

**Teil A Analysis**

gegeben  $f(x) = \frac{20x}{(x^2 + 3)^2}$  ( $x \in D_f$ ) und  $F(x) = -\frac{10}{x^2 + 3}$  ( $x \in R$ )

a) - Untersuchung des Definitionsbereiches

1. Beschränkungen des Def.-ber. durch enthaltene elementare Funktionen:  $(20x; x^2; 3; i^2)$

keine Beschränkungen

2. Beschränkungen des Def.-ber. durch Zusammensetzungsarten:

f (ist) enthält einen Quotienten  $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} n(x) \neq 0$

$n(x) = (x^2 + 3)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -3$  gilt für alle  $x \in R \Rightarrow$  keine Beschränkung  
aus 1. und 2. folgt:  $D_f : x \in R$

- Angabe Nullstellen  $x_N = 0$  ( $f(x_N) = 0$ ; Ablesen oder GTR)

Berechnung der NST mit GTR

- Eingabe der Fkt f auf Position Y1 im GRAPH-Menü
- Anzeigen des Fktsgraphen durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)
- F5-Taste (G-Solve)
- F1-Taste (Root), die angezeigte Lösung ist die NST von f

- Untersuchung der Symmetrie

$$f(-x) = \frac{20(-x)}{((-x)^2 + 3)^2} = \frac{-20x}{(x^2 + 3)^2} = -\frac{20x}{(x^2 + 3)^2} = -f(x) \Rightarrow \text{f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung}$$

- Untersuchung auf Achsenparallele Asymptoten

1. Asymptoten parallel zur x-Achse (Untersuchung des Verhaltens im Unendlichen)

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \left( \frac{20x}{x^4 + 6x^2 + 9} \right) = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \left( \frac{x}{x^4} \cdot \frac{20}{1 + \frac{6}{x^2} + \frac{9}{x^4}} \right) = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \left( \frac{1}{x^3} \cdot \frac{20}{1 + \frac{6}{x^2} + \frac{9}{x^4}} \right) = 0 \cdot \frac{20}{1 + 0 + 0} = 0$$

Da die Funktion für  $x \rightarrow \mp\infty$  einen Grenzwert besitzt, hat die Funktion eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung  $y = g$

Gleichung der waagerechten Asymptote von f:  $y = 0$  (x-Achse selbst)

2. Asymptoten parallel y-Achse (Untersuchung auf Polstellen)

Funktion ist für  $x \in R$  definiert. D.h. sie besitzt keine Polstellen, also auch keine senkrechten Asymptoten.

- Angabe der Extrempunkte

GTR:  $P_{\min}(-1; -1,25); P_{\max}(1; 1,25)$

Berechnung des Extrempkts mit dem GTR

- Fkt f befindet sich auf Position Y1
- Wechsel in das GRAPH-Menü
- Anzeigen des Fktsgraphen durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)
- F5-Taste (G-Solve)
- F2-Taste (MAX), die angezeigte Lösung (x und y) sind die Koordinaten des ges. Pkt

b) - Nachweis, dass F Stammfkt von f ist  $F$  Stammfkt von f  $\Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

$$F(x) = -10(x^2 + 3)^{-1} : F'(x) = -10 \cdot (-1 \cdot (x^2 + 3)^{-2}) \cdot (2x) = \frac{20x}{(x^2 + 3)^2} = f(x)$$

d.h. F ist Stammfkt von f

- Begründung, dass F höchstens einen Extrempkt besitzen kann  
notwendige Bedingung für Existenz von Extrempktn:  $f'(x_E) = 0$

D.h. die Nullstellen der 1. Ableitung einer Fkt geben die möglichen Extremstellen an. Da f die 1. Ableitung von F ist und f genau eine Nullstelle besitzt, kann F maximal einen Extrempunkt haben.

