verwendeter GTR: Casio CFX-9850G

Teil A Analysis

gegeben $y = f(x) = e^x \cdot (2 - 0{,}5x) \quad (x \in R)$

a) - Angabe Nullstellen $f(x_N) = 0$

GTR: $x_N = 4$

Berechnung der NSt mit GTR
- Eingabe der Fkt f auf Position Y1 im GRAPH-Menü
- Anzeigen des Fktsgraphen durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)
- F5-Taste (G-Solve)
- F1-Taste (Root), die angezeigte Lösung ist die NSt von f

- Angabe Schnittpkt mit y-Achse $S_y(0; y_N = f(0))$

GTR: $S_y(0;2)$

Berechnung des S-Pkt des Graphen mit der y-Achse mit GTR
- Fkt f befindet sich auf Position Y1
- Wechsel in das GRAPH-Menü
- Anzeigen des Fktsgraphen durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)
- F5-Taste (G-Solve)
- F4-Taste (Y-ICPTt), die angezeigte Lösung (x und y) sind die Koordinaten des ges. Pkt

- Berechnung Extrempkte mit GTR

GTR: $H(3;10)$

Berechnung des Extrempkts mit dem GTR
- Fkt f befindet sich auf Position Y1
- Wechsel in das GRAPH-Menü
- Anzeigen des Fktsgraphen durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)
- F5-Taste (G-Solve)
- F2-Taste (MAX), die angezeigte Lösung (x und y) sind die Koordinaten des ges. Pkt

- rechnerischer Nachweis des Wendepkts und Angabe der Koordinaten

A mögliche Wendestellen $f''(x_W) = 0$

$$f'(x) = e^x \cdot (2 - 0{,}5x) + e^x \cdot (-0{,}5) = e^x (1{,}5 - 0{,}5x)$$
$$f''(x) = e^x \cdot (1{,}5 - 0{,}5x) + e^x \cdot (-0{,}5) = e^x (1 - 0{,}5x)$$
$$0 = e^{x_W}(1 - 0{,}5x_W) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = e^{x_W} & \text{keine Lösung} \\ 0 = 1 - 0{,}5x_W \Leftrightarrow x_W = 2 \end{cases}$$

B Nachweis der Existenz $f'''(x_W) \neq 0$

$$f'''(x) = e^x(1 - 0{,}5x) + e^x(-0{,}5) = e^x(0{,}5 - 0{,}5x)$$
$$f'''(x_W) = e^2(0{,}5 - 0{,}5 \cdot 2) = -0{,}5e^2 \neq 0$$

Aus A und B folgt, dass f genau einen Wendepkt besitzt und dessen x-Koordinate 2 ist.
Die Koordinaten des WP lauten: GTR $W(2;7{,}39)$

Berechnung der y-Koordinate des WP mit dem GTR
- Fkt f befindet sich auf Position Y1
- Wechsel in das TABLE-Menü
- Anzeigen der Wertetabelle durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)
- Eingabe der x-Koordinate (2) und drücken der EXE-Taste
- in Zeile 1 / Spalte 2 (YI) wird der gesuchte Wert angezeigt

b) gegeben ist $y = F(x) = e^x(2{,}5 - 0{,}5x) \quad (x \in R)$

- Nachweis, dass F Stammfkt von f ist F Stammfkt von f $\Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = e^x(2{,}5 - 0{,}5x) + e^x(-0{,}5) = e^x(2 - 0{,}5x) = f(x)$$

- Ermittlung derjenigen Stammfkt $F_c(x) = F(x) + c$ für die gilt: $S_y \in F_c : F_c(0) = 2$

$$2 = e^0(2{,}5 - 0{,}5 \cdot 0) + c = 2{,}5 + c \Leftrightarrow c = -0{,}5$$

$F_{-0,5}(x) = F(x) - 0{,}5$ ist die gesuchte Fkt

c) Ermittlung der Gleichung der Tangente am Graphen von f im Berührungspkt $R(0; f(0) = 2)$

