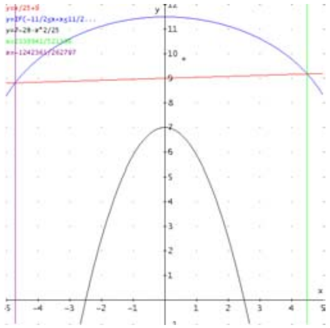
c) Charakterisierung der Zufallsgröße (2 BE):
durchschnittlich 220 Fahrzeuge davon 4 von 20 LKW ⇒
Binomialverteilung $b_{n=220,p=.2}(k)$
Wahrscheinlichkeit: p ≈ 0,7737 = $b_{220,.02}(k \geq 40) = 1 - B_{220,.2}(39)$



Teil D2

a) Koordinaten der Punkte: B(0 | 8 | 5) und) D(9 | 4 | 8,5)
Ansatz für Flächeninhalt
Flächeninhalt: A ≈ 95,7m²

b) Begründung: die Dachneigung α und die Neigung der Strahlen β hängen nicht von der x-Richtung ab. Es gilt tan α = 3.5/4 und tan β = 4.5/4 somit auch α < β. Also bescheint die Sonne das Dach.
Ansatz für prozentualen Anteil (2 BE):
Schattenwurf entlang der Geraden durch B: $g: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \vec{r}$ und Suche nach Schnittstelle mit Terasse: z = 2.5 ⇒ s = 5/9 und y = 92/9
prozentualer Anteil: 55,6% = 5/9

c) Ansatz (2 BE): $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 2.5 \end{pmatrix}$ ⇒ s = 5/9 und y = 88/9 ⇒ Verlängerung 17/9
Ergebnis: 1,78m

Schriftliche Abiturprüfung – Grundkursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2007, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@gymnasium-delitzsch.de) – Mathe-Lehrer.
Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 25.05.07.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **240 Minuten**.

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 25 BE,
im Teil B 15 BE,
im Teil C 10 BE,
im Teil D 10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
60 BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $y = f(x) = (x^2 - 1)\, e^{-x}$ ($x \in \mathbf{D}_f$).

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und das Verhalten von f im Unendlichen an. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen und Näherungswerte für die Koordinaten der lokalen Extrempunkte sowie deren Art an.
Erreichbare BE-Anzahl: 7

b) Begründen Sie unter Verwendung von Funktionseigenschaften, dass der Graph der stetigen Funktion f mindestens zwei Wendepunkte besitzt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) In nebenstehender Abbildung sind die Graphen der Funktion f, einer ihrer Stammfunktionen F und einer weiteren Funktion dargestellt.
Geben Sie an, welche der drei Kurven den Graphen von f und welche den Graphen von F darstellt.
Begründen Sie Ihre Entscheidung für F. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Ansatz für Volumen: $V = \frac{1}{3} A_G h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{40}^2 \cdot 7.5$

Volumen: V = 50

b) Ansatz für Koordinaten des Punktes D: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB}$
Koordinaten des Punktes D: D(5 | 2 | -3)

c) Untersuchung der Lagebeziehung: GTR `PrgmGeometri` E: $9 \cdot x - 3 \cdot y - 4 \cdot z = -9$ und Überprüfen der Punkte, z. B.: $A \overset{?}{\in} E$ $9 \cdot (-3) - 3 \cdot (-2) - 4 \cdot (-3) = -9 \Rightarrow$ wahre Aussage
Aussage: Die Seitenfläche ACS liegt in der Ebene E.

d) vollständiger Nachweis (2 BE): Q_r beschreibt die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für r=0 ergibt sich Punkt A und für r=2 Punkt B

Ansatz für Wert r: $\overrightarrow{OQ_r} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -7 + r \cdot 10 = 0$

Wert r: r = 0,7
Werte r: $0 \le r \le 2$ (Begründung siehe vollständiger Nachweis)

Teil C

a) Ergebnis: 90

b) Nachweis für Wahrscheinlichkeit T-Shirts erster Wahl:
P(ohne Fehler) = $.88 \cdot .9$
Wahrscheinlichkeit für T-Shirts zweiter Wahl: 0,1960
Wahrscheinlichkeit für T-Shirts dritter Wahl: 0,0120

c) Charakterisierung der Zufallsgröße: Binomialverteilung $b_{n=85;p=.792}$
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A:
$P(A) \approx 0{,}0223 = 1 - B_{85;.792}(74)$ = `1-binomcdf(74,85,.792)`
Erwartungswert der Zufallsgröße: $\mu = np = 67.32$
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B: $P(B) \approx 0{,}4913 = 1 - B_{85;.792}(67)$

d) Ansatz für Preis:
$.792 \cdot 7{,}00$ € + $.196x + .012 \cdot 3{,}50$ € = 6.794 €
Preis: mindestens 6,17 €

