sqrt{2}\cdot h$
Variante III: Ansatz für Koordinaten des Punktes K
Koordinaten des Punktes K: K(700 | 466,7 | 0)
Nachweis

c) Lösungsidee: Der zur Verfügung stehende Bereich ist ein Quadrat. Ein möglichst großes Rechteck ist dann auch ein Quadrat. Alles Weitere lässt sich der Skizze entnehmen.
Koordinaten eines Eckpunktes: z. B. $P_1(550 \mid 300 \mid 0)$, $P_2(300 \mid 550 \mid 0)$, $P_3(50 \mid 300 \mid 0)$ oder $P_4(300 \mid 50 \mid 0)$
Koordinaten eines benachbarten Eckpunktes

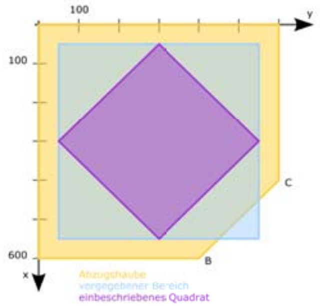


Abbildung 5

2. alle Argumente, für welche – x die Funktionswerte $f_t'(x)$ negativ sind,
3. die Anzahl der Extremstellen. Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Es existiert genau eine Wendetangente an den Graphen der Funktion f_2' die mit dem Graphen von f_2 eine Fläche vollständig begrenzt.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Inhalt dieser Fläche. Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Der Graph der Funktion f_t besitzt außer dem lokalen Minimumpunkt $P_{MIN}(1 \mid 0)$ genau einen lokalen Maximumpunkt.
Die lokalen Maximumpunkte aller Funktionen f_t liegen auf dem Graphen einer Funktion g.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g. Erreichbare BE-Anzahl: 6

d) Zeigen Sie durch Integration, dass die Funktion F_2 mit $F_2(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(x^2 - 3x + 5/2)$ eine Stammfunktion der Funktion f_2 ist.
Der Graph der Funktion f_2 und die Koordinatenachsen begrenzen im ersten Quadranten eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten den Inhalt dieser Fläche.
Erreichbare BE-Anzahl: 6

e) Die lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f_3 und der Schnittpunkt dieses Graphen mit der Ordinatenachse sind Eckpunkte eines Dreiecks.
Es gibt mehrere Möglichkeiten, dieses Dreieck durch einen weiteren Punkt zu einem Parallelogramm zu ergänzen.
Ermitteln Sie die Koordinaten eines solchen Punktes. Erreichbare BE-Anzahl: 3

f) Für jedes t ($t \in \mathbb{R}, t > 0$) ist eine Funktion h_t mit $h_t(x) = e^{tx}$ ($x \in \mathbb{R}$) gegeben.
Für jeden Wert t existiert genau ein Wert u, für den die Differenz der Funktionswerte $h_t(x) - f_t(x)$ an der Stelle x = u ($u \in \mathbb{R}, 0 < u < 2$) maximal wird.
Ermitteln Sie den Wert t, für den u = 3/2 ist. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O sind die Punkte B(3 | 0 | 0) und E(0 | 0 | 8) sowie für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, a > 0) die Punkte) $C_a(3 \mid a \mid 0)$ und $D_a(0 \mid a \mid 0)$ gegeben.
Das Rechteck OBC_aD_a ist die Grundfläche des Quaders $OBC_aD_aEFG_aH_a$.
Die Punkte M sind Mittelpunkte der jeweils angegebenen Kanten (siehe Skizze).

a) Ermitteln Sie den Oberflächeninhalt des Quaders.
Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten einen Wert a, für den sich die Raumdiagonalen des Quaders durch die Punkte B und H_a bzw. E und C_a unter einem Winkel von 60° schneiden. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Die Mittelpunkte $M_{\overline{OE}}$, $M_{\overline{BC_a}}$ und $M_{\overline{D_aH_a}}$ sind Eckpunkte der Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $M_{\overline{FG_a}}$.

