ZAHLENTHEORIE

Wiederhole aus den Aufgabensammlungen:
Klasse 6, S.30 : Der Euklidische Algorithmus zur Bestimmung des ggT(a;b)
Klasse 7, S.25: Grundgleichung der Zahlentheorie; Sätze aus der Teilbarkeitslehre
Klasse 8, S.26: Das Rechnen mit Kongruenzen (Modulrechnung)

1) Erarbeite im "Merkstoff" auf S.24 den Abschnitt " Lineare Kongruenzen und Restklassen" !

2) Ermittle die Lösungsmengen der folgenden linearen Kongruenzen und halte sie in Form von Restklassen fest:

a)	$3x \equiv 4 \ (5)$	b)	$9x \equiv 12 \ (7)$	c)	$12x \equiv 7 \ (10)$
d)	$21x \equiv 35 \ (77)$	e)	$23x \equiv 42 \ (5)$	f)	$88x \equiv 10 \ (84)$
g)	$88x \equiv 16 \ (84)$	h)	$19x \equiv 100 \ (11)$	i)	$104x \equiv 9 \ (60)$
j)	$57x \equiv 89 \ (101)$	k)	$62x \equiv 46 \ (478)$	l)	$29x \equiv 43 \ (79)$
m)	$1210x \equiv 393 \ (77)$	n)	$311x \equiv 97 \ (410)$	o)	$87x \equiv 129 \ (213)$

3) Arbeite im "Merkstoff" auf S.24 den Abschnitt "2.1. Lineare diophantische Gleichungen" durch!
a) Versuche, das "Lösbarkeitskriterium" zu beweisen!
b) Zeige am Beispiel der Gleichung $7x + 3y = 29$, wie man über die zugehörige lineare Kongruenz $7x \equiv 29 \ (3)$ zur Lösungsmenge $L = \{(x;y) \mid x = 2+3k \ ; \ y = 5 - 7k \ ; \ k \in Z\}$ gelangen kann!
c) Begründe, warum das Eulersche Reduktionsverfahren bei einer lösbaren diophantischen Gleichung $ax + by = c$ stets zum Ziel führt!
d) Wende das Eulersche Reduktionsverfahren auf eine diophantische Gleichung an, die keine Lösungen besitzt! Was kann man in einem solchen Fall allgemein feststellen?

4) Ermittle die Lösungsmengen der folgenden linearen diophantischen Gleichungen:

a)	$10x + 8y = 3$	b)	$10x + 8y = 6$	c)	$33x + 21y = 9$
d)	$111x + 21y = 3$	e)	$17x - 9y = 5$	f)	$9x - 15y = 25$
g)	$18x + 26y = 24$	h)	$2x + 6y = 4$	i)	$121x - 77y = 57$
j)	$22x - 443y = 159$	k)	$79x - 389y = 293$	l)	$104x - 60y = 92$
m)	$29x + 27y = 56$	n)	$331x - 724y = 461$	o)	$189x + 411y = 257$
p)	$71x + 29y = 43$	q)	$29x - 79y = 43$	r)	$119x - 79y = 175$

5) Ermittle die Lösungsmengen der folgenden linearen diophantischen Gleichungssysteme:

a) $$\begin{aligned} x + y + z &= 100 \\ 50x + 30y + 2z &= 2220 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + y + z &= 100 \\ 52x + 29y + 3z &= 2500 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3x - y + z &= 14 \\ 2x + 3y - z &= 23 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 12x - 21y + 15z &= 17 \\ 3x + 13y - 7z &= 1 \end{aligned}$$

6) In einem Betrieb sind einige gelernte und einige ungelernte Arbeiter beschäftigt. Jeder gelernte Arbeiter erhält für seine Arbeit 1740 Euro und jeder ungelernte Arbeiter erhält 1020 Euro ausgezahlt. Insgesamt wurden 41100 Euro ausgezahlt.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, wie viel gelernte und wie viel ungelernte Arbeiter in diesem Betrieb beschäftigt sind!

7) Ermittle alle natürlichen Zahlen, die bei Division durch 19 den Rest 13 sowie bei Division durch 29 den Rest 19 lassen!

8) Ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 120 als Summe von drei natürlichen Zahlen darzustellen, so dass die folgende Bedingung erfüllt ist:
Multipliziert man den 1. Summanden mit 36, den 2. Summanden mit 16 sowie den 3. Summanden mit 3 und addiert diese drei Produkte, dann erhält man 1821.

9) Ein Betrieb kaufte in unterschiedlicher Stückzahl drei verschiedene Einzelteile, die 52 Euro, 29 Euro bzw. 3 Euro kosteten. Es wurden insgesamt 100 Einzelteile gekauft, und die Gesamtkosten betrugen 2500 Euro.
Untersuche, ob man aus diesen Angaben eindeutig ermitteln kann, wie viel Stück von jedem dieser Einzelteile gekauft wurden!"

10) Ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 700 so als Summe zweier natürlicher Zahlen darzustellen, dass die eine Zahl bei Division durch 17 den Rest 3, die andere Zahl bei Division durch 23 den Rest 21 lässt!

11) Ermittle die Lösungsmengen der folgenden nichtlinearen diophantischen Gleichungen:

a) $3x^2 + 3y^2 - 18x + 12y + 27 = 0$ b) $xy + 3x - 2y - 3 = 0$
c) $2x^3 + xy - 7 = 0$ d) $23x^2 - 5y^2 + 1983 = 0$
e) $x^2 - y" = x + y$ f) $3x^2 - y^2 = y - x$ und x, y sind Primzahlen

12) Arbeite im "Merkstoff" auf S.25 den Abschnitt "2.2. Nichtlineare diophantische Gleichungen" durch!
Stelle eine Liste pythagoreischer Grundtripel auf, indem du in dem angegebenen Satz für u und v alle in Betracht kommenden Werte von 1 bis 10 wählst!
Äußere Vermutungen über die Eigenschaften solcher Tripel!

13) Beweise, dass für jedes pythagoreische Grundtripel $(x;y;z)$ gilt:

a) Ein Primfaktor p kann niemals in mehr als einer der drei Zahlen auftreten.
b) Niemals ist sowohl x als auch y eine ungerade Zahl, und stets ist z eine ungerade Zahl.
c) Die Zahl 3 teilt stets entweder x oder y, niemals aber z.
d) Das Produkt xyz ist stets durch 60 teilbar.

14) Eigne dir aus dem "Merkstoff" auf S.26 im Abschnitt "3. Das Rechnen mit Restklassen" die Definitionen für "Summe"," Produkt" und "Kehrwert" von Restklassen an!
Fülle die "Additionstabellen" und "Multiplikationstabellen" auf S.3 und S.4 aus! (Dabei sollen die Restklassen jeweils durch die kleinsten nichtnegativen Reste repräsentiert werden.)

15) Beantworte folgende Fragen:

a) Unter welchen Voraussetzungen hat die Gleichung $[a]_m \cdot [x]_m = [b]_m$ stets genau eine Lösung?
b) Unter welchen Voraussetzungen besitzt jede Restklasse genau einen Kehrwert?
c) Welche Restklassen sind stets gleich ihrem Kehrwert?

Additionstabelle

Modul 5

+	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Modul 6

+	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

Multiplikationstabellen

Modul 5

·	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Modul 9

·	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

Modul 7

·	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Modul 8

·	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

Modul 6

·	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Modul 10

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

Potenztabellen

Modul 5

a^n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									

Modul 6

a^n	0	1	2	3	4	5
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Modul 8

a^n	0	1	2	3	4	5	6	7
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

Modul 7

a^n	0	1	2	3	4	5	6
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

16) Eigne dir aus dem "Merkstoff" auf S.26 die Definitionen für folgende Eigenschaften einer zweistelligen Operation o in einer Menge M an:

(1) Uneingeschränkte Ausführbarkeit; (2) Assoziativität; (3) Existenz eines neutralen Elements; (4) Invertierbarkeit; (5) Kommutativität.
Untersuche, welche dieser Eigenschaften folgende Operationen in den angegebenen Mengen besitzen bzw. nicht besitzen:

a)	Natürliche Zahlen	Addition
b)	Natürliche Zahlen	Multiplikation
c)	Natürliche Zahlen	Bildung des ggT
d)	Ganze Zahlen	Addition
e)	Positive rationale Zahlen	Addition
f)	Positive rationale Zahlen	Multiplikation
g)	Rationale Zahlen außer 0	Multiplikation
h)	Positive reelle Zahlen	Bildung des arithmetischen Mittels
i)	Positive reelle Zahlen	Bildung des geometrischen Mittels
j)	Verschiebungen $V(\overrightarrow{PP'})$	Nacheinanderausführung
k)	Spiegelungen $Sp(g)$	Nacheinanderausführung
l)	Drehungen $Dr(M;\varphi)$	Nacheinanderausführung
m)	Restklassen $[a]_m$	Addition
n)	Restklassen $[a]_m$ außer $[0]_m$	Multiplikation
o)	Restklassen $[a]_p$ außer $[0]_p$	Multiplikation (wobei p eine Primzahl ist)

17) Fülle die Potenztabellen für a_n nach dem Modul m auf S.4 aus!
Unter welchen Voraussetzungen treten bei $[a^n]_m$ alle Restklassen (außer $[0]_m$) auf?
Wovon hängt die Länge der in den Folgen von Restklassen auftretenden Zyklen ab?
Untersuche weitere Potenztabellen nach einem Primzahlmodul p !

18) Arbeite im "Merkstoff" auf S.26 den Abschnitt "4. Der kleine Satz des Fermat ..." durch!
Erläutere die Sätze (1) bis (4) durch selbstgewählte Beispiele!
Weise durch jeweils mindestens ein Gegenbeispiel nach, dass die Aussagen (1) bis (4) falsch sein können, wenn p keine Primzahl ist!