- Aufstellung der Gleichung für die vollständig begrenzte Fläche in Abhängigkeit von a

$$A = \int_0^a f(x) dx = [F(x)]_0^a = -\frac{10}{a^2 + 3} - \left( -\frac{10}{0^2 + 3} \right) = \frac{10}{3} - \frac{10}{a^2 + 3} = A(a)$$

- Berechnung desjenigen  $a_1$  für das gilt  $A(a_1) = 2,5$

Lösungen schriftliches Abitur Sachsen  
Mathematik Grundkurs 2002 Ersttermin

GTR:  $a_i = 3$

Berechnung der x-Koordinate eines Pkts bei vorgegebener y-Koordinate mit GTR

- Fkt f befindet sich auf Position Y1
- Wechsel in das GRAPH-Menü
- Anzeigen des Fktsgraphen durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)
- F5-Taste (G-Solve)
- F6-Taste (weitere Menüpunkte)
- F2-Taste (X-CAL)
- Eingabe des Wertes für Y an der Eingabeaufforderung EXE-Taste
- angezeigte x-Koordinate ist die Lsg

c) Extremwertproblem

1. Aufstellung der Zielfunktion

Extremgröße: Flächeninhalt eines Rechteckes  $A_R = a \cdot b$

Nebenbedingungen: achsenparallele Lage und Diagonale Eckpunkte  $O(0;0)$  und  $P(u;f(u))$   
darum gilt 1.  $a = u$  2.  $b = f(u)$

Einsetzen der Nebenbedingungen in die Ausgangsgleichung der Extremgröße

$$A_R = u \cdot \frac{20u}{(u^2 + 3)^2}$$

Aufstellung der Zielfunktion:  $A_R(u) = \frac{20u^2}{(u^2 + 3)^2}$  ( $u \in \mathbb{R}; 0 < u < 10$ )

2. Berechnung der Extrempunkte der Zielfkt in deren Definitionsbereich

GTR:  $H(1,73;1,67)$

Berechnung des Extrempkts mit dem GTR

- Fkt f befindet sich auf Position Y1
- Wechsel in das GRAPH-Menü
- Anzeigen des Fktsgraphen durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)
- F5-Taste (G-Solve)
- F2-Taste (MAX), die angezeigte Lösung (x und y) sind die Koordinaten des ges. Pkt

Wählt man für u den Wert 1,73, dann erhält man das Flächengrößte Rechteck mit einem Inhalt von 1,67FE.

d) Aufstellung der Gleichung einer ganzrationalen Fkt 3. Grades

allgemeine Fktsagl.:  $g(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

geltende Bedingungen:

1. g verläuft durch das lokale Minimum von f

$$P_{\min}(f) = (-1; -1,25) \in g \Rightarrow (1): -1,25 = a_3(-1)^3 + a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0$$

2. g verläuft durch das lokale Maximum von f

$$P_{\max}(f) = (1; 1,25) \in g \Rightarrow (2): 1,25 = a_31^3 + a_21^2 + a_11 + a_0$$

3. g besitzt bei  $x = -\frac{1}{3}$  einen Wendepkt

$$g''\left(-\frac{1}{3}\right) = 0; \quad g'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1; \quad g''(x) = 6a_3x + 2a_2$$

$$(3): 0 = 6a_3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2a_2$$

4. Tangente von g im Wendepkt hat den Anstieg  $m_t = -\frac{1}{12}$

$$m_t = g'(x_w) = g'\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{12}$$

$$(4) -\frac{1}{12} = 3a_3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2a_2\left(-\frac{1}{3}\right) + a_1$$

Konstruktion eines linearen Gleichungssystems aus den geltenden Bedingungen

$$\begin{aligned} (1): & -1,25 = -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \\ (2): & 1,25 = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \\ (3): & 0 = -2a_3 + 2a_2 \\ (4): & -\frac{1}{12} = \frac{1}{3}a_3 - \frac{2}{3}a_2 + a_1 \end{aligned}$$