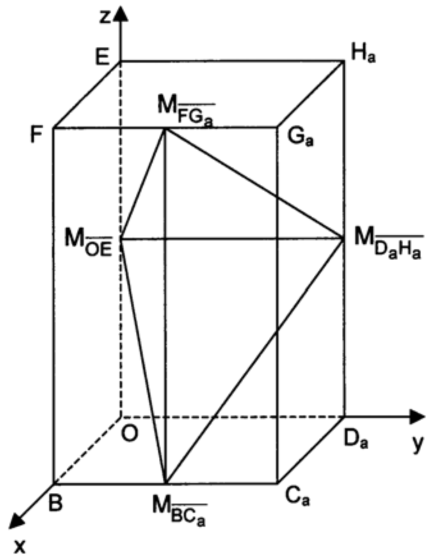


Abbildung 1: Skizze (nicht maßstäblich)

b) Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide für a = 1.
Begründen Sie, dass für jeden Wert a die Höhe

der Pyramide $\frac{24}{5}$ beträgt.
Berechnen Sie den Wert a, für den das Volumen der zugehörigen Pyramide 20 beträgt.
Erreichbare BE-Anzahl: 7

c) Es gibt Werte a, für die auf der Kante $\overline{D_a H_a}$ Punkte existieren, deren Abstand von $M_{\overline{OE}}$ genau so groß ist wie der Abstand von $M_{\overline{BC_a}}$ zu $M_{\overline{OE}}$.
Ermitteln Sie alle Werte a, für die derartige Punkte existieren. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil C: Stochastik

Die Firma "Lecker" stellt Schokolade her. Die Tafeln werden in Kartons zu je 12 Stück verpackt. Erfahrungsgemäß gehen 2 % der Tafeln zu Bruch.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Karton keine zerbrochene Tafel enthält.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass sich unter 120 Tafeln höchstens eine zerbrochene Tafel befindet. Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Berechnen Sie, wie viele Kartons mindestens kontrolliert werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % wenigstens eine zerbrochene Tafel zu finden. Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Eine Firma portioniert mit einem Automaten Schokolade zu Schokoladentafeln derart, dass die Masse der Tafeln annähernd normalverteilt ist mit dem Erwartungswert 105,0 g und der Standardabweichung 2,0 g.
Auf den Tafeln wird der PackungsInhalt mit 100 g ausgewiesen.
Berechnen Sie, bei wie viel Prozent der Tafeln die Masse unterhalb des angegebenen Wertes liegt,
Herr Schlank meint, der Automat sollte so eingestellt sein, dass mindestens bei 10 % der Tafeln die Masse kleiner als 100,0 g ist.
Ermitteln Sie, wie groß der Erwartungswert bei gleicher Standardabweichung höchstens sein dürfte, um dieses Ziel zu erreichen. Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) In letzter Zeit häufen sich die Beschwerden der Verkaufsstellen, die von der Firma "Lecker" beliefert werden. Sie beklagen, dass neben 2 % Bruch der Tafeln auch eingerissenes Papier der einzelnen Schokoladentafeln auftritt. Nach ihren Angaben sind nur noch 94 % der Tafeln unbeschädigt, also ohne eingerissenes Papier und ohne Bruch.
Der Kontrolleur ermittelt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % eingerissenes Papier auftritt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Tafel Schokolade mit eingerissenem Papier auch gebrochen ist. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil D: Wahlaufgaben

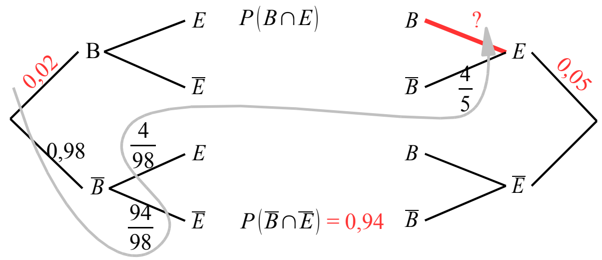
Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Wahlaufgabe 1

Parabolspiegel sind Hohlspiegel, die durch Drehung einer Parabel um ihre Symmetrieachse entstehen. Beim Parabolspiegel erfolgt die Reflexion einfallender Strahlen an der Oberfläche so, dass Einfallswinkel und Reflexionswinkel gleich groß sind.
Strahlen, die aus dem Brennpunkt F kommen, werden parallel zur Symmetrieachse reflektiert. Setzt man in den Brennpunkt eine punktfärmige Lichtquelle, so verlässt das Licht den Spiegel nahezu achsenparallel (siehe Skizze).

oder $\Phi\left(\frac{100-\mu}{2}\right) \geq 0.1 \Rightarrow$ `invNorm(.1)*2 + 100` und $\mu \leq 102.56$
Erwartungswert: $\mu \approx 102{,}5$ g

d) Ansatz für bedingte Wahrscheinlichkeit (2 BE)
Zufallsgrößen: B steht für Bruch und E für eingerissenes Papier
gegeben: P(B) = .02, P(E) = .05, $P(\overline{B} \cap \overline{E}) = .94$
Variante I:
$\Rightarrow P_{\overline{B}}(\overline{E}) = \frac{.94}{.98}$, $P_{\overline{B}}(E) = \frac{.04}{.98}$, $P(\overline{B} \cap E) = .04$,
mit Additionssatz folgt $P_B(E) = \frac{P(E) - P(\overline{B} \cap E)}{P(B)} = \frac{.1}{.2}$ und $P(B \cap E) = .01$
Hinweis: am Baumdiagramm ist der Rechenweg leicht nachzuvollziehen.
Variante II:



Variante III:
$P(\overline{B} \cap \overline{E}) = .94 \Rightarrow P(B \cup E) = .06$ und $P(B \cap E) = P(B) + P(E) - P(B \cup E)$
Bedingte Wahrscheinlichkeit: p = .2 = $P_E(B) = \frac{P(B \cap E)}{P(E)}$

Teil D1

a) Winkelbeziehungen scheinen nicht zum Ziel zu führen (vgl. Variante II)
→ Variante I: also Spieglung von F an der Normalen durch Punkt B: $f'_a(x) = 2ax$;
Normale an den Graphen (wie bereits in der Skizze zu sehen) $y = -\frac{1}{2ab}x + \left(ab^2 + \frac{1}{2a}\right)$;
Lotgerade durch Punkt F $y = 2ab \cdot x + \frac{1}{4a}$ und deren Schnittpunkt S: $x = \frac{ab^2 + \frac{1}{4a}}{2ab + \frac{1}{2ab}}$ ergibt nach etwas Bruchrechnung erstaunlicherweise $x = \frac{b}{2}$; damit muss die Abszisse des Spiegelpunktes F' bei x = b also genau über Punkt B liegen.
Variante II (Autor: D. Roth)
Anstiege der Normalen $m_n = -\frac{1}{2ab}$ und des einfallenden Strahles $m_e = ab - \frac{1}{4ab}$
Einfallswinkel α: $\tan\alpha = \frac{m_n - m_e}{1 + m_e \cdot m_n} = -2ab$

Teil B

a) Ansatz für Oberflächeninhalt
Oberflächeninhalt: $A_O(a) = 22a + 48$
Ansatz für Wert a (2 BE): $\cos 120° = \frac{\overrightarrow{BH_a}\cdot\overrightarrow{EC_a}}{|(\overrightarrow{BH_a})|\cdot|(\overrightarrow{EC_a})|}$ führt zu a_1
ein Wert a: $a_1=\sqrt{\frac{73}{3}}$ oder $a_2 = \sqrt{219}$

b) Ich verwende folgende Abkürzungen: $\overrightarrow{M_{\overline{OE}}M_{\overline{BC_a}}}=\vec b=\begin{pmatrix}3\\ \frac{a}{2}\\ -4\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{M_{\overline{OE}}M_{\overline{D_aC_a}}}=\vec c=\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}$

⇒ Normalenvektor der Grundfläche: $\vec b\times\vec c = a\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$ und $|\vec b\times\vec c|=5a$

Ansatz für Volumen: $V(a)=\frac{1}{3}\cdot h(a)\cdot A_G(a)$ mit $A_G(a)=\frac{1}{2}|\vec b\times\vec c|$ und

$h(a)=\left(\overrightarrow{OM_{\overline{FG_a}}}-\overrightarrow{OM_{\overline{OE}}}\right)\cdot\left(\frac{\vec b\times\vec c}{|\vec b\times\vec c|}\right)$ (Hesse) ⇒ $h(a)=\left(\begin{pmatrix}3\\ \frac{a}{2}\\ 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{a\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}}{5a}=\frac{24}{5}$ und V(a) = 4a

Volumen: V = 4
Begründung (2 BE): siehe oben
Ansatz für Volumen der Pyramide
Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von a
Wert a: a = 5

c) Abstand von $M_{\overline{OE}}$ zu $M_{\overline{BC_a}}$: $\sqrt{25+\frac{a^2}{4}}=|\vec b|$
Ansatz für Werte a: $|\vec b|\le\overline{M_{\overline{OE}}H_a}$ und $\overline{M_{\overline{OE}}M_{\overline{BC_a}}}=a\le|\vec b|$ ⇒ $\sqrt{12} \le a$ und $a \le 10/\sqrt{3}$
oder $\overline{D_aH_a}$: $\vec x=\overrightarrow{OD_a}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ mit $r\in\mathbb{R}\wedge 0\le r\le 8$;
Abstand $d(M_{\overline{OE}},\vec x)=\sqrt{a^2+(r-4)^2}$ und $d(M_{\overline{OE}},\vec x)=|\vec b|$
Werte a: $2\sqrt{3} \le a \le 10/3 \cdot\sqrt{3}$