19) Beweise folgende Aussagen (wobei die auftretenden Leerstellen auszufüllen sind):

a)	Wenn $z = 31^{100} - 1$,	dann	$101 \mid z$.
b)	Wenn $z = 52^{52} - 1$,	dann	.... z .
c)	Wenn $z = 12^{31} - 12$,	dann	$31 \mid z$.
d)	Wenn $z = 25^{17} - 25$,	dann	.... z .
e)	Wenn $z = a^p - a$ und p Primzahl und ggT(a;p) = 1,	dann	$p \mid z$.
f)	Wenn $z = 2^{20} - 2^{11} + 1$,	dann	$121 \mid z$.
g)	Wenn $z = 71^6 - 7^{14} - 7^{12} + 1$,	dann	$15 \mid z$.
h)	Wenn $z = 8^{34} - 8^{18} - 8^{16} + 1$,	dann	$323 \mid z$.

20) a) Welchen Rest lässt 78^{136} bei Division durch 137 ?
b) Welchen Rest lässt 23^{31} bei Division durch 31 ?
Bilde analoge Aufgaben!

21) Gesucht ist eine positive ganze Zahl n , für die $z = 6^n - 1$ durch 385 teilbar ist..

22) Gesucht ist die kleinste positive ganze Zahl n , für die $z = 5^n - 1$ durch 7, durch 11 , durch 13 und durch 17 teilbar ist!

23) Gesucht sind alle Paare (n;k) natürlicher Zahlen, für die $z = n^k - 1$ durch 17 teilbar ist!

24) Beweise: Wenn q eine Primzahl größer 70 ist, dann ist $z = q^{40} + 368$ stets durch 41 teilbar.
Lässt sich dieser Satz verallgemeinern, indem man seine Voraussetzung abschwächt?

25) Ermittle alle natürlichen Zahlen x , die folgende Bedingungen erfüllen:
(a) x ist das Quadrat einer natürlichen Zahl.
(b) Vergrößert man x um 24 , dann erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.
(c) Vermindert man x um 24 , dann erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

26) Ermittle alle natürlichen Zahlen n , für die die Zahl $1 + 4\cdot 9^{2n}$ eine Primzahl ist!

27) Ermittle alle Primzahlen p , für die $3p + 4 = z^2$ gilt, wobei z eine natürliche Zahl ist!

28) Ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 100 als Summe von drei natürlichen Zahlen darzustellen, so dass folgende Bedingung erfüllt ist:
Multipliziert man den 1. Summanden mit 50 , den 2.Summanden mit 30 sowie den 3. Summanden mit 2 und addiert diese drei Produkte, dann erhält man die Zahl 2220.

29) Ermittle alle Paare (a;b) aus positiven ganzen Zahlen a, b, die die Bedingung erfüllen, dass von den folgenden vier Aussagen (1), (2), (3), (4) genau drei wahr sind und eine falsch ist!
Die Aussagen lauten:
(1) $b|(a+1)$,
(2) $a = 2b + 5$,
(3) $3|(a+b)$,
(4) $(a+7b)$ ist eine Primzahl .

30) Ermittle (in Abhängigkeit vom ganzzahligen Parameter a) die Menge aller Paare (x;y) von ganzen Zahlen, für die $x^2 - a^2y^2 = 1$ gilt!

31) Gesucht wird die kleinste und die größte neunstellige Primzahl, deren Ziffern die neun Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sind!

32) Untersuche, ob es eine natürliche Zahl $n > 0$ gibt, für die die Zahl $z = 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ eine Primzahl ist!

33) Untersuche, ob es eine positive ganze Zahl z gibt, die folgende Bedingungen erfüllt:
(a) z ist durch 450 teilbar;
(b) z enthält als Ziffern nur die 0 oder die 1 ;
(c) z ist eine zehnstellige Zahl.

34) Untersuche, ob es endlich viele oder ob es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die sich nicht als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen.

35) Untersuche, unter welchen Bedingungen für k die Zahlen
$z(k) = 16k^4 - 40k^2 + 9$, $k = 2, 3, 4, \ldots$ durch 5 teilbar sind!

36) Beweise: Wenn q eine ganze Zahl ist, dann ist $\frac{q^3 - q}{6}$ ebenfalls eine ganze Zahl

37) Beweise: Wenn x, y, z von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, dann sind

$$a = \frac{(x+y\sqrt{z})^2 + (x - y\sqrt{z})^2}{2}, \qquad b = \frac{(x+y\sqrt{z})^2 - (x - y\sqrt{z})^2}{2\sqrt{z}}, \qquad c = a^2 - (x^2 - y^2 z)^2$$

ebenfalls natürliche Zahlen und b ist ein Teiler von c .

38) Beweise: Wenn x und y von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, dann ist die Zahl $z = 4x^3 + 12x^2 y - 9xy^2 - 27y^3$ stets das Produkt aus drei ganzen Zahlen.
Unter welchen Bedingungen sind keine zwei dieser drei Zahlen einander gleich ?

39) Beweise: Es gibt keine vierstellige Zahl z, die folgende Bedingungen erfüllt:
(a) Die erste und die dritte Ziffer von z sind einander gleich.
(b) Die zweite und die vierte Ziffer von z sind einander gleich.
(c) z ist eine Quadratzahl.

40) Beweise: Wenn p eine Primzahl mit $p \geq 3$ und n eine natürliche Zahl mit $n > 0$ ist, dann ist die Zahl $(3n - 1)p^2 + 1$ keine Primzahl.

41) Beweise: Die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist niemals durch 3 teilbar.

42) Beweise: Die Zahl $z = 2^{87} - 2^{85} - 2^5 + 2^3$ ist durch 1992 teilbar.

43) Beweise: Für beliebige natürliche Zahlen x, y, z gilt stets
$x^3 + y^3 + z^3 \equiv x + y + z \ (6)$.

44) Beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 0$ lässt sich 9^n als Summe von 3^n aufeinanderfolgenden Zahlen darstellen.

45) Beweise: Wenn p eine Primzahl mit $5 < p < 37$ ist, dann ist jede aus $p - 1$ gleichen Ziffern bestehende Zahl durch p teilbar.
Lässt sich diese Satz verallgemeinern?

46) Beweise, dass es kein Paar von Brüchen gibt, deren Summe und deren Produkt beide ganzzahlig sind!

47) a) Sei $s(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$. Berechne $s(2)$, $s(3)$ und $s(4)$!
Äußere eine Vermutung, wie sich $s(n)$ allgemein berechnen lässt!
b) Beweise, dass die Summe $s(998)$ sowohl durch 37 als auch durch 499 teilbar ist!
c) Ermittle die kleinste natürliche Zahl n, für die die Summe $s(n)$ durch 17 teilbar ist!

48) Beweise, dass die Gleichung $x^2 + 2ax + 2b = 0$ keine natürlichen Zahlen als Lösungen besitzen kann, wenn a und b ungerade Zahlen sind.

49) Sei a_1 eine beliebige dreistellige Zahl. Bilde aus ihren Ziffern die größte Zahl und die kleinste Zahl und berechne deren Differenz a_2. Berechne aus a_2 analog die Zahl a_3 usw.

$$\text{Beispiel: } a_1 = 434 \rightarrow a_2 = \begin{array}{r} 443 \\ \underline{-344} \\ 099 \end{array} \rightarrow a_3 = \begin{array}{r} 990 \\ \underline{-099} \\ 891 \end{array} \rightarrow a_4 = \begin{array}{r} 981 \\ \underline{-189} \\ 792 \end{array}$$

a) Berechne im angegebenen Beispiel die Zahlen a_5 , a_6 , a_7 , a_8 !
Berechne zu selbstgewählten Anfangszahlen die zugehörigen Folgen!
Was fällt dir auf?
Äußere Vermutungen! Versuche, diese Vermutungen zu beweisen!
b) Untersuche analoge Folgen mit zweistelligen Anfangszahlen! Vermute und beweise!
c) Untersuche analoge Folgen mit vierstelligen Anfangszahlen!
Vergleiche die Ergebnisse der drei Teilaufgaben!

50) Durch folgende Gleichungen wird eine Gesetzmäßigkeit vorgegeben:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2$$
$$9^2 + 40^2 = 41^2$$

a) Stelle eine Vermutung für diese Gesetzmäßigkeit auf und überprüfe, ob sich diese Gesetzmäßigkeit in den nächsten drei Gleichungen fortsetzt!

b) Formuliere die Gesetzmäßigkeit und beweise sie!

ARITHMETIK

Wiederhole aus den Aufgabensammlungen:
Klasse 7, S .25-26: Aussageformen, Mengen, Abbildungen, Terme
S.26 Regeln für das äquivalente Umformen von Gleichungen und Ungleichungen
S.27: Einige wichtige Ungleichungen
Klasse 8, S.30: Funktionen und ihre Graphen

1) Löse graphisch und rechnerisch:

a) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ x - 6y &= 18 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ 4x + 6y &= 1 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ 4x + 6y &= 12 \end{aligned}$

2) Gib je ein lineares Gleichungssystem vom Typ [2;2] an, dessen Lösungsmenge leer ist bzw. unendlich viele Zahlenpaare als Lösungen besitzt!

3) Arbeite im "Merkstoff" auf S.27 den Abschnitt "1. Lineare Gleichungssysteme; der Gauß-sche Algorithmus" durch!