GTR: $x_B = 0;\ f(x_B) = 0;\ f'(x_B) = m_t = 1{,}5$

Berechnung mit dem GTR
- Fkt f befindet sich auf Position Y1
- Wechsel in das TABLE-Menü
- Anzeigen der Wertetabelle durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)

- Eingabe der x-Koordinate (0 und drücken der EXE-Taste
- in Zeile 1 / Spalte 2 (YI) wird die y-Koordinate des Berührungspkts angezeigt
- in Zeile 1 / Spalte 3 (Y'I) wird der Tangentenanstieg angezeigt

Tangentengl in Pkt-Richtungs-Form: $t: \quad y-2=1{,}5(x-0)$

Tangentengl in expliziter Form: $y=1{,}5x+2$

Berechnung der durch t und f vollständig begrenzten Fläche

$$A=\left|\int_{x_{S1}\overset{GTR}{=}0}^{x_{S2}\overset{GTR}{=}3{,}59}(f(x)-t(x))dx\right| \overset{GTR}{=} 6{,}20FE$$

Lösung mit dem GTR
- Fkt f befindet sich auf Y1
- Fkt t befindet sich auf Y2

1. Berechnung der 1. Schnittstelle im RUN-Menü und Speicherung auf Variable A

   $Solve(Y1-Y2,-1 \rightarrow A$

   Wichtig: Y nicht als Drittbel. der Minus-Taste sondern mit VARS-F4 (GRPH)-F1 (Y) **!!!**
   SOLVE: OPTN-F4 (CALC)-F1
2. Berechnung der 2. Schnittstelle im RUN-Menü und Speicherung auf Variable B

   $Solve(Y1-Y2,5 \rightarrow B$
3. Berechnung der Fläche

   $Abs(\int(Y1-Y2,A,B))$

   Abs: OPTN-F6 (weiter)-F4 (NUM)- F1
   $\int$: OPTN-F4 (CALC)-F4

d) Extremwertproblem

Extremgröße: Flächeninhalt eines Dreiecks $A_D=\frac{1}{2}gh_g$

Nebenbedingungen:

$g=\left|\overline{AB}\right|=x_B-x_A=4-(-1)=5$

$h_g=f(u)=e^u(2-0{,}5u) \quad (u\in R, 0<u<4)$

Zielfkt: $\boxed{A_D(u)=\frac{5}{2}e^u(2-0{,}5u) \quad (u\in R, 0<u<4)}$

Berechnung der lokalen Extrempkte der Zielfkt mit GTR $H(3;25{,}1)$

Berechnung des Extrempkts mit dem GTR
- Fkt f befindet sich auf Position Y3
- Wechsel in das GRAPH-Menü
- Anzeigen des Fktsgraphen durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)
- F5-Taste (G-Solve)
- F2-Taste (MAX), die angezeigte Lösung (x und y) sind die Koordinaten des ges. Pkt

Für den Punkt $C_u(3;10)$ hat das dazugehörige Dreieck ΔABC_u den größtmöglichen Flächeninhalt. er beträgt 25,1FE.

e) Bestimmung des Radius desjenigen Kreises, der die Gerade $y=1{,}5x+2$ im Pkt $R(0;2)$ berührt und den Mittelpkt $M(x_M>0;0)$ hat

es gilt: $r=\left|\overline{MR}\right|$

x-Koordinate des Mittelpkt ist NSt. der Senkrechten s zu g durch R
Aufstellung der Gl. von s und Berechnung der NSt.