Lösung des Gleichungssystems mit GTR:  $L = \{(1;1;0,25;-1)\}$  (Menü A EQUA, F1, F4)

gesuchte Gleichung:  $g(x) = x^3 + x^2 + 0,25x - 1$

## Teil B Geometrie / Algebra

geg.: Punkte  $A(4;3;0)$ ;  $B(10,5;4,5;0)$ ;  $C(14;19;0)$ ;  $D(2,5;9,5;0)$

Die Punkte A, B, C und D bilden die Grund-(Deck)-fläche eine vierseitigen, geraden Prismas. Die Höhe des Prismas beträgt 5LE

a) - Aufstellung der Koordinaten der Eckpunkte E, F, G, H

Zugangsmöglichkeit 1

Da die Deckfläche senkrecht über der Grundfläche liegt und die Grundfläche in der x-y-Ebene, so erhält man die Koordinaten der Eckpunkte der Deckfläche, indem man die z-Koordinaten der Eckpunkte der Grundfläche (alle 0) durch 5 ersetzt.

Bsp.:  $A(4;3;0)$  -  $E(4;3;5)$

Zugangsmöglichkeit 2

$$\text{Höhenvektor: } \vec{h} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OA} + \vec{h} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow E(4;3;5)$$

analog für F, G, H:  $F(10,5;4,5;5)$ ;  $G(14;19;5)$ ;  $H(2,5;9,5;5)$

- Nachweis, dass das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist

ABCD ist Drachenviereck  $\Leftrightarrow$  jeweils 2 benachbarte Seiten sind gleich lang

Berechnung der Seitenlängen mit GTR (kein Standard, Verwendung eines Programms)

$$\left. \begin{aligned} \overline{AB} = 6,67 = \overline{DA} \\ \overline{BC} = 14,92 = \overline{CD} \end{aligned} \right\} \Rightarrow ABCD \text{ ist Drachenviereck}$$

- Berechnung der Größe des Winkels  $\angle BAD = \angle(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB})$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10,5 - 4 \\ 4,5 - 3 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2,5 - 4 \\ 9,5 - 3 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 6,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Winkels mit GTR (kein Standard, Verwendung eines Programms):

$$\angle(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) = 90^\circ$$

b) - Aufstellung der Ebenengl. für die Ebene  $\varepsilon$  für die gilt:  $A, C, E \in \varepsilon$

GTR (kein Standard, Verwendung eines Programms):  $\varepsilon: 8x - 5y = 17$

- Aufstellung der Geradengl der Gerade h für die gilt:  $B, H \in h$

$$h: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} 10,5 \\ 4,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Nachweis, dass  $Q(6,5;7;2,5)$  Schnittpkt von  $\varepsilon$  und h ist

Ansatz: Q ist Schnittpkt von  $\varepsilon$  und h  $\Leftrightarrow Q \in \varepsilon$  und  $Q \in h$

(I) Punktprobe für Q in  $\varepsilon$

$$8 \cdot 6,5 - 5 \cdot 7 = 17 \text{ wahre Aussage} \Rightarrow \text{(i) } Q \in \varepsilon$$

(II) Punktprobe für Q in h

$$\left. \begin{array}{l} 6,5 = 10,5 - 8t \quad \xrightarrow{\text{mit(1)}} \quad 10,5 - 8 \cdot 0,5 = 6,5 \quad \text{wahre Aussage} \\ 7 = 4,5 + 5t \quad \xrightarrow{\text{mit(1)}} \quad 4,5 + 2,5 = 7 \quad \text{wahre Aussage} \\ 2,5 = 5t \quad \Rightarrow (1) \quad t = 0,5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{(ii) } Q \in h$$

aus (i) und (ii) folgt die Behauptung

c) Begründung dafür, dass gilt: Volumen des Restkörpers =  $\frac{5}{6}$  Volumen des Prismas

Sachverhalt: Vom Prisma ABCDEFGH (EFGHABCD) wird die Pyramide EFGB abgetrennt, so dass der Restkörper EFGHACD entsteht.