4) Ermittle die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme (von denen einige einen reellen Parameter a enthalten):

a) $\begin{aligned} x - 2y + z &= 5 \\ 2x - 5y + z &= 10 \\ 3x - 7y - z &= 0 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - 2y + z &= 5 \\ 2x - 5y + z &= 10 \\ 3x - 7y - z &= 15 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x - 2y + z &= 5 \\ 2x - 5y + z &= 10 \\ 3x - 7y - z &= 3a \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x - 2y + z &= 5 \\ 2x - 5y + z &= 10 \\ 3x - 7y + 2z &= a \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} x - 2y + z &= -2 \\ 2x + y + 3z &= 9 \\ 3x + 2y + 2z &= 7 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} x - 2y + z &= -2 \\ 2x + y + 3z &= 9 \\ 3x + 2y + az &= 7 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} x + 3y + 2z + u &= 3 \\ 2x - y - 3z - 2u &= 0 \\ -2x + 2y + 3z - u &= 5 \\ 3x - 2y - 2z + 3u &= -4 \end{aligned}$ h) $\begin{aligned} x + 2y - 3z + u &= -3 \\ 2x + 3y + 2z - u &= 0 \\ 2x + 3y + z + u &= 4 \\ 3x + 3y + z + 2u &= 5 \end{aligned}$ i) $\begin{aligned} x - 2y - 3z + u &= 0 \\ 3x - 8y - 8z + 5u &= 6 \\ x - 5y - z + 5u &= 11 \\ 2x - 6y - 3z + 8u &= 14 \end{aligned}$

5) Seien a, b, c gegebene Größen, seien p, q, r Hilfsgrößen und sei x die gesuchte Größe. In folgenden (nicht linearen) Gleichungssystemen sind die Hilfsgrößen zu eliminieren, und die gesuchte Größe ist durch die gegebenen Größen auszudrücken:

a)
$$\begin{aligned} ab - 2p &= 0 \\ qx - 2p &= 0 \\ a^2 + b^2 - q^2 &= 0 \end{aligned}$$
(Sei $a, b, q > 0$)

b)
$$\begin{aligned} x^2 - (\tfrac{a}{4} + p)^2 + \tfrac{a^2}{16} &= 0 \\ x^2 - (a - p)^2 + \tfrac{a^2}{4} &= 0 \end{aligned}$$
(Sei $a > 0$)

c)
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - r^2 &= 0 \\ x^2 + p^2 - a &= 0 \\ x^2 + q^2 - b^2 &= 0 \\ x - pq &= 0 \\ r - p - q &= 0 \end{aligned}$$
(Sei $a, b, r > 0$)

d)
$$\begin{aligned} x + p + q - b &= 0 \\ ax - pq &= 0 \\ x^2 - p^2 - q^2 &= 0 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x + p + q - a &= 0 \\ bx - pq &= 0 \\ a^2 - p^2 - q^2 &= 0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x^2 - (\tfrac{c}{2} - q)^2 - p^2 &= 0 \\ b^2 - (c - q)^2 - p^2 &= 0 \\ a^2 - p^2 - q^2 &= 0 \end{aligned}$$

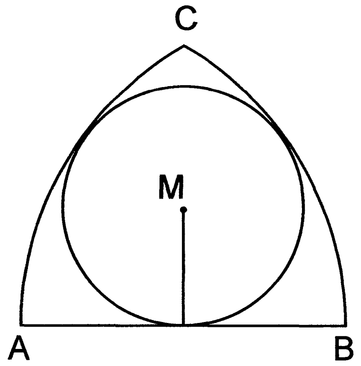
g)
$$\begin{aligned} 4x^2 + a^2 - 4p^2 &= 0 \\ x + p - a &= 0 \end{aligned}$$

6) Für ein rechtwinkliges Dreieck ABC (mit dem rechten Winkel bei C und dem Höhenfußpunkt H) gelte $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CH} = h$.
Der Umfang des Dreiecks werde mit u, sein Inhalt mit J bezeichnet.
Löse folgende Bestimmungsaufgaben:

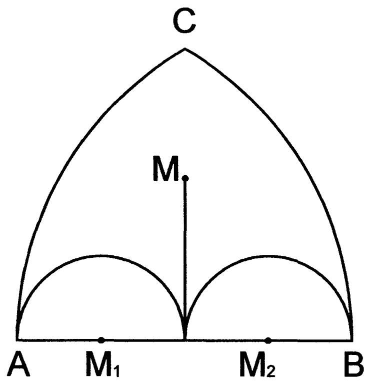
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
Gegeben	a, b	a, c	a, J	a, J	c, u	h, u	u, J	u, J
Gesucht	h	h	h	u	h	c	c	a

7) Es ist die Länge s der Seitenhalbierenden $\overline{CS}$ eines Dreiecks ABC durch die Seitenlängen a, b, c dieses Dreiecks auszudrücken!

8) Eine dreieckige Fläche wird von einer Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge a sowie von zwei Kreisbogen begrenzt, die zu den Kreisen $k(A;a)$ bzw. $k(B;a)$ gehören.
Dieser dreieckigen Fläche sei ein Kreis mit dem Radius r einbeschrieben, der alle drei Begrenzungslinien berührt.
Drücke r durch a aus!
(Ein Nachweis für die eindeutige Existenz des Inkreises wird nicht verlangt.)



9) Über der Seite $\overline{AB}$ der in Aufgabe 8) beschriebenen dreieckigen Fläche seien zwei Halbkreise mit dem Radius $a/4$ errichtet.
Zu ermitteln ist der Abstand des Mittelpunktes M des Kreises, der dem von diesen Halbkreisen und den beiden Kreisbogen begrenzten Kreisbogenviereck einbeschrieben ist, von der Strecke $\overline{AB}$ (vgl. nebenstehende Figur).
(Ein Nachweis für die eindeutige Existenz dieses Kreises mit dem Mittelpunkt M wird nicht verlangt.)



10) Eine gerade Pyramide mit der Seitenkantenlänge s (in cm) hat als Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b (in cm).
Zu ermitteln ist der Inhalt V dieser Pyramide (in cm^3).

11) Von einem geraden Pyramidenstumpf mit quadratischer Grundfläche seien gegeben die Länge h der Höhe des Stumpfes, die Seitenlänge a_1 der Grundfläche sowie die Seitenlänge a_2 der (quadratischen) Deckfläche.
Drücke das Volumen V dieses Stumpfes durch a_1, a_2 und h aus!

12) Es ist das Volumen V eines regulären Tetraeders als Funktion der Länge h seiner Höhe auszudrücken!

13) Aus einem Zylinder mit dem Grundkreisradius r soll ein gerader Kegelstumpf herausgeschnitten werden, der mit dem Zylinder den Grundkreis und die Höhe gemeinsam hat.
Wie groß muss der Deckkreisradius dieses Kegelstumpfes gewählt werden, wenn der Inhalt des Stumpfes halb so groß sein soll wie der des Zylinders?

14) Ein eiserner Kegel mit dem Grundkreisradius r soll einem (ebenfalls geraden) Korkzylinder von derselben Höhe und Achsenlage so eingefügt werden, dass das Ganze bis 3/4 der Höhe in Wasser eintaucht.
Wie groß muss der Grundkreisradius des Korkzylinders gewählt werden?

15) Arbeite im "Merkstoff" auf S. 28 den Abschnitt "2. Quadratische Gleichungen und Ungleichungen" durch!

16) Ermittle die Lösungsmengen folgender Gleichungen (über dem Bereich der reellen Zahlen):

a) $\frac{3x}{x-2} + 1 + \frac{4}{x-2} = 2 + \frac{3(x+1)}{x-2} + \frac{1}{x-2}$;

b) $\frac{1}{x^2-4x+4} + \frac{1}{2x^2-8} = \frac{1}{x^2+2x}$;

c) $\frac{2x-3}{16x-8} - \frac{x}{8x+4} = \frac{x^2+x+1}{8x^2-2}$.

17) Ermittle die Lösungsmenge folgender Gleichung in Abhängigkeit von den reellen Parametern a und m!
$$\frac{x}{x+m} + \frac{x}{x-m} = 2a^2 .$$

18) Es ist jeweils eine Gleichung zu bestimmen, die die angegebene Lösungsmenge besitzt:

a) $L = \{2; 3\}$; b) $L = \{-1; 4\}$; c) $L = \{-2; 2\}$; d) $L = \{a; 4\}$;

e) $L = \{x_1; x_2\}$; f) $L = \{x_1; x_2; x_3\}$; g) $L = \{1; 2; 3\}$; h) $L = \{-1; 1; 3\}$;

i) $L = \{-2 ; 0 ; 2\}$; k) $L = \{x_1; x_2; x_3; x_4\}$.

19) Existieren reelle Koeffizienten a, b so, dass die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + 4 = 0$ jeweils die angegebene Lösungsmenge besitzt?

Wenn ja, wie lauten dann diese Koeffizienten?

a) $L = \{-2; 1; 2\}$; b) $L = \{-2; 1; 3\}$; c) $L = \{-2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}\}$.

20) Löse folgende Ungleichungen im Kopf!

a) $x^2 - 5x + 6 < 0$; b) $x^2 - 5x + 6 > 0$; c) $x^2 - 5x + 7 < 0$;

d) $x^2 - 5x + 7 > 0$; e) $x^2 + 3x - 4 < 0$; f) $x^2 + 3x - 4 > 0$;

g) $-x^2 - 3x + 4 < 0$; h) $-x^2 - 3x + 4 > 0$.

21) Arbeite im "Merkstoff" auf S. 29 den Abschnitt "3. Gleichungen höheren Grades" durch!

22) Ermittle die Lösungsmengen folgender Gleichungen :

a) $x^3 + x - 10 = 0$; b) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$; c) $x^3 - 3x^2 - 7x - 3 = 0$;

d) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$; e) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$; f) $x^6 - x^4 - x^2 - 2 = 0$.

23) Ermittle (in Abhängigkeit von a und b) die dem Betrag nach kleinere Lösung der Gleichung $x^2 + 2ax - b^2 = 0$.

24) Ermittle alle Werte des Parameters a , für die eine der beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0 \ .$$

das Quadrat der anderen Lösung ist!

