Sächsisches Staatsministerium
für Kultus

Schuljahr **2001/02**

Geltungsbereich:
- Allgemein bildendes Gymnasium
- Abendgymnasium und Kolleg
- Schulfremde Prüfungsteilnehmer

Schriftliche Abiturprüfung
Grundkursfach Mathematik

- Ersttermin -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **240 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	25 BE,
im Teil B	15 BE,
im Teil C	10 BE,
im Teil D	10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:
1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung, ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und F durch die Gleichungen

$$y = f(x) = \frac{20x}{(x^2+3)^2} \quad (x \in D_f) \text{ und } y = F(x) = -\frac{10}{x^2+3} \quad (x \in R)$$

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und die Nullstelle der Funktion f an.
Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie.
Untersuchen Sie die Funktion f auf achsenparallele Asymptoten und geben Sie gegebenenfalls deren Gleichungen an.
Der Graph der Funktion f besitzt genau zwei lokale Extrempunkte P_{MIN} und P_{MAX}.
Geben Sie die Koordinaten dieser Punkte an.

Erreichbare BE-Anzahl: 9

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist. Begründen Sie, dass die Funktion F höchstens eine lokale Extremstelle hat.

Für jedes a $(a \in R, a > 0)$ begrenzen der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = a$ eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a.
Ermitteln Sie den Wert a, für den der Flächeninhalt 2,5 beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

c) Für jedes u $(u \in R, 0 < u < 10)$ sind der Koordinatenursprung und der Punkt $P_u(u; f(u))$ Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks.

Es existiert genau ein Wert u, für den der Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks maximal wird.

Ermitteln Sie diesen Wert u und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Der Graph einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades verläuft durch die lokalen Extrempunkte P_{MIN} und P_{MAX} des Graphen der Funktion f.

Außerdem hat die Funktion g an der Stelle $x = -\frac{1}{3}$ einen Wendepunkt.

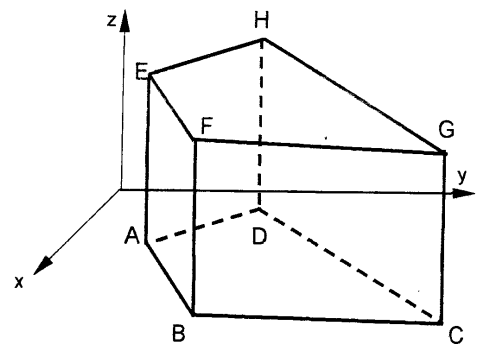
In diesem Wendepunkt besitzt die Tangente an den Graphen der Funktion g den Anstieg $-\frac{1}{12}$.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil B: Geometrie /Algebra

Die Abbildung zeigt die Skizze eines in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellten geraden Prismas mit der Grundfläche ABCD und der Höhe $h = 5$. Die Eckpunkte der Grundfläche sind die Punkte $A(4;3;0)$, $B\left(\frac{21}{2};\frac{9}{2};0\right)$, $C(14;19;0)$ und $D\left(\frac{5}{2};\frac{19}{2};0\right)$.



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Geben Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte des Prismas an.
Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist.
Ermitteln Sie die Größe des Winkels BAD.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Durch die Punkte A, C und E ist eine Ebene ε und durch die Punkte B und H eine Gerade h bestimmt.
Geben Sie jeweils eine Gleichung der Ebene ε und der Geraden h an.
Untersuchen Sie, ob der Punkt $Q\left(\frac{13}{2};7;\frac{5}{2}\right)$ Schnittpunkt der Ebene ε und der Geraden h ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Vom geraden Prisma ABCDEFGH wird die Pyramide mit der Grundfläche EFG und der Spitze B abgetrennt.
Begründen Sie, dass das Volumen des Restkörpers $\frac{5}{6}$ des Volumens des Prismas beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Die folgende Teilaufgabe bezieht sich nur auf die x-y-Ebene.

d) In der x-y-Ebene liegt ein Kreis k, dessen Radius $r = \sqrt{50}$ beträgt und dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks ABCD ist.
Die Gerade t sei Tangente an den Kreis k im Punkt $R\left(\frac{11}{2};14\right)$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil C: Stochastik

Ein Glücksrad G_1 ist in 36 gleich große Sektoren eingeteilt, die paarweise verschieden mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 36 beschriftet sind. Bei jeder Drehung des Rades wird genau ein Sektor mithilfe eines Zeigers „gezogen".