Wahl	P(X=Wahl)	Einnahmen
I	.792	7,00 €
II	.196	x
III	.012	3,50 €
		110/85 € + 5,50 €

Teil D1

a) eine Gleichung für p_1: $p_1(x) = 7 - 1.12 \cdot x^2$
Ansatz für Abweichung: $d(x) = |p_1(x) - p_2(x)|$
maximale Abweichung: $d \approx 0{,}33$m

b) eine Gleichung der Geraden: z. B. $y = 0{,}04\,x + 9$
Ansatz für Fahrbahnbreite (2 BE): Kreis $x^2 + (y - 6)^2 = 5.5^2$ und
Schnittpunktsuche $x^2 + (0{,}04\,x + 9 - 6)^2 = 5.5^2$
Schnittstellen: $x_1 \approx -4.7275$ und $x_2 \approx 4.4878$
Fahrbahnbreite: $b \approx 9{,}22$m

Lösungsvorschläge

Teil A

a) größtmöglicher Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$
Verhalten im Unendlichen (2 BE): $\lim_{x\to\infty} f(x) = +0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse: $S_{x1}(-1 \mid 0)$, $S_{x2}(1 \mid 0)$
Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse: $S_y(0 \mid -1)$
Näherungswerte der Koordinaten und Art der Extrempunkte:
$P_{Min} = (-0{,}41 \mid -1{,}25)$, $P_{Max} = (2{,}41 \mid 0{,}43)$ (2 BE)

b) Begründung unter Verwendung von Funktionseigenschaften 2 BE:
Variante I: Ein Wendepunkt liegt zwischen Tief- und Hochpunk; dort geht die Linkskurve in eine Rechtskurve über und ein zweiter Wendepunkt liegt rechts vom Hochpunkt, Rechts- wechselt nach Linkskurve.
Variante II: Der Graph steigt im Intervall J=(-0,41 ... 2,41). An den Rändern hat er den Anstieg Null. Der maximale Anstieg in diesem Intervall ist auch der Ort eines Wendepunktes. Rechts von diesem Intervall verhält es sich ähnlich, jedoch fällt der Graph. Die Stelle, an der der Graph am stärksten fällt ist der Wendepunkt.

c) Zuordnungen (2 BE) – z. B: f(x) verläuft im Intervall J unterhalb der x-Achse und leistet dort folglich einen negativen Beitrag zur Stammfunktion. Die Stammfunktion muss in J fallen, also ist (3) die Abbildung einer Stammfunktion. (1) zeigt den Graphen von f(x); Begründung siehe a)
Begründung 3 BE:

d) Ansatz für erste Ableitung
erste Ableitung: $f'(x) = e^{-x} \cdot (-x^2 + 2x + 1)$
Anstieg der Tangente: $f'(1)$
Gleichung der Tangente: $y = t(x) = \frac{2}{e} \cdot (x-1)$
Nachweis (2 BE): $A = \left|\frac{1}{2} \cdot x_0 \cdot t(0)\right| = \left|\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{2}{e}\right)\right|$

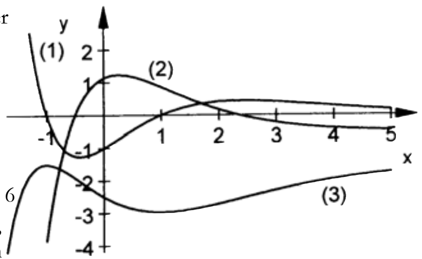
e) Ansatz für Zielfunktion: Abstandsfunktion $d(u) = \sqrt{u^2 + f(u)^2}$; es reicht aber das Maximum für d^2 zu suchen: GTR: `fMax(X²+Y1²,X,.5)` → .4982
Zielfunktion
Näherungswert für u: u ≈ -0,50

f) Ansatz für Flächeninhalt: $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ mit GTR: `fnInt(Y1,X,-1,0)`
Flächeninhalt: A = 1
Begründung (2 BE): f(x+b) bedeutet eine Verschiebung entlang der x-Achse nach rechts bzw. links. Die Verschiebung nach rechts erfolgt aber nur so, dass die Nullstelle immer noch kleiner als 0 ist.