Behauptung:  $V_R = \frac{5}{6} V_{Pr} \Leftrightarrow 6V_R = 5V_{Pr} \stackrel{V_R = V_{Pr} - V_{Py}}{\Leftrightarrow} 6V_{Pr} - 6V_{Py} = 5V_{Pr} \Leftrightarrow V_{Pr} = 6V_{Py}$

Volumen des Prismas:  $V_{Pr} = A_{GPr} \cdot h_{Pr} = A_{EFGH} \cdot |\vec{FB}|$

Volumen der Pyramide:  $V_{Py} = \frac{1}{3} A_{GPy} \cdot h_{Py} = A_{EFG} \cdot |\vec{FB}|$

Einsetzen von (b), (c) in Beziehung (a)

$$A_{EFGH} \cdot |\vec{FB}| = 2 \cdot \frac{1}{3} A_{EFG} \cdot |\vec{FB}| \Leftrightarrow A_{EFGH} = 2A_{EFG} \quad \text{D.h. die Behauptung ist wahr, wenn die Fläche des}$$

Vierecks EFGH doppelt so groß ist wie die des Dreiecks EFG.

Unter Aufgabe a) wurde nachgewiesen, dass das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist, wobei die Diagonale durch A und C diejenige Diagonale ist, die das Drachenviereck halbiert. Da ABCD und EFGH Grund- und Deckfläche eines geraden Prismas sind, sind diese Flächen kongruent. D.h. die Diagonale durch E und G halbiert die Fläche des Vierecks EFGH.

Es gilt:  $A_{EFGH} = A_{EFG} + A_{GHE} \stackrel{A_{GHE} = A_{EFG}}{=} A_{EFG} + A_{EFG} = 2A_{EFG}$

D.h. die Behauptung ist wahr.

d) Aufstellung der Gleichung der Tangente t am Kreis k (dessen Mittelpkt der Diagonalschnittpkt des Vierecks ABCD ist) im Pkt  $R(5,5;14)$

Gleichung der Tangente t an k in R

$$t: (x - x_M)(x_R - x_M) + (y - y_M)(y_R - y_M) = r^2$$

Zur Aufstellung werden die Koordinaten des Kreismittelpunktes benötigt.

Aus Aufgabenteil a) folgt, dass der Diagonalschnittpkt der Mittelpkt der Strecke  $\overline{BD}$  ist:

$$M = M_{\overline{BD}} \left( \frac{10,5 + 2,5}{2}; \frac{4,5 + 9,5}{2} \right) = (6,5;7)$$

Einsetzen aller Angaben in die Ansatzgl.:

$$t: (x - 6,5)(5,5 - 6,5) + (y - 7)(14 - 7) = 50$$

$$t: -(x - 6,5) + 7(y - 7) = 50$$

### Teil C Stochastik

a)  $G_1$  Glücksrad mit 36 gleichgroßen Sektoren, die mit den Zahlen 1 – 36 beschriftet sind. D.h. die Ermittlung jeder einzelnen Zahl bei einmaliger Drehung ist gleichwahrscheinlich.

ZEa: einmaliges Drehen des Glücksrades  $G_1$  und Feststellung der erdrehten Zahl

LAPLACE-Experiment mit den Ereignissen 1 – 36, d.h. 36 mögliche Fälle

Ereignis A: eine durch 3 teilbare Zahl wurde erdreht

Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A mit der Klassische Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

b) ZEb1: einmaliges Drehendes Glücksrades  $G_1$  und Feststellung ob eine durch fünf teilbare Zahl erdreht wurde

ZEb1 ist ein BERNOULLI-Experiment mit den Ereignissen

$b$  ... Zahl durch 5 teilbar und

$\bar{b}$  ... Zahl nicht durch 5 teilbar

Die Wahrscheinlichkeit von  $b$  und  $\bar{b}$  kann auf der LAPLACE-Basis (ZEa) mit der Formel für die Klassische Wahrscheinlichkeit ermittelt werden:

$$P(b) = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}} = \frac{7}{36}$$

ZEb10: zehnmalige Nacheinanderausführung von ZEb1

ZEb10 ist eine BERNOULLI-Kette. Die Zufallsgröße  $X_{b10}$  gibt an, wie viele Erfolge bei der Durchführung des ZEb10 erzielt wurden. Dann ist  $X_{b10}$  eine binomialverteilte Zufallsgröße mit der

Kettenlänge  $n = 10$  und der Erfolgswahrscheinlichkeit  $p = P(b) = \frac{7}{36}$ .