$x_B=0;\ y_B=2;\ m_s=-\frac{1}{m_t}=-\frac{2}{3} \qquad s: \quad y-2=-\frac{2}{3}(x-0) \quad NSt: x_{Ns}=\frac{-2}{-\frac{2}{3}}=3$

Berechnung des Radius

$r=\sqrt{(x_M-x_R)^2+(y_M-y_R)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

Teil B Geometrie / Algebra

geg.: Punkte $A(2;1;0)$; $B(10;-1;0)$; $C(11;3;0)$

a) - Nachweis, dass ΔABC rechtwinklig aber nicht gleichschenklig ist

Berechnung der Längen der Dreieckseiten

$$\overrightarrow{AB} = \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}: \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = c = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}\ ; \ \overrightarrow{BC} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}: \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = a = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{CA} = \vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}: \quad \left|\overrightarrow{CA}\right| = b = \sqrt{81+4} = \sqrt{85}$$

Da alle 3 Seiten unterschiedliche Länge haben ist das Dreieck nicht gleichschenklig.
Falls das Dreieck rechtwinklig ist, muss der rechte Winkel der Seite c gegenüberliegen, d.h. falls das Skalarprodukt der Seitenvektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ 0 ergibt, ist das Dreieck rechtwinklig.

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 8 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 8 - 8 = 0$$

- Berechnung des Flächeninhaltes des Dreiecks

$$A_D = \frac{1}{2} g h_g = \frac{1}{2} c \cdot a = \frac{1}{2}\sqrt{68} \cdot \sqrt{17} = 17$$

- Ermittlung der Gleichung des Umkreises des Dreiecks

Da das Dreieck rechtwinklig ist, ist der Umkreis des Dreiecks der THALES-Kreis, d.h. Mittelpkt des Kreises ist die Mitte der Hypotenuse:

$$M_{\overline{AC}}\left(\frac{2+11}{2}; \frac{1+3}{2}\right) = (6{,}5; 2)$$

Radius des Kreises ist die Hälfte der Hypotenuse:

$$r = \left|\overrightarrow{MA}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{85} = \sqrt{\frac{85}{4}} = \sqrt{21{,}25}$$

Gleichung des Kreises: $\boxed{k: \quad (x-6{,}5)^2 + (y-2)^2 = 21{,}25}$

b) Es gibt genau 2 derartige Punkte weil:

- Das Dreieck soll gleichschenklig sein, d.h. der Punkt P_i liegt auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AC}$
- Das Dreieck soll rechtwinklig sein, d.h. der Punkt P_i liegt auf dem THALES-Kreis der Strecke $\overline{AC}$
- Die Schnittmenge dieser beiden Punktmengen enthält genau 2 Punkte.

Es sei $\vec{s}$ derjenige senkrechte Vektor zur Strecke $\overline{AC}$, der die gleiche Länge $\overline{AC}$ hat.

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Damit können die Punkte wie folgt berechnet werden

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OM_{\overline{AC}}} + \frac{1}{2}\vec{s} \text{ und } \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OM_{\overline{AC}}} - \frac{1}{2}\vec{s}$$

Berechnung von P_1 $\quad \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} \quad P_1(5{,}5; 6{,}5)$

c) gesucht ist der Punkt D, der das Dreieck zum Drachenviereck ergänzt

D liegt auf THALES-Kreis und auf dem Kreis k_A um A mit dem Radius $\overline{AB}$

Gleichung von k_A: $\quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = 68$

Berechnung der Schnittpunkte von k, k_A

$$k \quad x^2 - 13x + 42{,}25 + y^2 - 4y + 4 = 21{,}25$$
$$x^2 - 13x + y^2 - 4y + 25 = 0$$
$$k_A \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 68$$
$$x^2 - 4x + y^2 - 2y - 63 = 0$$
$$k - k_A \quad -9x - 2y + 88 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{9}{2}x + 44$$

Einsetzen in k_A $\quad x^2 - 4x + \left(-\frac{9}{2}x + 44\right)^2 - 2\left(-\frac{9}{2}x + 44\right) - 63 = 0$

Lösung mit GTR $\quad x_1 = 8{,}4 \quad x_2 = 10$
$\quad y_1 = 6{,}2 \quad y_2 = -1$

Der Punkt D hat die Koordinaten $\boxed{D(8{,}4;6{,}2)}$

d) Berechnung des Volumens des Pyramidenstumpfes

Da die schneidende Ebene parallel zur x-y-Ebene durch den Mittelpkt der Strecke $\overline{AS}$ verläuft und die Grundfläche in der x-y-Ebene liegt, teilt die Ebene die Pyramide in halber Höhe.