Teil C

a) Wahrscheinlichkeit des Ereignisses: P(X=12) = 0,7847 = $b_{12;0.02}(0) = 0.98^{12}$
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses: P(Y≤1) = 0,3054 = $b_{120;0.02}(k\le1)$ = `binomcdf(120,.02,1)`
b) Ansatz für Anzahl der Kartons: $1-(1-.02)^n \ge .95$ ⇒ 149 Tafeln entsprechen 13 Kartons
oder: P(Karton=alle ganz) = 0,7847 (siehe a)) und $1-.7847^n \ge .95$ ⇒ n ≥ 12.36 Kartons
Anzahl: 13
c) Wahrscheinlichkeit des Ereignisses: p(Z<100) = 0,0062 = `normalcdf(-1EE99,100,105,2)`
Ansatz für den Erwartungswert:
`solve(normalcdf(-1EE99,100,X,2)-.1,X,100)` → 102.56

Für folgende Untersuchungen wird ein Schnitt eines Parabolspiegels als Teil des Graphen der Parabel $y = f(x) = a x^2$ ($x \in \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) betrachtet.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die von einem Brennpunkt $F\left(0\middle|\frac{1}{4a}\right)$ ausgehenden Strahlen in einem beliebigen Punkt $B_a(b \mid f_a(b))$ der Parabel f_a so reflektiert werden, dass sie auf zur Symmetrieachse parallelen Geraden liegen.
Erreichbare BE-Anzahl: 7

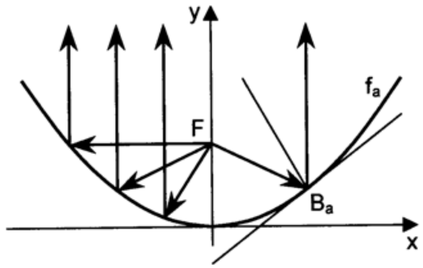


Abbildung 2: Skizze (nicht maßstäblich)

Parabolspiegel werden auch zur Herstellung von Fahrzeugscheinwerfern genutzt.

b) In diese Scheinwerfer werden Glühlampen mit einer durchschnittlichen Brenndauer von 700 Stunden eingebaut. Die Brenndauer dieser Glühlampen ist mit einer Standardabweichung von 80 Stunden annähernd normalverteilt.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Glühlampe eine Brenndauer von mehr als 800 Stunden hat.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

Wahlaufgabe 2

Nebenstehende Abbildung stellt den Abzugskamin eines Küchenherdes in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O dar (1 Längeneinheit entspricht 1 Millimeter).

Die Flächen ABCDO, AOIE und ODHI liegen jeweils in einer Koordinatenebene.

Der Kamin hat die Form eines schiefen Pyramidenstumpfes mit den zueinander parallelen Flächen ABCDO und EFGHI sowie den kongruenten Seitenflächen AOIE und ODHI.

Die zueinander kongruenten Seitenflächen ABFE und CDHG stehen jeweils senkrecht zur x-z- bzw. y-z-Koordinatenebene.

Die Punkte A und E besitzen die Koordinaten A(600 | 0 | 0) und E(150 | 0 | 900).

Die Punkte B und F liegen auf der Geraden g mit $\vec x=\begin{pmatrix}300\\200\\600\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$).

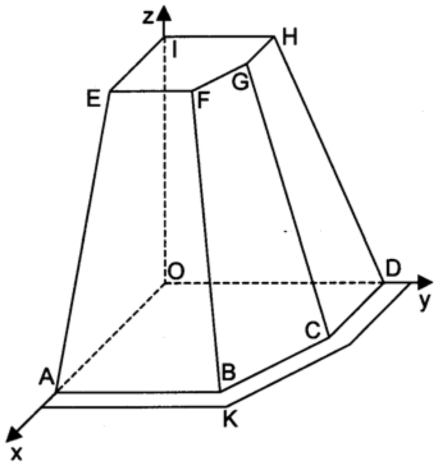


Abbildung 3: nicht maßstäblich

Die Materialdicke der Seitenflächen wird nicht berücksichtigt.

a) Geben Sie die Koordinaten des Punktes B an.
Begründen Sie, dass der Punkt C die Koordinaten C (400 | 600 | 0) besitzt.
Berechnen Sie das Volumen des Kamins.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Die Grundfläche wird durch drei in der x-y-Koordinatenebene liegende trapezförmige Streifen vergrößert, um eine Abstellfläche zu schaffen (siehe Abbildung).
Der Punkt K ist ein Eckpunkt dieser Abstellfläche und liegt auf der Verlängerung der Strecke $\overline{OB}$.
Zeigen Sie rechnerisch, dass nicht alle drei Trapeze die Höhe 100 mm haben.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

