
Schriftliche Abiturprüfung Leistungskursfach Mathematik

- Erstertermin -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten**.

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A, B und C** sowie dem **Wahlteil D**.

Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.

Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Insbesondere müssen an den entsprechenden Stellen in der Lösungsdarstellung die gegebenenfalls verwendeten GTR-Programme genannt werden.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	35 BE,
im Teil B	25 BE,
im Teil C	15 BE,
im Teil D	15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung

1 grafikfähiger, programmierb. Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System (GTR)

1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)

Zeichengeräte

Beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jedes t ($t \in \mathbb{R}$) ist eine Funktion f_t durch $y = f_t(x) = \frac{e^x}{8 \cdot (t+x)^2}$ ($x \in D_{f_t}$) gegeben.

Außerdem ist eine Funktion g durch $y = g(x) = \frac{1}{32} \cdot e^x$ gegeben.

- a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f_t sowie die Nullstellen und die Polstellen dieser Funktion an.

Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_t den lokalen Minimumpunkt

$$P_{\text{MIN}_t} \left(2-t; \frac{e^2}{32e^t} \right) \text{ besitzt.}$$

Zeigen Sie, dass es genau einen Wert t gibt, für den der Graph der zugehörigen Funktion f_t keinen Schnittpunkt mit der y -Achse besitzt.

Geben Sie das Verhalten der Funktion f_t für $x \rightarrow -\infty$ an.

Weisen Sie nach, dass die Funktion f_t für $x < -t$ monoton wachsend ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 12

- b) Zeigen Sie, dass die lokalen Minimumpunkte aller Funktionen f_t auf dem Graphen der Funktion g liegen.
Überprüfen Sie rechnerisch, ohne Verwendung von Näherungswerten, ob der Punkt $P(2 \cdot \ln 32 + 2; 32e^2)$ auf dem Graphen der Funktion g liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

- c) Die Graphen der Funktionen f_0 und f_{-1} werden von Geraden $x = c$ ($c \in \mathbb{R}$, $c > 1$) geschnitten.
Ermitteln Sie den Wert c , für den die Differenz der Funktionswerte $f_{-1}(c) - f_0(c)$ minimal wird und geben Sie diese minimale Differenz an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Fortsetzung auf Seite 3

Fortsetzung Teil A: Analysis

d) Der Graph der Funktion f_{-1} wird im lokalen Minimumpunkt von einer Geraden h berührt.

Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden h .

Der Graph der Funktion f_{-1} , die y -Achse, der Graph der Funktion g und die Gerade h schließen eine Fläche A vollständig ein.

Skizzieren Sie den Sachverhalt in einem Koordinatensystem mit geeigneter Achseneinteilung.

Beschreiben Sie einen Weg zur Ermittlung des Inhaltes der Fläche A und geben Sie den Flächeninhalt an.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

e) Eine Gerade s wird durch die lokalen Extrempunkte der Graphen der Funktionen f_0 und f_{-1} bestimmt.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden s .

Bestimmen Sie die Koordinaten eines auf dem Graphen der Funktion g liegenden Punktes Q , in welchem der Graph der Funktion g den gleichen Anstieg wie die Gerade s hat.

Ermitteln Sie den Abstand des Punktes Q von der Geraden s .

Erreichbare BE-Anzahl: 8

Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind für jedes t ($t \in \mathbb{R}$, $t > 0$) die Punkte $A(6; 0; 0)$, $B_t(8; t^2; 0)$, $C_t(4; 3t; 0)$ und $D(2; 2; 0)$ gegeben.

Jedes Viereck AB_tC_tD ist Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S(5; 3; 6)$.

- a) Ermitteln Sie den Abstand des Punktes C_1 von der Ebene, in der die Seitenfläche AB_1S liegt.

Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen dieser Seitenflächenebene und der Grundflächenebene.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

- b) Berechnen Sie alle Werte t , für die die Seitenkante $\overline{B_tS}$ die Länge 23 hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

- c) Zeigen Sie rechnerisch, dass es genau einen Wert t gibt, für den die zugehörige Pyramide eine quadratische Grundfläche besitzt.

Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

- d) Wir betrachten die zu $t = 2$ gehörende quadratische Pyramide sowie zur x - y -Ebene parallele Ebenen, die diese Pyramide schneiden. Unter diesen Ebenen existiert genau eine Ebene, für die der Inhalt der Schnittfläche 25% des Inhaltes der Grundfläche der Pyramide beträgt.

Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- e) Berechnen Sie den Wert des Parameters t , für den die Seitenfläche SC_tD senkrecht zur Grundfläche ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- f) Berechnen Sie alle Werte t , so dass für die zugehörige Pyramide gilt:

$$\cos \angle B_tAD = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil C: Stochastik

In der theoretischen Fahrschulprüfung erhält ein Prüfungsteilnehmer einen Fragebogen mit genau 30 Fragen, von denen genau 6 Fragen zur Kraftfahrzeugtechnik und die restlichen Fragen zu Verkehrsregeln gestellt sind. Zur Vorbereitung der Prüfung stellt die Fahrschullehrerin einen Test zusammen. Sie will aus den 30 Fragen eines Prüfungsbogens genau 12 Fragen auswählen, wobei genau 2 Fragen zur Kraftfahrzeugtechnik enthalten sein sollen.