25) Arbeite im "Merkstoff" auf S. 30 den Abschnitt "4. Transformation von Funktionsgraphen" durch!

26) Zeichne die Graphen der durch folgende Gleichungen dargestellten Funktionen! [Charakteristische Punkte und bei d) auch die Asymptoten mit einzeichnen!]

a) $y = x^2$, $x \in \langle -1; 2 \rangle$; $y = (x-4)^2 - 2$; $y = -(x+3)^2 + 3$;

b) $y = x^2$, $x \in \langle -2; 2 \rangle$; $y = \frac{1}{2} x^2$; $y = -2x^2$; $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$;

c) $y = \sqrt{x}$, $x \in (0; 4)$; $y = \sqrt{x-3}$; $y = \sqrt{x-2} + 2$; $y = -\sqrt{x+2} - 1$;

d) $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{x-3}$; $y = \frac{1}{x-3} + 4$; $y = \frac{1}{-x-3} + 4$.

27) Löse folgende Gleichungen graphisch und gib an, welche der Lösungen genau und welche nur näherungsweise abgelesen werden können!
Löse a_2) und a_3) auch rechnerisch!

a_1) $\frac{1}{x-2} - (x-1)^2 = 0$; b_1) $|x^2 - 4x + 3| - x + 1 = 0$;

a_2) $\frac{1}{x-2} - (x-1)^2 + 3 = 0$; b_2) $|x^2 - 4x + 3| + x + 1 = 0$;

a_3) $\frac{1}{x-1} + x^2 = 0$; b_3) $|x^2 - 4x + 3| - \sqrt{x} + 1 = 0$; b_4) $|x^2 - 4x + 3| - \sqrt{x} - 1 = 0$

28) Ermittle die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0$; b) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 0$;

c) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \geq 0$; d) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \leq 0$;

e) $x^3 - x + 2x - 2 \geq 0$; f) $x^3 - x^2 + 2x - 2 \leq 0$.

29) Ermittle alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen r , für die die Gleichung

$$\frac{2x}{r(x+r)} + \frac{1}{x-2r} = \frac{4x-r+6}{r(x-2r)(x+r)}$$

a) genau zwei verschiedene reelle Lösungen,
b) genau eine reelle Lösung,
c) keine reelle Lösung
besitzt!

30) Beweise folgende Aussagen:

(a) $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl .
(b) $\sqrt{3}$ ist eine irrationale Zahl .

31) Entscheide von jeder der drei folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist!

(a) Das Produkt zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(b) Die Summe zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(c) Die Summe aus einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets eine irrationale Zahl.

32) Beweise folgenden Satz:
Wenn p eine Primzahl ist, dann ist $\sqrt{p}$ eine irrationale Zahl.

33) Beweise folgenden Satz:
Wenn a und b zwei von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, die nicht beide Quadratzahlen sind und für die $\frac{a}{b}$ ein so weit wie möglich gekürzter Bruch ist, dann ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$ eine irrationale Zahl.

34) Beweise folgende Aussage:
$z = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ ist eine irrationale Zahl .

35) Beweise folgende Aussage:
$z = \sqrt{192 + 96\cdot\sqrt{3}} + \sqrt{192 - 96\cdot\sqrt{3}}$ ist eine rationale Zahl .

36) Untersuche, ob es rationale Zahlen a und b gibt, für die $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ gilt!

37) Sei $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$ mit $x \in N$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$.

Entscheide von jeder der folgenden beiden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist!

(a) Es gibt unendlich viele Paare (x;y) solcher natürlicher Zahlen, für die z rational ist.

(b) Es gibt unendlich viele Paare (x;y) solcher natürlicher Zahlen, für die z irrational ist.

GEOMETRIE

Wiederhole aus den Aufgabensammlungen:
Klasse 6, S. 11: Umformen und Umkehren von Sätzen
Klasse 7, S. 27 - 28: Musterlösung für eine Konstruktionsaufgabe
Klasse 8, S. 28: Indirekte Beweise
S. 31: Das Lösen von Bestimmungsaufgaben

1) Sei ABCD ein Trapez mit $AB \parallel CD$ und $AC \perp BD$.
Beweise, dass dann stets $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (\overline{AB} + \overline{CD})^2$ gilt!

2) Sei ABCD ein Rechteck, für das $\overline{AB} = a\sqrt{2}$ und $\overline{BC} = a$ gilt; sei F der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BF}$ aufeinander senkrecht stehen!

3) Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck. Der Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AC}$ und dem Mittelpunkt O schneide die Hypotenuse $\overline{AB}$ im Punkt D. Die Tangente an diesen Kreis im Punkt D schneide die Kathete $\overline{BC}$ im Punkt E.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen $EO \parallel AB$ folgt!

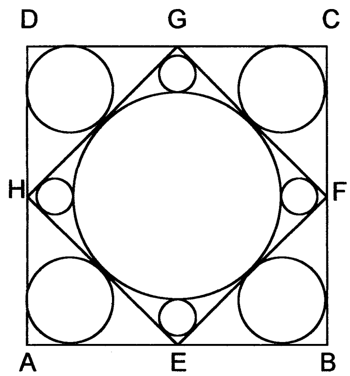
4) Beweise folgenden Satz:
Wenn drei einander paarweise berührende Kreise mit den Radien r_1, r_2, r_3, für die $r_3 < r_2 < r_1$ gilt, eine gemeinsame Tangente t besitzen, dann gilt folgende Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}} \quad .$$

5) Sei C ein beliebiger Punkt auf einem Halbkreis über dem Durchmesser $\overline{AB}$. Die Senkrechte zu AB durch C schneide $\overline{AB}$ im Punkt H. Über $\overline{AH}$ und $\overline{HB}$ seien erneut Halbkreise gezeichnet. Die gemeinsame Tangente t berühre diese beiden Halbkreise in den Punkten D und E.
a) Was lässt sich dann über das Viereck HECD aussagen?
Beweise deine Vermutung!
b) Was lässt sich dann über die gegenseitige Lage der Punkte A, D und C (bzw. B, E und C) aussagen?
Beweise deine Vermutung!

6) Sei ABCD ein Sehnenviereck mit dem Diagonalenschnittpunkt S, für das $\overline{AB} = \overline{AD}$ gilt.
Beweise, dass dann die Gerade AB stets die Tangente an den Umkreis des Dreiecks BCS im Punkt D ist!

7) Sei $k(M;r_u)$ der Umkreis und $k(N;r_i)$ der Inkreis eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis $\overline{AB}$.
Beweise, dass dann stets gilt: $\overline{MN} = \sqrt{r_u(r_u - 2r_i)}$.



8) In einem Quadrat ABCD mit den Seitenmittelpunkten E, F, G, H seien neun Kreise so eingezeichnet, wie in der Figur angegeben.
Berechne die Summe der Flächeninhalte dieser neun Kreise in Abhängigkeit von der Seitenlänge a des Quadrats!

9) In einem rechtwinkligen Dreieck ABC berühre der Inkreis die Hypotenuse im Punkt T , und es gelte $\overline{AT} = m$ sowie $\overline{TB} = n$.
Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von m und n !

10) Von einem rechtwinkligen Dreieck wird gefordert:
(1) Der Umfang des Dreiecks beträgt 132 cm .
(2) Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den drei Seiten des Dreiecks beträgt 6050 cm^2 .
Beweise, dass es rechtwinklige Dreiecke gibt, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllen, und dass die Längen der Dreiecksseiten durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt sind!
Gib die Seitenlängen dieses Dreiecks an!

11) In einem Dreieck ABC gelte $\overline{AC} = b = 13$ cm und $\overline{BC} = a = 15$ cm . Sei H der Fußpunkt des Lots von C auf $\overline{AB}$ und gelte $\overline{CH} = h = 12$ cm .
Ermittle für alle Dreiecke ABC, die diese Bedingungen erfüllen, den Flächeninhalt J(ABC) !

12) In einem Dreieck ABC mit $\overline{AB} = c$ gelte $\overline{AC} = \overline{BC} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,c$.
In welchem Verhältnis teilt der Höhenschnittpunkt H dieses Dreiecks die Höhe $\overline{CH_c}$ bzw. die Höhe $\overline{CH_a}$

13) Beweise folgende Umkehrung des Satzes über Tangentenvierecke indirekt:
Wenn für ein Viereck ABCD die Beziehung $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$ gilt, dann ist dieses Viereck ein Tangentenviereck.

14) Beweise folgende Umkehrung des Sekantentangentensatzes indirekt:
Ist AB eine Sekante eines Kreises, S ein Punkt dieser Sekante (der nicht zur Sehne $\overline{AB}$ gehört), T ein (von A und B verschiedener) Punkt dieses Kreises und gilt $\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{ST}^2$, dann ist ST eine Tangente an diesen Kreis.

15) Zu konstruieren sind jeweils alle (untereinander nicht kongruenten) Dreiecke ABC , die die angegebenen Bedingungen erfüllen:

a) $\overline{AB} = c$; $\overline{CH} = h$; $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$; $\overline{CH}$ ist Höhe in $\triangle ABC$.

b) $\overline{BC} = a$ (= 4cm) ; $\angle BAC = \alpha$ (= 30°) ; $\overline{CS} = s$ (= 5cm) ; $\overline{CS}$ ist Seitenhalbierende in $\triangle ABC$.

c) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = s$; $\overline{CH} = h$; $\angle ACB = \gamma$; $\overline{CH}$ ist Höhe in $\triangle ABC$.

d) $\angle BAC = \alpha$; $\angle CBA = \beta$; $\overline{BW} = w$; $\overline{BW}$ ist Winkelhalbierende in $\triangle ABC$

16) Arbeite im "Merkstoff" auf S. 30 den Abschnitt "1. Die algebraische Methode zum Lösen von Konstruktionsaufgaben" durch!