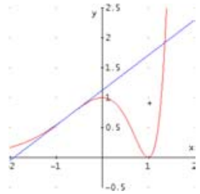
c) In der Grundfläche befindet sich für das Abzugsgebläse ein rechteckiger Ausschnitt. Eine Rechteckseite verläuft parallel zur Kaminkante BC und alle Eckpunkte des Rechtecks haben von den nächstliegenden Kanten $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ sowie $\overline{DO}$ jeweils einen Abstand von genau 50 mm. Ermitteln Sie unter der Bedingung, dass das Rechteck einen größtmöglichen Flächeninhalt hat, die Koordinaten zweier benachbarter Eckpunkte dieses Rechtecks. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Lösungsvorschläge

Teil A

a) Folgende Angaben sind aus dem Bild abzulesen: Nullstellen: $x_{N1} = -3$, $x_{N2} = 1$
Argumente: $-3 < x < 1$ (monoton fallender Bereich)
Anzahl der Extremstellen: 2: es gibt offensichtlich im Intervall zwei Wendepunkte – aber was ist mit den Rändern – also diese einbezogen gibt es 4 Extremstellen.

b) Abszisse des Wendepunktes: $x_W \approx -0{,}70711$
z. B. GTR: `fMax(nDerive(Y1,X,X),X,-5,0)` → -0.7071
Wendetangente: `Y2 ≈ 0.5869·x + 1.1235`
zweiter Schnittpunkt: `solve(Y2-Y1,X,2)` → 1.3568
Fläche: `fnInt(Y2-Y1,X,-0.7071, 1.3568)` → 1.2948
Ansatz für Inhalt der Flache (2 BE)
Näherungswert für Inhalt der Flache: A ≈ 1,3
Wer an dieser Stelle mehr rechnen möchte:
$f_t'(x)=e^{tx}\cdot(x-1)\cdot(tx-t+2)$, $f_t''(x)=e^{tx}\cdot(t^2x^2+2t(2-t)x+t^2-4t+2)$



c) erste Ableitung: $f_t'(x)=e^{tx}\cdot(x-1)\cdot(tx-t+2)$
Ansatz für Ermittlung der Extremstelle: tx – t + 2 = 0 *
Extremstelle
Koordinaten des lokalen Maximumpunktes: $P_{MAX}\left(\frac{t-2}{t}\middle|\frac{4}{t^2}\cdot e^{t-2}\right)$
Ansatz für eine Gleichung der Funktion g: aus * $t=\frac{2}{1-x}$ und Einsetzen in $y_{Max} = g(t)$
Gleichung der Funktion g: $g(x)=(1-x)^2\cdot e^{\frac{2x}{1-x}}$ $(x\in \boldsymbol{D_g})$

d) Ansatz für partielle Integration: $\int \underbrace{e^{tx}}_{u'(x)}\cdot\underbrace{(x-1)^2}_{v(x)}dx$
zweimalige partielle Integration (2 BE)
$\int e^{tx}\cdot(x-1)^2dx=\frac{1}{t}e^{tx}\cdot(x-1)^2-\frac{2}{t}\cdot\left(\frac{1}{t}e^{tx}(x-1)-\frac{1}{t^2}e^{tx}\right)$ | mit t=2
Umformungen
Ansatz für Flächeninhalt: A = F(1) - F(0)
Flächeninhalt: $A=\frac{e^2-5}{4}$

e) Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks: $P_{Min}(1 \mid 0)$, $P_{Max}\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{4}{9}e\right)$, $S_y(0|1)$
Ansatz für Koordinaten eines vierten Eckpunktes
Koordinaten eines vierten Eckpunktes: $P_1\left(\frac{2}{3}\middle|1-\frac{4}{9}e\right)$ oder $P_2\left(\frac{4}{3}\middle|\frac{4}{9}e-1\right)$ oder
$P_3\left(-\frac{2}{3}\middle|1+\frac{4}{9}e\right)$

f) Ansatz für Wert t (2 BE):
$d_t'(x)=-e^{tx}\cdot(t\cdot x+2\cdot x\cdot(1-t)-2)$ mit $d_t'\left(\frac{3}{2}\right)=0$
oder GTR: `solve(nDerive(e^(TX)(1-(X-1)²,X,1.5),T,1)` → 1.3333
Wert t: t = 4/3