- a) Berechnen Sie die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten, wenn die Auswahl der Fragen unabhängig voneinander erfolgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Die theoretische Prüfung darf im Falle des Nichtbestehens nur genau einmal wiederholt werden. Ein Prüfungsteilnehmer besteht die theoretische Prüfung mit einer Wahrscheinlichkeit von 65% im ersten Versuch. 80% der Fahrschüler, die den zweiten Versuch wahrnehmen müssen, bestehen diesen.

- b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Fahrschüler die theoretische Prüfung besteht.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

- c) Eine Zulassung zur praktischen Prüfung erfolgt erst, wenn die theoretische Prüfung bestanden wurde. Außerdem ist bekannt, dass 25% der Fahrschüler, die die theoretische Prüfung im ersten Versuch nicht bestanden hatten, auch die praktische Prüfung nicht im ersten Versuch schaffen. Von den Fahrschülern, die die theoretische Prüfung im ersten Versuch schafften, bewältigen 90% auch die praktische Prüfung im ersten Versuch.

Die Fahrschule möchte, dass mindestens ein Schüler eines Kurses mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 99% die praktische Prüfung im ersten Versuch schafft.

Ermitteln Sie, wie viele Fahrschüler der Kurs mindestens umfassen muss, um das zu erreichen.

Der Prüfungsteilnehmer Philipp berichtet voller Stolz von seiner im ersten Versuch bestandenen praktischen Prüfung.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Philipp auch die theoretische Prüfung im ersten Versuch bestanden hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Eine Druckerei druckt täglich 10000 Fragebögen für die theoretische Fahrschulprüfung. Davon sind 4% Ausschuss. Ausschussstücke treten unabhängig voneinander auf. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Fragebögen einer Tagesproduktion, die nicht Ausschuss sind.

- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 9580 Fragebögen einer Tagesproduktion kein Ausschuss sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Fortsetzung auf Seite 6

Fortsetzung Teil C: Stochastik

- e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Fragebögen einer Tagesproduktion, die nicht Ausschuss sind, um mehr als 10 Stück vom Erwartungswert der Zufallsgröße X abweicht.
Begründen Sie, dass die Abschätzung dieser Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow nicht sinnvoll ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Für jedes t ($t \in \mathbb{R}, t > 0$) ist eine Funktion f_t durch $y = f_t(x) = t \cdot \sin(tx) + t$ ($x \in \mathbb{R}, x > 0$) gegeben.

- a) Berechnen Sie die Nullstellen und die Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Funktion f_t .

Weisen Sie die Art der Extrema nach.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

- b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f_t und der x -Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen eingeschlossen wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- c) Für jede Funktion f_t betrachten wir den Wendepunkt mit der kleinsten Abszisse. Bestimmen Sie den Wert t , für den der Abstand dieses Wendepunktes vom Koordinatenursprung minimal ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- d) Ermitteln Sie alle Werte t , für die die jeweils zugehörige Funktion f_t im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ mindestens 8 Nullstellen besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebenen E_1 durch $2x - y + 2z = 1$,

E_2 durch $2x + 2y + z = 4$ und die Gerade g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($r \in \mathbb{R}$)

gegeben. Für jedes t ($t \in \mathbb{R}$) verläuft eine Gerade k_t durch den Koordinatenursprung und den Punkt $P_t(-1; -1; t)$.

- a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E_1 und E_2 und geben Sie die Größe des Schnittwinkels beider Ebenen an.
Bestimmen Sie alle Werte t , für die sich die Gerade k_t und die Gerade g schneiden.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

- b) Es existieren Punkte auf der Geraden g , die von den Ebenen E_1 und E_2 den gleichen Abstand haben.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Die Ebene E_2 und die Koordinatenebenen begrenzen eine Pyramide.

- c) Skizzieren Sie die Pyramide in einem kartesischen Koordinatensystem.
Alle Geraden k_t befinden sich in einer Ebene F , in der auch die z -Achse des Koordinatensystems liegt.
Begründen Sie, dass die Ebene F Symmetrieebene der Pyramide ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

- d) Gegeben sei ein Punkt mit jeweils positiver x -, y - und z -Koordinate.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dessen Hilfe überprüft werden kann, ob der Punkt in der Pyramide liegt.

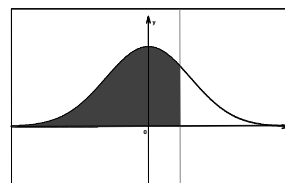
Erreichbare BE-Anzahl: 2

Materialien für Aufgaben zur Stochastik

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000