17) Gegeben seien zwei Strecken mit den Längen a und b , wobei $b > a$ gelte.
Zu konstruieren ist je eine Strecke mit der Länge $x = \sqrt{(a + b)a}$ bzw. $y = a\sqrt{b^2 - a^2}$.
Führe die Konstruktionszeichnung speziell für a = 3 cm , b = 4 cm durch und bilde selbst weitere analoge Aufgaben!

18) Sei ABC ein Dreieck und J(ABC) dessen Flächeninhalt.
Zu konstruieren sind die Punkte A_1 und B_1 , die folgende Bedingungen erfüllen:

$A_1 \in \overline{AC}$; $B_1 \in \overline{BC}$; $J(A_1B_1C_1) = \frac{1}{2} J(ABC)$; $A_1B_1 \parallel AB$

19) Zu konstruieren sind alle Sehnenvierecke ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt S, die folgende Bedingungen erfüllen:

$\overline{AB} = a$; $\overline{AC} = e$; $\overline{AS} = e'$; $\overline{SD} = f''$.

20) In einem Sehnenviereck ABCD möge sich die Verlängerung von $\overline{AD}$ über D hinaus mit der Verlängerung von $\overline{BC}$ über B hinaus im Punkt S schneiden.
Zu konstruieren sind alle derartigen Sehnenvierecke, die folgende Bedingungen erfüllen:

$\overline{AB} = a$; $\overline{AD} = d$; $\overline{DS} = p$; $\overline{CS} = q$; $p > q$.

21) Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$.
Zu ermitteln ist der geometrische Ort aller Punkte X, für die $\overline{AX} : \overline{XB} = b : a$ (mit $a,b \in R$ und $b > a > 0$) gilt!
(Betrachte zunächst den Spezialfall $\overline{AX} : \overline{XB} = 2 : 1$.)

22) Sei $\overline{PQ}$ ein Durchmesser eines Kreises k(M;r) und A ein beliebiger Punkt auf diesem Kreis. Wir betrachten die Menge aller Sehnen $\overline{PA}$ dieses Kreises.
Zu ermitteln ist der geometrische Ort aller Punkte X, für die $X \in \overline{PA}$ und $\overline{PX} : \overline{PA} = a : b$ (mit $a,b \in R$ und $b > a > 0$) gilt!
(Betrachte zunächst den Spezialfall $\overline{PX} : \overline{PA} = 1 : 2$.)

23) Gegeben sei ein Halbkreis über $\overline{AB}$ mit dem Mittelpunkt M. Sei P ein beliebiger Punkt auf diesem Halbkreis und d der Abstand dieses Punktes von $\overline{AB}$.
Zu ermitteln ist der geometrische Ort aller Punkte X, für die $X \in \overline{MP}$ und $\overline{MX} = d$ gilt!

24) Ist r die Länge des Inkreisradius und u die Länge des Umfangs eines Dreiecks ABC, dann gilt für dessen Inhalt $J(ABC) = ½ur$.
Formuliere und beweise einen analogen Satz aus der Stereometrie!

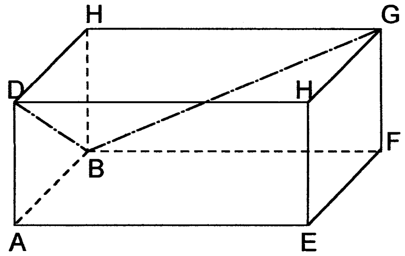
25) Sei P ein Punkt im Inneren eines regelmäßigen Tetraeders ABCD. Seine Abstände von den vier Seitenflächen des Tetraeders bezeichnen wir mit a, b, c und d, die Länge seiner Höhe mit h.
Es ist zu beweisen, dass dann stets $a + b + c + d = h$ gilt!
Formuliere und beweise einen analogen Satz aus der Planimetrie!

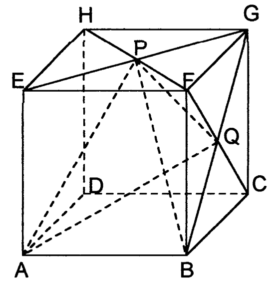
26) In jedem regelmäßigen Tetraeder schneiden die Höhen einander im Höhenschnittpunkt H.
In welchem Verhältnis teilt H jede der vier (gleich langen) Höhen?
Formuliere und löse eine analoge Aufgabe aus der Planimetrie!
Untersuche, ob in jedem beliebigen Tetraeder ein solcher Höhenschnittpunkt existiert!

27) Arbeite im "Merkstoff" auf S. 31 den Abschnitt "2. Einige Begriffe und Sätze aus der Stereometrie" durch!
Mache dir den Inhalt der Sätze anhand von Skizzen klar!
Fasse die angegebenen Sätze nebst Umkehrungen jeweils zu einem "Genau-dann-wenn-Satz" zusammen!

28) Sei ABCD ein beliebiges Tetraeder. Seien E, F, G, bzw. H die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$, bzw. $\overline{AC}$.
Dann ist EFGH vermutlich ein ebenes Viereck, und zwar ein ....
Beweise diese Vermutung!
Was lässt sich über das Viereck EFGH speziell aussagen, wenn ABCD ein regelmäßiges Tetraeder ist?
Berechne für diesen speziellen Fall den Inhalt des Vierecks EFGH !

29) Gegeben sei ein Quader mit den Kantenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$, $\overline{AE} = c$ (vgl. Abbildung).
Ermittle
a) den Abstand der Ecke A von der Flächendiagonalen $\overline{BD}$;
b) den Abstand der Kante AE von der Raumdiagonalen $\overline{BH}$.



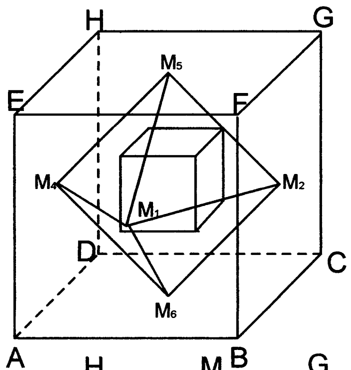


30) Sei ABCDEFG ein Würfel mit der Kantenlänge a; seien P bzw. Q die Diagonalenschnittpunkte der Seitenflächen BCGF bzw. EFGH (vgl. Abbildung).
a) Ermittle den Umfang des Dreiecks APQ !
b) Beweise, dass dann stets $\angle PBQ = \angle PQB$ gilt!

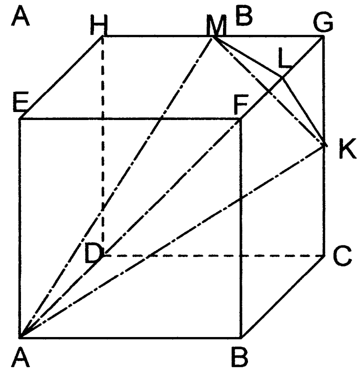
31) Ein Tetraeder ABCD besitze die Kantenlängen $\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{AD} = 13$ cm, $\overline{BD} = 13$ cm, und das Lot von D auf das Dreieck ABC sei 12 cm lang.
Beweise, dass durch diese Angaben die Länge der Kante $\overline{CD}$ eindeutig bestimmt ist und ermittle diese Kantenlänge!

32) Sei ABCD ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge a . Der Mittelpunkt der Kante $\overline{AB}$ sei M, der Mittelpunkt der Kante $\overline{CD}$ sei N .
a) Beweise, dass die Gerade MN sowohl auf der Geraden g = AB als auch auf der Geraden h = CD senkrecht steht!
b) Ermittle den Abstand $\overline{BD}$ zwischen M und N !
c) Beweise, dass für jeden Punkt X auf g und jeden Punkt Y auf h der Abstand $\overline{XY}$ zwischen X und Y die Ungleichung $\overline{XY} \geq \overline{BD}$ erfüllt!

33) In einen Würfel mit der Kantenlänge a sind neun möglichst große Kugeln mit gleichem Durchmesser derart einzulagern, dass eine dieser Kugeln als Mittelpunkt den Schnittpunkt der Körperdiagonalen des Würfels hat, während die übrigen acht Kugeln in die Ecken des Würfels gelegt werden..
Wie groß ist der Durchmesser d dieser Kugeln, ausgedrückt durch die Kantenlänge a ?



34) Gegeben sei ein Würfel, dessen Volumen mit V_1 bezeichnet wird.
Verbindet man den Mittelpunkt je einer Seitenfläche dieses Würfels mit den Mittelpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders (vgl. Abbildung).Sein Volumen sei V_2 genannt.
Verbindet man nun wieder den Schwerpunkt je einer Seitenfläche dieses Oktaeders mit den Schwerpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines zweiten Würfels (vgl. Abbildung). Sein Volumen sei V_3 genannt.
Ermittle das Verhältnis $V_1 : V_2 : V_3$!



35) In einem Würfel ABCDEFGH mit der Kantenlänge a seien K , L , M die Mittelpunkte der Kanten $\overline{CG}$, $\overline{FG}$ bzw. $\overline{HG}$ (vgl. Abbildung).
Ermittle das Volumen der Pyramide KLMA !

36) Gegeben sei eine dreiseitige regelmäßige Pyramide, deren Seitenkanten die Länge $s = 10$ cm haben und deren Winkel zwischen Seitenkanten und Grundkanten $\alpha = 75^0$ beträgt.
Wie lang ist der kürzeste Weg auf dem Mantel dieser Pyramide, der von einem Eckpunkt der Grundfläche ausgehend einmal um die Pyramide herum zum Ausgangspunkt zurückführt?

37) In einem Tetraeder ABCD gelte $\overline{AD} = \overline{BC} = a$, $\overline{BD} = \overline{AC} = b$ und $\overline{CD} = \overline{AB} = c$.
Dieses Tetraeder werde von einer Ebene so geschnitten, dass als Schnittfigur ein Viereck entsteht.
Ermittle den kleinsten Wert, den der Umfang eines solchen Vierecks annehmen kann!
Wie muss die Schnittebene verlaufen, damit der Umfang des Vierecks minimal wird?