Teil B

a) Ansatz für Rechtwinkligkeit: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
Nachweis der Rechtwinkligkeit des Dreiecks ABC: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
Nachweis der Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABC: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$
grafische Darstellung

d) Die Gerade t ist die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt P(1 | f(1)).
Ermitteln Sie ohne Verwendung von Näherungswerten eine Gleichung der Geraden t.
Die Gerade t und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig.
Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt e^{-1} hat.
Erreichbare BE-Anzahl: 6



e) Es existiert genau ein Wert u ($u \in \mathbb{R}$; $-1 \le u \le 0$), für den der Abstand des Punktes Q(u | f(u)) vom Koordinatenursprung maximal ist.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für u. Erreichbare BE-Anzahl: 3

f) Der Graph der Funktion f und die Koordinatenachsen begrenzen im dritten Quadranten eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.
Für jedes b (b E R) ist eine Funktion gb durch die Gleichung $y = g_b(x) = f(x + b)$ ($x \in D_{gb}$) gegeben.
Begründen Sie, dass für alle b mit -1< b < 1 der Graph der Funktion gb und beide Koordinatenachsen im dritten Quadranten eine Fläche vollständig begrenzen.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung 0 sind die Punkte A(-3 | -2 | -3), B(3 | -4 | -3), C(-1 | 4 | -3) und S(1 | 0 | 4,5) Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S.

a) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.
Stellen Sie diese Pyramide in einem kartesischen Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide. Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D, so dass das Viereck mit den Eckpunkten A, B, C und D ein Quadrat ist. Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Eine Ebene E ist gegeben durch E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ($s,t \in \mathbb{R}$).
Untersuchen Sie, welche Seitenfläche der Pyramide in der Ebene E liegt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

d) Zeigen Sie, dass für jeden Wert $r \in \mathbb{R}$ der Punkt $Q_r(-3+3r \mid -2-r \mid -3)$ auf der Geraden g durch die Punkte A und B liegt.
Ermitteln Sie den Wert r, für den die Strecke $\overline{OQ_r}$ senkrecht zur Geraden g liegt.
Geben Sie alle Werte r an, für die der Punkt Q_r auf der Kante AB liegt. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil C: Stochastik

Für ihren letzten Schultag bestellen Anne und Felix für jeden der 85 Schüler der Jahrgangsstufe 12 ihres Gymnasiums ein T-Shirt bei einem regionalen Hersteller.
In jeder Größe kann man aus drei verschiedenen Stoffqualitäten, zehn Farben und den Modellen Classic-T, Polo oder Soccer wählen.

a) Geben Sie an, wie viele Wahlmöglichkeiten es in jeder Größe für die Ausstattung der T-Shirts gibt.
Erreichbare BE-Anzahl: 1

Nach Angaben des Herstellers haben 12 % seiner T-Shirts einen Nähfehler und 10 % einen Farbfehler.
Näh- und Farbfehler treten unabhängig voneinander auf.
Der Hersteller verkauft T-Shirts ohne Fehler als erste Wahl. Besitzt ein T-Shirt einen Näh- und einen

Farbfehler, so wird es als dritte Wahl angeboten. Alle anderen T-Shirts werden als zweite Wahl verkauft.

b) Zeigen Sie, dass ein zufällig ausgewähltes T-Shirt mit der Wahrscheinlichkeit 0,7920 die Qualität erste Wahl besitzt.
Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes T-Shirt zweite und mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes T-Shirt dritte Wahl ist.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: Mindestens 75 der gelieferten T-Shirts sind erste Wahl.
B: Unter den 85 gelieferten T-Shirts befinden sich mehr T-Shirts erster Wahl als zu erwarten sind.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Beim Hersteller erhalten Anne und Felix alle T-Shirts für 5,50 € je Stück.
Um einen Beitrag zur Finanzierung des Abiturballs ihres Gymnasiums zu leisten, verlangen sie für T-Shirts erster Wahl 7,00 ~ von ihren Mitschülern. Bei T-Shirts dritter Wahl soll dieser Preis um 50 % reduziert werden.
Bestimmen Sie, in welcher Höhe Anne und Felix den Preis für ein T-Shirt zweiter Wahl mindestens festlegen müssen, damit sie einen Gewinn von mindestens 110 € beim Verkauf der T-Shirts erwarten können.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Wahlaufgabe 1

Zur Ortsumgehung der Stadt Stollberg (Erzgebirge) wurde für die Bundesstraße B 180 eine Brücke gebaut.
Nebenstehende Skizze zeigt den Querschnitt einer Stütze dieser Brücke in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 1 Meter).

Die innere Begrenzung des Querschnitts der Stütze ist eine Parabel p.