Ereignis  $B_1$  **genau 2** Erfolge wurden erzielt

$$P(B_1) = P(X_{b10} = 2) \stackrel{GTR}{\approx} 0,3017 \quad (\text{kein Standard, Verwendung eines Programms})$$

Ereignis  $B_2$  **mindestens 2** aber **höchstens 5** Erfolge wurden erzielt

$$P(B_2) = P(2 \leq X_{b10} \leq 5) \stackrel{GTR}{\approx} 0,6017 \quad (\text{kein Standard, Verwendung eines Programms})$$

ZEBk: k-malige Nacheinanderausführung von ZEb1

ZEBk ist eine BERNOULLI-Kette. Die Zufallsgröße  $X_{bk}$  gibt an, wie viele Erfolge bei der Durchführung des ZEBk erzielt wurden. Dann ist  $X_{bk}$  eine binomialverteilte Zufallsgröße mit der

Kettenlänge  $n = k$  und der Erfolgswahrscheinlichkeit  $p = P(b) = \frac{7}{36}$ .

Ereignis  $B_3$  **mindestens 1** Erfolg wurde erzielt

$$P(B_1) \geq 0,99$$

Übergang zum Gegenereignis:

Ereignis  $\bar{B}_3$  **höchstens 0** Erfolge wurden erzielt

Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses hängt nur von der Kettenlänge ab. Die Erfolgsanzahl ist feststehend. Deshalb kann dieses Ereignis zur Ermittlung der Kettenlänge verwendet werden.

$$P(B_3) = 1 - P(\bar{B}_3) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = 1 - \left(1 - \frac{7}{36}\right)^n \geq 0,99$$

Lösung der Ungleichung:

$$1 - \frac{29^n}{36} \geq 0,99$$

$$0,01 \geq \left(1 - \frac{7}{36}\right)^n$$

$$\ln 0,01 \geq n \ln \frac{29}{36} \Leftrightarrow \frac{\ln 0,01}{\ln \frac{29}{36}} \leq n \Leftrightarrow n \geq 21,30$$

D.h. das Experiment muss mindestens 22mal durchgeführt werden.

c) gesucht ist die Gewinnerwartung eines Glücksspiels

D.h. wählt man als Zufallsgröße  $X_c$  den Gewinn, dann ist der gesuchte Wert der Erwartungswert der Zufallsgröße C

Ereignis $n_i$ (erdrehter Sektor)	A	B	C	D
Einsatz in €	1	1	1	1
Auszahlung in €	0	2	1	5
Gewinn in € $X_c$	0-1=-1	2-1=1	1-1=0	3-1=4
Größe des Sektors	$360^\circ - (36^\circ + 120^\circ + 24^\circ) = 180^\circ$	$36^\circ$	$120^\circ$	$24^\circ$
Wahrscheinlichkeit $P(n_i)$	$\frac{180^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2}$	$\frac{36^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{10}$	$\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$	$\frac{24^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{15}$

Berechnung des Erwartungswertes

$$E(X_c) = \sum_{k=1}^4 X_{Ci} \cdot P(X_{Ci}) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{15} = \frac{2}{15} \approx -0,13$$

Bei einem Spiel muss der Spieler durchschnittlich mit einem Verlust von 0,13€ rechnen.

- d) Zunächst teilt man das Glücksrad in  $n$  Einheitssektoren ein, die jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit ertreht werden können. Danach fasst man die Einheitssektoren zu größeren Sektoren zusammen, so dass das gewünschte Wahrscheinlichkeitsverhältnis erreicht wird.