38) Sei $\overline{AB}$ eine in der Ebene ε gelegene Strecke mit der Länge a. In ε sei g diejenige Gerade durch A, die senkrecht zu $\overline{AB}$ ist. In B sei die Senkrechte s auf die Ebene ε errichtet Schließlich sei C ein von A verschiedener Punkt auf g und es sei D ein von B verschiedener Punkt auf s.
a) Beweise, dass es eine Kugel gibt, die durch die Punkte A, B, C und D geht!
b) Berechne der Radius dieser Kugel für den Fall, dass $\overline{CA} = a\sqrt{2}$ und $\overline{BD} = a\sqrt{3}$ gilt!

39) Sei ABCD ein beliebiges Tetraeder, X ein beliebiger Punkt auf der Kante $\overline{AB}$ sowie Y ein beliebiger Punkt auf der Kante $\overline{CD}$ und Z der Mittelpunkt der Strecke $\overline{XY}$.
Zu ermitteln ist der geometrische Ort aller solcher Punkte Z!

40) Arbeite im "Merkstoff" auf S. 34 den Abschnitt "3. Spiegelung am Kreis" durch!
Wie konstruiert man das Tangentenpaar, das zu einem Kreis $k(O;r)$ und einem Punkt P außerhalb dieses Kreises gehört?
Wie kann man auf Grund von Def.(1) den Bildpunkt P' eines Punktes P konstruieren, wenn P im Inneren des Spiegelkreises liegt und $P \neq O$ gilt?

41) Konstruiere Bildpunkte zu günstig gewählten Originalpunkten, so dass du zu Vermutungen über folgende Sachverhalte kommst:
Wie kann das Bild einer Geraden, einer Strecke, einer Dreiecksfläche bei einer Spiegelung $Sp(O;r)$ aussehen?

42) Beweise folgende Sätze:
(S): Wenn P' nach Def.(1) konstruiert wurde, dann besitzt P' die in Def.(2) genannten Eigenschaften.
(U) Wenn P' die in Def.(2) genannten Eigenschaften besitzt, dann lässt sich P' so konstruieren, wie in Def.(1) angegeben.
(Das heißt, die beiden Definitionen sind äquivalent.)

43) Beweise folgenden Satz:
Sind A, B, O drei verschiedene, nicht auf einer Geraden liegende Punkte und A', B' die Bilder von A, B bei der Spiegelung $Sp(O;r)$, dann gilt $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$.

44) Überzeuge dich von der Wahrheit der folgenden Aussagen:

a) Wenn $O \in g$, dann $g \xrightarrow{Sp(O;r)} g$; (wobei g eine Gerade ist).

b) Wenn $O \notin g$, dann $g \xrightarrow{Sp(O;r)} k$; (wobei k ein Kreis mit $O \in k$ ist).

c) Wenn $O \in k$, dann $k \xrightarrow{Sp(O;r)} g$; (wobei g eine Gerade mit $O \notin g$ ist)

d) Wenn $O \notin k$, dann $k \xrightarrow{Sp(O;r)} k'$; (wobei k' ein Kreis mit $O \notin k'$ ist).

45) Konstruiere zu einem gegebenen Punkt M , der außerhalb eines gegebenen Spiegelkreises $k(O;r)$ liegt, denjenigen Kreis $k(M;r')$, der diesen Spiegelkreis in zwei Punkten jeweils unter einem rechten Winkel schneidet, und gib eine zugehörige Konstruktionsbeschreibung an!
Konstruiere das Bild k' des Kreises $k(M;r')$ bei Spiegelung am Kreis $k(O;r)$!
Was kann man feststellen?

46) Gegeben seien drei Kreise $k(M_1;r_1)$, $k(M_2;r_2)$, $k(M_3;r_3)$, die den Punkt O und nur diesen Punkt gemeinsam haben.
Zu konstruieren sind alle Kreise $k(M;r)$, die jeden dieser gegebenen Kreise (von außen oder von innen) berühren!
(Notwendige Fallunterscheidung beachten! Für einen speziellen Fall ist die Lösung im "Merkstoff" auf S. 34 angedeutet.)

47) Gegeben seien zwei einander schneidende Kreise $k(M_1;r_1)$ und $k(M_2;r_2)$ sowie ein Punkt P , der außerhalb von beiden Kreisen liegt.
Zu konstruieren sind alle Kreise $k(M;r)$, die durch P gehen und die beide gegebenen Kreise berühren!

48) Gegeben seien ein Kreis $k(M_0;r_0)$ sowie zwei verschiedene Punkte P_1 und P_2 .
Zu konstruieren sind alle Kreise $k(M;r)$, die durch P_1 und durch P_2 gehen und die den gegebenen Kreis berühren!

a) Führe eine vollständige Fallunterscheidung nebst Determination durch!

b) Gib an, durch welche Transformation diese Aufgabe auf welche einfachere Aufgabe zurückführbar ist!

49) Gegeben seien ein Kreis $k(M_0;r_0)$, eine Gerade g und ein Punkt P . Der Kreis schneide g in A und B , der Punkt P liege außerhalb des Kreises.
Zu konstruieren sind alle Kreise $k(M;r)$, die durch P gehen und die sowohl g als auch $k(M_0;r_0)$ berühren!
Durch welche Transformation lässt sich diese Aufgabe auf welche einfachere Hilfsaufgabe zurückführen?

50) Beweise den folgenden *Satz des Ptolomäus*:
Wenn ABCD ein Sehnenviereck ist, dann gilt $\overline{AC}\cdot\overline{BD} = \overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{BC}\cdot\overline{AD}$.
[*Hinweis:* Verwende $Sp(A;r)$ als Hilfsmittel sowie den Satz aus Aufgabe 43) als Hilfssatz.]

51) Arbeite im "Merkstoff" auf S. 35 den Abschnitt "4. Eigenschaften von Bewegungen" durch!
Vergleiche die Eigenschaften der Spiegelung an einem Kreis sowie von Ähnlichkeitsabbildungen mit den Eigenschaften von Bewegungen!

Fülle die nachstehende Tabelle aus!

	Verschiebung $V(\overrightarrow{PP'})$	Drehung $Dr(M;\varphi)$	Geradenspiegelung $SP(g)$	Ähnlichkeitsabbildung $A = (Z;k)\cdot Bew$	Spiegelung am Kreis $Sp(O;r)$
längentreu					
inhaltstreu					
winkeltreu					

	$V(\overrightarrow{PP'})$	$Dr(M;\varphi)$	$Sp(g)$	$Ä = (Z;k) \cdot Bew$	$Sp(O;r)$
geradentreu					
mittelpunkts-treu					
kreistreu					
kreisverwandt i.w.S.					
involutorisch					
Fixpunktele-mente					
Fixelemente					

Hinweis: Bei den folgenden Konstruktionsaufgaben gibt es jeweils einen Lösungsweg, bei dem eine Bewegung als günstiges Hilfsmittel eingesetzt werden kann.

52) Gegeben seien zwei Kreise $k(M_1;r_1)$, $k(M_2;r_2)$, eine Gerade g und ein Abstand d .
Zu konstruieren sind alle Punktpaare $(A;B)$, die folgende Bedingungen erfüllen:
$A \in k(M_1;r_1)$; $B \in k(M_2;r_2)$; $AB \parallel g$; $\overline{AB} = d$.

53) Gegeben seien eine Gerade g sowie zwei verschiedene Punkte A und B , die beide auf derselben Seite von g liegen.
Zu konstruieren sind jeweils alle Punkte X, die folgende Bedingungen erfüllen:
a) $X \in g$ und $\angle(AX;g) = \angle(g;XB)$.
b) $X \in g$ und $\angle(AX;g) = 2\angle(g;XB)$.

54) Gegeben seien zwei einander nicht schneidende Kreise $k(M_1;r_1)$ und $k(M_2;r_2)$ sowie eine Gerade g , die die Gerade M_1M_2 schneidet, aber beide Kreise meidet.
Zu konstruieren sind alle Quadrate $ABCD$, die folgende Bedingungen erfüllen:
$A \in k(M_1;r_1)$; $C \in k(M_2;r_2)$; $B, D \in g$.

55) Gegeben seien drei verschiedene parallele Geraden a , b , c .
Zu konstruieren sind alle Dreiecke ABC , die gleichseitig sind und für die $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ gilt.

56) Gegeben seien zwei einander schneidende Geraden b und d sowie ein Punkt A , der im Inneren des von Winkel $\angle(b;d)$ festgelegten Winkelraums liegt.
Zu konstruieren sind alle Quadrate $ABCD$, für die $B \in b$ und $D \in d$ gilt.

57) Gegeben seien zwei konzentrische Kreise $k(M;r_1)$ und $k(M;r_2)$ sowie ein Punkt A .
Zu konstruieren sind alle gleichseitigen Dreiecke ABC, für die $B \in k(M;r_1)$ und $C \in k(M;r_2)$ gilt.

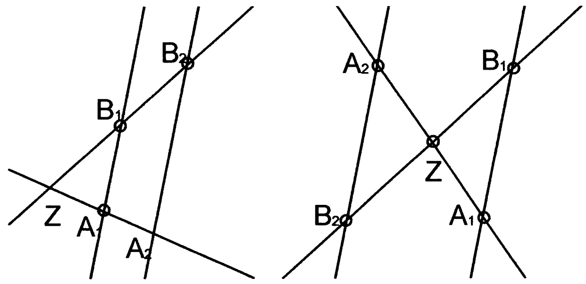
Zusätzliche geometrische Beweis- und Bestimmungsaufgaben für die AG Klasse 9 aus der AG Klasse 8

8.1) Wir betrachten folgende Aussagen (Voraussetzungen, Behauptungen, Sätze) über fünf paarweise verschiedene Punkte Z, A_1, A_2, B_1, B_2 :

V_1: $A_1 \in ZA_2$; Beh$_1$: $\overline{ZA_1} : \overline{A_1A_2} = \overline{ZB_1} : \overline{B_1B_2}$; $(\overline{ZA_1} : \overline{ZA_2} = \overline{ZB_1} : \overline{ZB_2})$;

V_2: $B_1 \in ZB_2$; Beh$_2$: $\overline{ZA_1} : \overline{ZA_2} = \overline{A_1A_2} : \overline{A_2B_2}$.