(1) $\quad h_S = h_R = \frac{1}{2}h$

Nach Strahlensatz gilt dann für eine beliebige Seite x der Grundfläche und der entsprechenden Seite in der Restpyramide:

$$\frac{x_R}{x} = \frac{h_R}{h} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_R = \frac{1}{2}x$$

Damit gilt für den Flächeninhalt der Grundfläche der Restpyramide:

(2) $\quad A_{GR} = \frac{1}{2}a_R b_R = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{1}{2}b\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}ab\right) = \frac{1}{4}A_G$

Aus (1) und (2) folgt für das Volumen des Pyramidenstumpfes:

$$V_S = V_P - V_R = \frac{1}{3}A_G h - \frac{1}{3}A_{GR}h_R = \frac{1}{3}\left(A_G h - \frac{1}{4}A_G \frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{3}A_G\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{8}V_P$$

Volumen des Pyramidenstumpfes $\quad V_S = \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3}A_G \cdot h = \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3}A_D \cdot z_S = \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3}17\cdot 8 = \frac{119}{3}VE$

Teil C Stochastik

a) ZEA: Dreimaliges Ziehen aus der Lostrommel mit zurücklegen

$$P(E_1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{216} \approx 0{,}0046$$

$$P(E_2) = \frac{6}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278$$

b) ZEB Dreimaliges Ziehen aus der Lostrommel ohne zurücklegen

$$P(E_1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{120} \approx 0{,}0083$$

$$P(E_2) = \frac{6}{6}\cdot\frac{0}{5}\cdot\frac{0}{4} = 0$$

c) ZEC: Ziehung einer Kugel aus der Lostrommel und Feststellung ob es ein **A** ist
BERNOULLI-Experiment mit den Ereignissen

a ... ein A gezogen $\quad P(a) = \frac{1}{6}$

$\overline{a}$ ... kein A gezogen $\quad P(\overline{a}) = \frac{5}{6}$

ZEC18 18malige Nacheinanderausführung von ZEC (mit zurücklegen)
Die Zufallsgröße X gebe die Anzahl der gezogenen A in einer solchen Stichprobe an. ZEC18 ist eine Kette von unabhängigen BERNOULLI-Experimenten. Damit ist X eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern
Kettenlänge (Durchführungszahl): $\quad n = 18$

Erfolgswahrscheinlichkeit: $p = P(a) = \frac{1}{6}$

- Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C1

C1: es werden **mindestens** so viele A gezogen, wie zu erwarten sind

$$P(C1) = P(X \geq \mu) \overset{\mu = n \cdot p = 3}{=} P(3 \leq X \leq 18) \overset{GTR}{=} 0{,}5973$$

Berechnung mit dem GTR	Verwendung des Programmes BV
- Durchführungszahl:	18
- Erfolgswahrscheinlichkeit:	1/6
- minimale Erfolge:	3
- maximale Erfolge:	18

d) Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D, dass zunächst 4 A und danach 14 von A verschiedene Buchstaben gezogen werden

$$P(D) = \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{14} = 6 \cdot 10^{-5}$$

Das Ereignis D ist eines von N Ereignissen, die bewirken, dass die Zufallsgröße X den Wert 4 annimmt. Somit kann man die Wahrscheinlichkeit von E_3 berechnen, indem man die Wahrscheinlichkeit von D mit der Anzahl der Möglichkeiten 4 Plätze aus 18 möglichen zu wählen multipliziert.

$$P(E_3) = N \cdot P(D) = \binom{18}{4} \cdot P(D) \overset{GTR}{=} 0{,}1839$$

e) Diese Aussage ist falsch. Die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses (**genau 18** A werden gezogen) ist allerdings so niedrig, dass sie vom GTR durch Rundung unterschlagen wird.