Ansatz mit Klassischer Wahrscheinlichkeit:  $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{4}{n} + \frac{8}{n} = 1 \Leftrightarrow 1 + 2 + 4 + 8 = n = 15$

Gesamtanzahl von Einheitssektoren:  $n = 15$

Größe eines Einheitssektors:  $\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$

Sektor	1	2	3	4
Anteil an Gewinnchancen	1	2	4	8
Sektorgröße	$1 \cdot 24^\circ = 24^\circ$	$2 \cdot 24^\circ = 48^\circ$	$4 \cdot 24^\circ = 96^\circ$	$8 \cdot 24^\circ = 192^\circ$

### Teil D1 Wahlaufgabe Analysis

gegeben:  $f(x) = \left(3 - \frac{3}{x}\right)e^x \quad (x \in \mathbb{R}; -2 \leq x \leq 2; x \neq 0)$

- a) Aufstellung der Gleichung einer quadratischen Funktion

allgemeiner Funktionsterm:  $g(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Bedingung 1:  $P(0; -40) \in g$

(1)  $g(0) = -40 = a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0$

Bedingung 2:  $x_{N1g} = x_{Nf}$

Ermittlung der NSt von  $f$  (Ablezen oder GTR)  $x_{Nf} = 1$

(2)  $g(x_{N1g}) = g(1) = 0 = a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0$

Bedingung 3: da  $g$  symmetrisch zur  $y$ -Achse verläuft, ist  $x_{N2g} = -1$  ebenfalls NSt von  $g$

(3)  $g(x_{N2g}) = g(-1) = 0 = a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0$

Aufstellung und Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$-40 = a_0$$

$$0 = a_2 + a_1 + a_0 \quad \text{Lösung mit GTR: } L = \{40; 0; -40\}$$

$$0 = a_2 - a_1 + a_0$$

Gleichung von  $g$ :  $g(x) = 40x^2 - 40 = 40(x^2 - 1)$

Berechnung aller Schnittpkte mit GTR:  $S_1(-1,03; 2,12); S_2(-0,08; -39,77); S_3(1; 0)$

Berechnung der Schnittpkte mit GTR

- Fkt  $f$  befindet sich auf Y1

- Fkt  $g$  befindet sich auf Y2

**Achtung: Die Graphen beider Fkt müssen angezeigt werden. Wählen Sie einen geeigneten Darstellungsbereich!**

- Anzeigen der Fktsgraphen durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)

- F5-Taste (G-Solve)

- F5-Taste (ISCT)

Falls nur die Fktn  $f, g$  angezeigt wurden erfolgt jetzt die Berechnung des ersten SPkts.

Ansonsten müssen noch die richtigen Fktn ausgewählt werden.

- Drücken der NachRechts-Taste zur Berechnung weiterer SPkte

- b) Ermittlung einer Tangentengl. (GTR TABL-Menü)

Gl. in Pkt-Richtungs-Form:  $t_1: y - 0 = 8,15(x - 1)$

Berechnung mit dem GTR

- Fkt  $f$  befindet sich auf Position Y1

- Wechsel in das TABLE-Menü

- Anzeigen der Wertetabelle durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)

Lösungen schriftliches Abitur Sachsen  
Mathematik Grundkurs 2002 Ersttermin

- Eingabe der x-Koordinate und drücken der EXE-Taste
- in Zeile 1 / Spalte 2 (Y1) wird die y-Koordinate des Berührungspkts angezeigt
- in Zeile 1 / Spalte 3 (Y1) wird der Tangentenanstieg angezeigt

Berechnung der maximalen Abweichung von  $f$  und  $t_1$  (Extremwertproblem)

$$d(x) = |f(x) - t_1(x)| \quad (x \in \mathbb{R}; 0,8 \leq x \leq 1,2)$$

$d$  besitzt im Definitionsbereich keine lokalen Extrempkte. Deshalb muss das globale Maximum der Funktion ermittelt werden.