V_3: $A_1B_1 \parallel A_2B_2$;



(S1): $V_1 \wedge V_2 \wedge V_3 \Rightarrow$ Beh$_1$

(S2): $V_1 \wedge V_2 \wedge V_3 \Rightarrow$ Beh$_2$

(U1): $V_1 \wedge V_2 \wedge$ Beh$_1 \Rightarrow V_3$

(U2): $V_1 \wedge V_2 \wedge$ Beh$_2 \Rightarrow V_3$

(U3): $V_1 \wedge$ Beh$_1 \wedge V_3 \Rightarrow V_2$

a) Überzeuge dich, dass (S1) und (S2) die aus dem Unterricht bekannten Strahlensätze sind!
b) Beweise (S2), indem du (S1) als Hilfsmittel verwendest!
c) Widerlege die Umkehrung (U2) !
d) Beweise die Umkehrungen (U1) und (U3) indirekt!

8.2) Sei ABCD ein konvexes Viereck ; sei E , F , G bzw. H jeweils derjenige Punkt auf der Seite $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ bzw. $\overline{AD}$, für den gilt:

$\overline{AE} = \frac{1}{3}\cdot\overline{AB}$, $\overline{FC} = \frac{1}{3}\cdot\overline{BC}$, $\overline{CG} = \frac{1}{3}\cdot\overline{CD}$, $\overline{AH} = \frac{1}{3}\cdot\overline{AD}$.

Was lässt sich dann über das Viereck EFGH aussagen?
Beweise deine Vermutung!
Wie lässt sich der Satz verallgemeinern?

8.3) Beweise: Ist W der Fußpunkt der Winkelhalbierenden $\overline{CW}$ eines Dreiecks ABC , dann gilt $\overline{AW} : \overline{WB} = \overline{AC} : \overline{BC}$.

8.4) Sei ABCD ein Sehnenviereck mit dem Diagonalenschnittpunkt S .
Was lässt sich dann über die Dreiecke ABS und DCS aussagen? Beweise deine Vermutung!

8.5) Beweise folgende Sätze:

a) *Sehnensatz:* Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises, dann ist das Produkt der Abschnitte der einen Sehne gleich dem Produkt der Abschnitte der anderen Sehne.
b) *Sekantensatz:* Schneiden sich zwei Sekanten eines Kreises außerhalb dieses Kreises, dann ist das Produkt der vom Schnittpunkt aus gemessenen Sekantenabschnitte auf beiden Sekanten gleich.
c) *Sekantentangentensatz:* Schneiden sich eine Sekante und eine Tangente eines Kreises, dann ist das Quadrat des Tangentenabschnitts gleich dem Produkt der vom Schnittpunkt aus gemessenen Sekantenabschnitte.

8.6) Beweise: Ist H der Schnittpunkt der Höhen $\overline{AH_a}$, $\overline{BH_b}$, $\overline{CH_c}$ eines Dreiecks ABC, dann gilt stets $\overline{AH}\cdot\overline{HH_a} = \overline{BH}\cdot\overline{HH_b} = \overline{CH}\cdot\overline{HH_c}$.

8.7) Gegeben sei ein Viereck ABCD , das folgende Bedingungen erfüllt:
Die Gerade durch A parallel zu $\overline{BC}$ schneide die Diagonale $\overline{BD}$ im Punkt M ; die Gerade durch B parallel zu $\overline{AD}$ schneide die Diagonale $\overline{AC}$ im Punkt N .
Beweise, dass unter dieser Voraussetzungen stets $MN \parallel CD$ gilt!

8.8) Durch den Punkt A eines Parallelogramms ABCD gehe eine Gerade, die die Diagonale $\overline{BD}$ im Punkt M , die Seite $\overline{CD}$ im Punkt P sowie die Verlängerung der Seite $\overline{BC}$ im Punkt Q schneidet.
Es ist zu beweisen, dass aus diesen Voraussetzungen $\overline{MA}^2 = \overline{MP}\cdot\overline{MQ}$ folgt !

8.9) Sei D der Mittelpunkt der Höhe $\overline{CH}$ eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit der Basis $\overline{AB}$, und sei P der Schnittpunkt der Geraden $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$. Berechne das Verhältnis $\overline{BP}:\overline{PC}$!

8.10) Durch den Punkt A eines Quadrats ABCD mit der Seitenlänge a gehe eine beliebige Gerade, die die Seite $\overline{BC}$ im Punkt M sowie die Verlängerung der Seite $\overline{DC}$ im Punkt N schneidet.
Es ist zu beweisen, dass dann stets $\frac{1}{\overline{CM}} - \frac{1}{\overline{CN}} = \frac{1}{a}$ gilt!

8.11) Sei M bzw. N der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AD}$ eines Parallelogramms ABCD , und schneide $\overline{CM}$ bzw. $\overline{CN}$ die Diagonale $\overline{BD}$ im Punkt P bzw. Q .
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{BP} = \overline{PQ} = \overline{QD}$ folgt!

8.12) Sei ABCD ein Sehnenviereck mit dem Diagonalenschnittpunkt S , und es gelte $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{CD} : \overline{CB}$. Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{BS} = \overline{DS}$ gilt!

8.13) Sei ABCD ein Rechteck, M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und S der Schnittpunkt von $\overline{AC}$ und $\overline{DM}$.
Ermittle das Verhältnis des Flächeninhalts von Dreieck SMC zum Flächeninhalt des Rechtecks ABCD !

8.14) In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ und einem spitzen Winkel bei C schneide der Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AC}$ die Seite $\overline{AB}$ im Punkt D sowie die Seite $\overline{BC}$ im Punkt E
a) Was lässt sich dann über die Dreiecke ABC und BED aussagen? Beweise deine Vermutung!
b) Wie lässt sich der so gewonnene Satz verallgemeinern?
c) Gelte $\overline{AB} = 2a =$ 6cm und $\overline{BC} = \overline{AC} = s =$ 5cm. Berechne den Flächeninhalt des Vierecks ADCE !
d) Drücke den Flächeninhalt des Vierecks ADEC allgemein durch a und s aus!

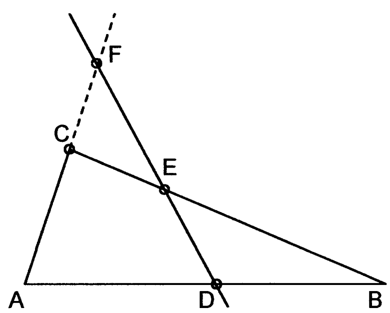
8.15) Sei H_a bzw. H_b der Höhenfußpunkt der zu A bzw. B gehörenden Höhe eines spitzwinkligen Dreiecks ABC .
Was lässt sich dann über die Dreiecke ABC und H_aH_bC aussagen? Beweise deine Vermutung!

8.16) Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck, d die Länge des Durchmessers seines Umkreises, a bzw. b die Länge der Seite $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$ und h die Länge der zu $\overline{AB}$ gehörenden Höhe $\overline{CH}$.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $d = \frac{a \cdot b}{h}$ gilt!
Wie lässt sich dieser Satz verallgemeinern?

8.17) Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{BC}$ und g eine beliebige Gerade durch A , die die Basis $\overline{BC}$ in D sowie den Umkreis k des Dreiecks im Punkt E schneidet.
a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{AD} \cdot \overline{AE} = \overline{AB}^2$ gilt !
b) Untersuche Spezialfälle, Grenzfälle und Verallgemeinerungen dieses Satzes!

8.18) Sei $\overline{AB}$ ein Durchmesser eines Kreises k(M;r) . Sei t bzw. t' die Tangente an k(M;r) in A bzw. B . Auf t sei eine Strecke $\overline{PQ} = a$ so gelegen, dass A der Mittelpunkt von $\overline{PQ}$ ist. Auf t' seien P' , Q' diejenigen Punkte , für die die Geraden PP' bzw. QQ' Tangenten an k(M;r) sind. Ferner gelte $\overline{P'Q'} = c$.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen $r = \frac{1}{2}\sqrt{ac}$ folgt !

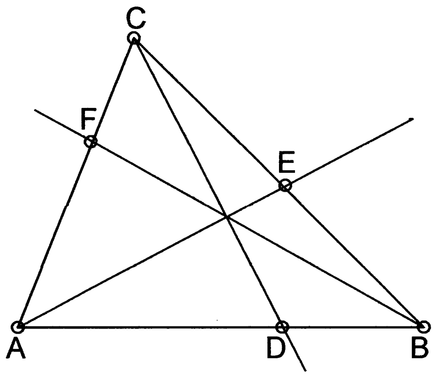
8.19) Die Seiten eines Dreiecks ABC (oder deren Verlängerungen) werden von einer Transversalen (die keine Ecktransversale ist) in den Punkten D , E , F so geschnitten, wie in nebenstehender Figur angegeben.



Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen für die Streckenlängen stets gilt :
$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$ *(Satz des Menelaos).*

8.20) Wenn sich drei Ecktransversalen eines Dreiecks ABC in einem Punkt schneiden und wenn diese Ecktransversalen die Seiten dieses Dreiecks in den Punkten D, E, F so schneiden, wie in nebenstehender Figur angegeben, dann gilt stets

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA} = 1$$ *(Satz des Ceva)*.