Teil D1 Wahlaufgabe Analysis

geg. $y = f_t(x) = \frac{x-4}{x} - 2x + t = -2x + 1 + t - 4x^{-1} \quad (t \in R; x \in D_f)$

a) - Nachweis, dass $y = f_8(x) = \frac{x-4}{x} - 2x + 8 = \frac{-2x^2 + 9x - 4}{x}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{-2x^2+9x-4}{x} &= -\frac{2x^2}{x} + \frac{9x}{x} - \frac{4}{x} = -2x + 9 - \frac{4}{x} \quad (1) \\ \frac{x-4}{x} - 2x + 8 &= \frac{x}{x} - \frac{4}{x} - 2x + 8 = -2x + 9 - \frac{4}{x} \quad (2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \textit{Behauptung}$$

- Untersuchung der Funktion $y = f_8(x) = -2x + 9 - 4x^{-1} \quad (t \in R; x \in D_f)$

Definitionsbereich

Einschränkungen durch enthaltene elementare Fktn: $s_3(x) = -\frac{4}{x} \Leftrightarrow x \neq 0$

Einschränkungen durch Zusammensetzungsarten: keine

$D_{f_8}: x \in R, x \neq 0$

lokale Extrema und deren Art

1. lokales Minimum: $T(-1{,}41;14{,}66)$
2. lokales Maximum: $H(1{,}41;3{,}34)$

b) - Berechnung der Stammfkt von $y = f_8(x) = -2x + 9 - 4x^{-1} \quad (t \in R; x \in D_f)$

$$F_8(x) = -2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 9 \cdot \frac{1}{1}x^1 - 4\ln x + c = -x^2 + 9x - 4\ln x + c$$

- Berechnung derjenigen Fkt für die gilt: $F_8(1) = 0$ i

$$F_8(1) = -1^2 + 9 - 4\underbrace{\ln 1}_{=0} + c = 8 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$$

c) - Nachweis, dass f_t' unabhängig von t ist

$$f_t' = -2 - 4 \cdot \left(-1 \cdot x^{-2}\right) = -2 + 4x^{-2} = -2 + \frac{4}{x^2}$$

Da die erste Ableitung der Funktionen von t unabhängig ist, haben alle Funktionen gemeinsame Extremstellen. Die Extrempunkte unterscheiden sich nur durch ihre y-Koordinaten.

- Berechnung der lokalen Extrempunkte

A) Berechnung der Extremstellen $f_t'(x_E) = 0$

$$0 = -2 + \frac{4}{x_E^2} \Leftrightarrow x_E^2 = 2 \Leftrightarrow x_{E1} = -\sqrt{2}; x_{E2} = \sqrt{2}$$

B) Nachweis und Art der Extrema

$$f_t''(x) = 4\left(-2x^{-3}\right) = -\frac{8}{x^3}$$

$$f_t''(x_{E1}) = f_t''\left(-\sqrt{2}\right) = -\frac{8}{-\sqrt{2}\cdot 2} > 0 \Rightarrow \text{lok. Minimum}$$

$$f_t''(x_{E2}) = f_t''\left(\sqrt{2}\right) = -\frac{8}{\sqrt{2}\cdot 2} < 0 \Rightarrow \text{lok. Maximum}$$

C) Berechnung der y-Koordinate des Hochpunktes

$$f\left(\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2} + 1 + t - \frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} + 1 + t - 2\sqrt{2} = 1 + t - 4\sqrt{2}$$

lokales Maximum: $H\left(\sqrt{2}; 1 + t - 4\sqrt{2}\right)$

d) Aufstellung der Gleichung für die Funktion $g(x) = x^2 + px + q$

$$(1)\ g(x_1 = 0{,}5) = f_8(0{,}5) = -1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}p + q$$

$$(2)\ g(x_2 = 4) = f_8(4) = -1 = 16 + 4p + q$$

$$(1)'\ -\frac{5}{4} = \frac{1}{2}p + q$$

$$(2)'\ -17 = 4p + q$$

Lösung des Gleichungssystems mit GTR:

$p = -4{,}5; q = 1$

Teil D2 Wahlaufgabe Geometrie / Algebra

gegeben: Pkte $A(0;0;1)$, $B(4;3;9)$, $C(0;0;9)$

eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 1 cm

Bei Rotation des Dreiecks um z-Achse entsteht ein gerader Kreiskegel

a) - Begründung, dass ABC rechtwinklig ist

Berechnung der Innenwinkel mit GTR ergibt:

$\angle(ACB) = 90° \Rightarrow$ Dreieck ist rechtwinklig

- Berechnung des Kegelvolumens

$$V_K = \frac{1}{3}A_G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \quad r = \left|\overline{CB}\right| \overset{GTR}{=} 5;\ h = \left|\overline{AC}\right| = 8$$

$$V_K = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 8 \overset{GTR}{=} 209{,}44\,cm^3$$

b) Vorüberlegungen

Die Schnittfläche des Kegels mit der y-z-Ebene ist ein Dreieck. Ein Eckpunkt dieses Dreiecks ist der Punkt A.

Die Gerade s_1 durch A und P enthält eine Seite des Dreiecks.

Die Gerade s_2 verläuft ebenfalls durch A und den Punkt $P'(0;-2{,}5;5)$ der durch Spiegelung von P an der z-Achse entsteht. Sie bildet die 2. Seite des Dreiecks.

Die dritte Seite wird durch die Gerade s_3 erzeugt, die parallel zur y-Achse durch den Punkt C verläuft.

Die minimale Strecke ist gleich dem Abstand dieses Punktes P von einer der beiden Geraden s_2 oder s_3.

- Aufstellung der Gleichung von s_2

$$s_2:\quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AP'} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-2{,}5\\4\end{pmatrix}$$

- Berechnung des Abstandes von P zu s_2 mit GTR: $a_2 = 4{,}24$

- Aufstellung der Gleichung von s_3

$s_3: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OC} + s\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Berechnung des Abstandes von P zu s_3 mit GTR: $a_3 = 4$

Die minimale Strecke beträgt 4cm.

c) - Vektorgleichung für die Mantelfläche des Zylinders

Die Mantelfläche wird durch ein Geradenbüschel beschrieben. Alle diese Geraden verlaufen durch den Punkt A. Die Richtungsvektoren werden aus dem Vektor zwischen dem Punkt A und einem beliebigen Punkt auf dem Grundkreis gebildet.

Pkt. auf dem Grundkreis $K(x;y;z): x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \sqrt{25 - x^2}; z = 9 \Rightarrow K_x\left(x; \sqrt{25 - x^2}; 9\right)$

Gl. d. Mantelfläche: $M: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AK_x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} x - 0 \\ \sqrt{25 - x^2} - 0 \\ 9 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} x \\ \sqrt{25 - x^2} \\ 8 \end{pmatrix} \quad 0 \le r \le 1$

Nachweis, dass Q in M liegt:

$(1)\ \frac{9}{8} = 0 + rx$

$(2)\ \frac{3}{2} = 0 + r\sqrt{25 - x^2}$

$(3)\ 4 = 1 + 8r \Rightarrow r = \frac{3}{8} \overset{(1)}{\Rightarrow} \left(\frac{9}{8} = \frac{3}{8}x \Leftrightarrow x = 3\right) \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{3}{8}\sqrt{25 - 9} = \frac{3}{8}\sqrt{16} = \frac{3}{8}4 = \frac{3}{2}$

Der Punkt erfüllt die Vektorgleichung, also liegt er auf der Mantelfläche.