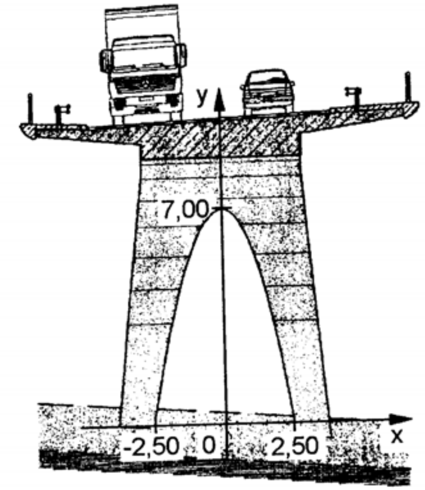


Abbildung 1: Skizze (nicht maßstäblich)

a) Die Parabel p kann im Intervall $-2,50 \leq x \leq 2,50$ näherungsweise durch eine quadratische Funktion p_1 oder durch eine Funktion vierten Grades p_2 mit $p_2(x) = 0,03x^4 - 1,32x^2 + 7,00$ beschrieben werden.
Ermitteln Sie die maximale Abweichung der Funktionswerte der Funktionen p_1 und p_2 voneinander.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Die Fahrbahn verläuft durch den Punkt $P(0,00 \mid 9,00)$ und hat eine Neigung von 4 % gegenüber der x-Achse. Die Seitenbegrenzungen der Fahrbahn liegen auf einem Kreis um den Punkt $M(0,00 \mid 6,00)$ mit dem Radius 5,50 m.
Berechnen Sie die Breite der Fahrbahn.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Vor Einführung der Autobahnmaut überquerten durchschnittlich 200 Fahrzeuge pro Stunde die Brücke. Damals kamen auf 20 Fahrzeuge 3 LKW.
Inzwischen ist die Gesamtanzahl der Fahrzeuge pro Stunde um 10 % gestiegen.
Der Anteil der LKW am Fahrzeugaufkommen hat um ein Drittel zugenommen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass heute durchschnittlich mindestens 40 LKW die Brücke pro Stunde überqueren.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

Wahlaufgabe 2

Ein Einfamilienhaus hat eine rechteckige Grundfläche. Es ist 9,00 m lang und 8,00 m breit. Bis zum Dachansatz beträgt die Höhe 5,00 m, die Gesamthöhe ist 8,50 m. Die Dachfläche besteht aus zwei zueinander kongruenten Rechtecken.

Die angrenzende quaderförmige Garage ist 4,00 m lang, 4,00 m breit und 2,50 m hoch. Auf ihrem Dach befindet sich eine Terrasse.

Der Eckpunkt O der Grundfläche des Hauses liegt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems (1 Einheit entspricht 1 Meter).

Die Grundflächen von Haus und Garage befinden sich in der x-y-Koordinatenebene (siehe Skizze).

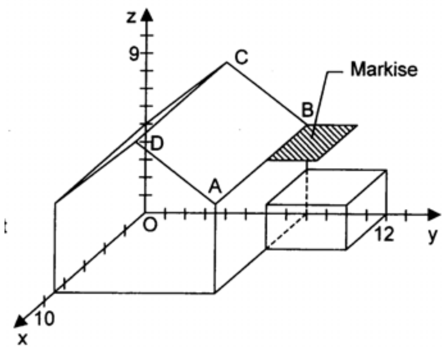


Abbildung 2: Skizze (nicht maßstäblich)

a) Geben Sie die Koordinaten des Punktes B auf der Dachansatzgeraden AB und des Punktes D auf der Dachfirstgeraden CD an.
Ermitteln Sie den Inhalt der Dachfläche des Wohnhauses.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

Um 13:30 Uhr eines bestimmten Tages haben die parallel einfallenden Lichtstrahlen in der Umgebung des Hauses die Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0,00 \\ 4,00 \\ -4,50 \end{pmatrix}$.

b) Begründen Sie, dass bei dieser Richtung des Lichteinfalls die Schattengrenze auf der Terrassenfläche durch den Dachansatz AB und nicht durch den Dachfirst CD entsteht.
Berechnen Sie, welcher prozentuale Anteil der Terrassenfläche sich zu diesem Zeitpunkt im Schatten befindet.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Am Dachansatz AB ist eine Markise in der Breite der Terrasse so angebracht, dass sie parallel zur Terrassenfläche ausgefahren werden kann.
Ermitteln Sie, wie weit diese Markise mindestens ausgefahren werden muss, damit sich die gesamte Terrasse um 13:30 Uhr dieses Tages im Schatten befindet.
Erreichbare BE-Anzahl: 3