Berechnung der Funktionswerte an den Intervallrändern (GTR TABLE-Menü 7)

$$d(0,8) \approx 0,04; \quad d(1,2) \approx 0,03$$

Die maximale Abweichung beträgt 0,04LE

c) weiterhin gegeben:  $h_a(x) = ax^2 - 20 \quad (x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}, a > 0)$

Extremwertproblem

Extremgröße: maximale Differenz der Funktionswerte an der Stelle  $x = 1$

$$d(1) = f(1) - h_a(1) = 0 - (a - 20) = 20 + a$$

$$d(a) = 20 - a \quad (a \in \mathbb{R}, a > 0)$$

Diese Fkt besitzt keine lokalen Extrempkte!

Es existiert weder ein lokales noch ein globales Maximum.

An einer Skizze des Sachverhaltes (oder Darstellung auf GTR im Menüpkt 6 DYNA) lässt sich dies deutlich erkennen.

### Teil D2 Wahlaufgabe Geometrie / Algebra

gegeben:  $M(3; -1; 0)$ ;  $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Die Geraden  $g_a$  verlaufen parallel zueinander, da sie alle den gleichen Richtungsvektor besitzen.

$$\begin{array}{lcl} 3 = & a & + 2r & \xrightarrow{\text{mit(1)}} & a = 3 - 2 \cdot 3 = -3 \\ -1 = & 8 & - 3r & \xrightarrow{\text{mit(1)}} & 8 - 3 \cdot 3 = -1 \text{ wahre Aussage} \\ 0 = & -3 & + r & \Rightarrow & (1)r = 3 \end{array}$$

b) regelmäßiges Sechseck mit Diagonalschnittpkt M (Mittelpkt des Umkreises) und einem Eckpkt  $A(3 + \sqrt{3}; -2; 0)$

- Nachweis, dass  $B(3 + \sqrt{3}; 0; 0)$  ein zu A benachbarter Eckpkt ist

Wenn Pkte M, A, B müssen ein gleichseitige Dreieck bilden, dann ist die Behauptung wahr.

Berechnung der Seitenlängen des Dreiecks mit GTR (kein Standard, Verwendung eines Programms)

$$\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = 2 \Rightarrow \text{Behauptung}$$

- Berechnung des anderen benachbarten Eckpkts  $B'$  zu A

Die Pkte M, A, B,  $B'$  bilden ein Parallelogramm (sogar einen Rhombus). Deshalb gilt:

Lösungen schriftliches Abitur Sachsen  
Mathematik Grundkurs 2002 Ersttermin

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{3} - (3 + \sqrt{3}) \\ -2 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- c) von einer Pyramide ist bekannt, dass sie das regelmäßige Sechseck (liegt in x-y-Ebene) als Grundfläche hat und ein Volumen von  $18\sqrt{3}VE$  besitzt.

Ermittlung aller Spitzen, die auf der Geraden  $g_{-3}$  liegen

Da die Grundfläche in der x-y-Ebene liegt, befinden sich alle Spitzen in zur x-y-Ebene parallelen Ebenen. Die Gleichungen derartiger Ebenen lauten  $z = -h$  bzw.  $z = h$ . Die gesuchten Pkte sind die Durchstoßpunkte der Geraden  $g_{-3}$  durch diese Ebenen.

Berechnung der Höhe der Pyramide:

$$V_{Py} = \frac{1}{3} A_G \cdot h = 18\sqrt{3} \Leftrightarrow h = \frac{3 \cdot 18\sqrt{3}}{A_G}$$

$$A_G = 6 \cdot A_{MAB} = 6 \cdot \frac{1}{2} g h_g = 3a \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{3\sqrt{3}}{2} |MA|^2 = 6\sqrt{3}$$

$$h = \frac{3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{6 \cdot \sqrt{3}} = 9$$

DSPkt  $g_{-3}$ ,  $z_1 = -9$  GTR:  $S_1(-15;26;-9)$  (kein Standard, Verwendung eines Programms)

DSPkt  $g_{-3}$ ,  $z_2 = 9$  GTR:  $S_2(21;-28;9)$  (kein Standard, Verwendung eines Programms)