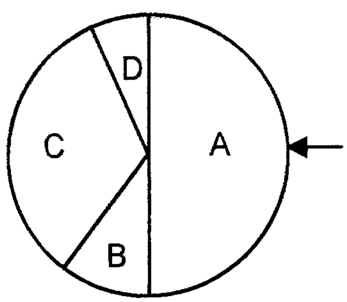
a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass bei einer Drehung des Rades G_1 eine durch drei teilbare Zahl „gezogen" wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

b) Das Glücksrad G_1 wird 10-mal gedreht.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass dabei genau zweimal eine durch 5 teilbare Zahl „gezogen" wird.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei mindestens zweimal, aber höchstens fünfmal eine durch 5 teilbare Zahl „gezogen" wird.
Ermitteln Sie, wie oft man das Glücksrad G_1 mindestens drehen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens einmal eine durch 5 teilbare Zahl „gezogen" wird?

Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Das Glücksrad G_2 sei in vier Sektoren A, B, C und D eingeteilt (siehe Skizze).



Zentriwinkel

des Sektors B: 36°

des Sektors C: 120°

des Sektors D: 24°

(Skizze nicht maßstäblich)

Bei jeder Drehung des Rades wird mithilfe eines Zeigers genau ein Sektor ermittelt.
Der Spieler zahlt einen Einsatz von 1€ und erhält beim „Ziehen" des Sektors D 5€, des Sektors B 2€ und des Sektors C 1€ ausgezahlt. Bei der Ziehung des Sektors A erhält er nichts.
Ermitteln Sie, welchen Gewinn (erhaltenes Geld abzüglich des Einsatzes) ein Spieler im Schnitt erwarten kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Das Glücksrad G_3 sei in vier Sektoren eingeteilt.
Geben Sie die Größen der Zentriwinkel dieser Sektoren so an, dass sich die Wahrscheinlichkeiten, mit denen sie „gezogen" werden, wie 1:2:4:8 verhalten.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Gegeben ist eine Funktion f durch $y = f(x) = \left(3 - \frac{3}{x}\right)e^x \quad (x \in R, -2 \le x \le 2, x \ne 0)$.

a) Der Graph einer quadratischen Funktion g, der achsensymmetrisch zur y-Achse ist, verläuft durch den Punkt $P(0;-40)$. Außerdem ist die Nullstelle der Funktion f auch Nullstelle der Funktion g.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g und geben Sie alle Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f und g an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Der Graph der Funktion t ist Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $Q(1; f(1))$.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente t.

Im Intervall $0{,}8 \le x \le 1{,}2$ wird der Graph der Funktion f näherungsweise durch diese Tangente t beschrieben.
Ermitteln Sie die maximale Abweichung der Funktionswerte der Funktionen f und t in diesem Intervall.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Für jedes a $(a \in R, a > 0)$ ist eine Funktion h_a durch $y = h_a(x) = ax^2 - 20 \quad (x \in R)$ gegeben.
Es existiert ein Wert a, so dass die Funktionen f und h_a an der Stelle $x = 1$ die maximale Differenz ihrer Funktionswerte $f(x) - h_a(x)$ haben.
Berechnen Sie diesen Wert a und geben Sie die maximale Differenz an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt $M(3;-1;0)$ und für jedes a $(a \in R)$ eine Gerade g_a durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(r \in R)$ gegeben.

a) Begründen Sie, dass alle Geraden g, zueinander parallel verlaufen.

Es gibt einen Wert a, für den der Punkt M Schnittpunkt der Geraden g. mit der x-y-Koordinatenebene ist.

Ermitteln Sie diesen Wert a.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

M ist der Schnittpunkt der Diagonalen eines in der x-y-Koordinatenebene liegenden regelmäßigen Sechsecks ABCDEF mit dem Eckpunkt $A\left(3+\sqrt{3};-2;0\right)$.

b) Zeigen Sie, dass ein zum Punkt A benachbarter Eckpunkt des Sechsecks die Koordinaten $\left(3+\sqrt{3};0;0\right)$ besitzt.
Berechnen Sie die Koordinaten des anderen benachbarten Eckpunktes des Punktes A.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Das Sechseck ABCDEF ist Grundfläche von schiefen Pyramiden mit dem Volumen $18\sqrt{3}$, deren Spitzen auf der Geraden g_{-3} liegen.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller Punkte, die Spitzen einer solchen Pyramide sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 4