8.21) a) Untersuche interessante Spezialfälle des Satzes von Ceva !

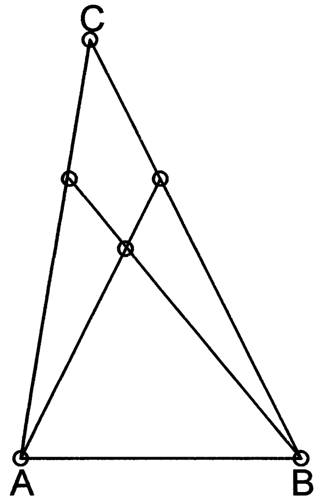
b) Wie lässt sich der Satz von Ceva verallgemeinern?

c) Beweise folgende *Umkehrung des Satzes von Ceva* indirekt:

V_1: $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{BC}$, $F \in \overline{AC}$ im Dreieck ABC ;

V_2: $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA} = 1$;

Beh.: Die Geraden AE , BF und CD gehen durch einen Punkt P .
(CD geht durch den Schnittpunkt P von AE und BF) .



8.22) Von den Eckpunkten A und B eines Dreiecks ABC sind zu den gegenüberliegenden Seiten dieses Dreiecks zwei Transversalen gezogen, die sich jeweils im Verhältnis 3:1 teilen.

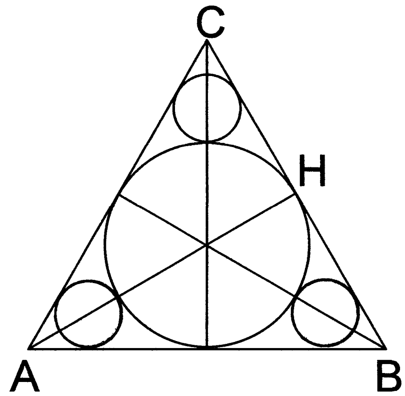
a) In welchem Verhältnis teilen diese Transversalen die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$?

b) Wie lässt sich die Aufgabenstellung verallgemeinern? Löse die verallgemeinerte Aufgabe!

8.23) Sei P derjenige Punkt auf der Seite $\overline{AB}$ eines Dreiecks ABC , für den $\overline{AP}:\overline{PB} = 2:1$ gilt; sei Q derjenige Punkt auf der Seite $\overline{AC}$, für den $\overline{AQ}:\overline{QC} = 3:1$ gilt; sei S der Schnittpunkt von $\overline{PC}$ und $\overline{QB}$.

a) Berechne die Verhältnisse $\overline{PS}:\overline{SC}$ und $\overline{QS}:\overline{SB}$!

b) Formuliere und löse eine verallgemeinerte Aufgabe!



8.24) Einem gleichseitigen Dreieck ABC mit der Seitenlänge a und der Höhenlänge $\overline{AH} = h$ seien - wie in nebenstehender Figur angegeben - vier einander berührende Kreise einbeschrieben.

a) Ermittle die Summe der Inhalte der vier Kreise in Abhängigkeit von h!

b) Ermittle die Summe der Inhalte der vier Kreise in Abhängigkeit von a !

8.25) Sei $\overline{AB}$ eine (vom Durchmesser verschiedene) Sehne eines Kreises k(M;r) sowie C der Mittelpunkt des kleineren der beiden Kreisbogen AB bzw. BA . Die Senkrechte zu AB durch A schneide die Gerade BC im Punkt S .
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{MS}^2 = \overline{AM}^2 + 2\cdot\overline{AM}\cdot\overline{AS}$ gilt!

8.26) Seien A_1 , B_1 , C_1 die Berührungspunkte des Inkreises eines Dreiecks ABC mit dessen Seiten $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$. Die Parallele zu AB durch B_1 schneide die Strecke $\overline{BC}$ im Punkt K , die Strecke $\overline{CC_1}$ im Punkt P sowie die Gerade A_1C_1 im Punkt Q .
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen $\overline{B_1P} = \overline{PQ}$ folgt!

Zusätzliche geometrische Konstruktions- und Ortsaufgaben für die AG Klasse 9 aus der AG Klasse 8

Zu konstruieren sind alle (untereinander nicht kongruenten) Dreiecke ABC, die die in den Aufgaben 8.27), 8.26) und 8.29) gegebenen Bedingungen erfüllen:

8.27) (a) $\angle BAC = \alpha$; (b) $\angle CBA = \beta$; (c) $\overline{CS} = s$; (d) $\overline{CS}$ ist Seitenhalbierende im Dreieck ABC.

8.28) (a) $\angle CBA = \beta$; (b) $\angle ACB = \gamma$; (c) $\overline{AH} = h$; (d) $\overline{AH}$ ist Höhe in Dreieck ABC.

8.29) (a) $\angle BAC = \alpha$; (b) $\angle CBA = \beta$; (c) $\overline{BW} = w$; (d) $\overline{BW}$ ist Winkelhalbierende im Dreieck ABC.

8.30) Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC.
Zu konstruieren sind alle Vierecke CDEF, die folgende Bedingungen erfüllen:
(a) DEFG ist ein Quadrat; (b) $D \in \overline{AB}$; (c) $E \in \overline{AB}$; (d) $F \in \overline{BC}$; (e) $G \in \overline{AC}$.

8.31) Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C.
Zu konstruieren sind alle Vierecke CDEF, die folgende Bedingungen erfüllen:
(a) CDEF ist ein Rechteck; (b) $\overline{CD} : \overline{CE} = 1:2$; (c) $D \in \overline{EC}$; (d) $B \in \overline{AB}$; (e) $F \in \overline{BD}$.

8.32) Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\overline{BC} = a$.
Zu konstruieren sind alle Vierecke DEFG, die folgende Bedingungen erfüllen:
(a) DEFG ist ein Parallelogramm; (b) die Punkte D, E liegen auf $\overline{BC}$ und es gilt $\overline{DE} = e \; (< s)$.
(c) F liegt auf $\overline{AC}$; (d) G liegt auf $\overline{AB}$.

8.33) Gegeben sei ein Kreissektor MPQ mit $\overline{MP} = \overline{MQ}$ und einem spitzen Zentriwinkel $\angle PMQ$.
Zu konstruieren sind alle Vierecke ABCD, die folgende Bedingungen erfüllen:
(a) ABCD ist ein Quadrat; (b) $A \in \overline{MP}$; (c) $B \in \overline{PQ}$; (d) $C \in \overline{PQ}$; (e) $D \in \overline{MQ}$.

8.34) Sei P ein Punkt auf der Winkelhalbierenden w eines spitzen Winkels $\angle(a,b)$ mit dem Scheitel S.
Zu konstruieren sind alle Kreise k(M;r), die die Schenkel a und b berühren und die durch P gehen.

8.35) Gegeben seien eine Gerade g und zwei verschiedene Punkte A und B.
Zu konstruieren sind alle Kreise k(M;r), die die Gerade g berühren und die durch die Punkte A und B gehen. (Beachte, dass die Anzahl der Lösungen von der Lagebeziehung zwischen den gegebenen Stücken abhängt. Es sind alle möglichen Fälle zu erfassen, und es ist die zugehörige Determination durchzuführen.)

Bei den folgenden *geometrischen Ortsaufgaben* sind jeweils alle Punkte der gegebenen Ebene zu ermitteln, die die gegebene Bedingung erfüllen.

8.36) Sei $\overline{PQ}$ ein Durchmesser eines Kreises k(M;r) und A ein beliebiger Punkt auf diesem Kreis.
Wir betrachten die Menge aller Sehnen $\overline{PA}$ dieses Kreises.
Zu ermitteln ist jeweils der geometrische Ort
a) der Mittelpunkte X dieser Sehnen;
b) der Punkte X auf diesen Sehnen, für die $\overline{PX} : \overline{PA} = 1 : 3$ gilt.
Wie lässt sich diese Aufgabe verallgemeinern?

8.37) Sei P ein fester Punkt im Inneren eines Kreises k(M;r) und A ein beliebiger Punkt auf diesem Kreis. Sei P der Scheitelpunkt aller Strahlen $\overrightarrow{PA}$, die entstehen, wenn A den Kreis durchläuft.
Zu ermitteln ist der geometrische Ort der Mittelpunkte X aller Strahlenabschnitte $\overline{PA}$.
Untersuche interessante Spezialfälle, Grenzfälle und Verallgemeinerungen!

8.38) Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$.
Zu ermitteln ist der geometrische Ort aller Punkte X, für die $\overline{AX} : \overline{XB} = 1 : 2$ gilt.
Wie lässt sich diese Aufgabe verallgemeinern?

M E R K S T O F F

ZAHLENTHEORIE

1. Lineare Kongruenzen und Restklassen

Wiederhole: AG8, S.26, "Das Rechnen mit Kongruenzen"

Def.: $ax \equiv b \ (m)$ mit $a, b, m, x \in Z$ nennt man *lineare Kongruenz* (nach dem Modul m)

Lösbarkeitskriterium: Eine lineare Kongruenz besitzt Lösungen genau dann, wenn der ggT(a;m) ein Teiler von b ist; sonst ist die Lösungsmenge leer.

Satz über die Lösungsmenge: Gilt ggT(a;m) = 1 , dann lässt sich die lineare Kongruenz stets auf die vereinfachte Form $x \equiv c \ (m)$ bringen.
Sie besitzt dann die Lösungsmenge $L = \{ c+km;\ k \in Z \}$, die man *"Restklasse nach dem Modul m"* nennt und mit $[c]_m$ bezeichnet.

Hinweis: Gilt ggT(a;m) = d > 1 nebst d|b , dann darf man beide Seiten der Kongruenz und den Modul durch d teilen und erhält die zugehörige *"gekürzte Kongruenz"* $a'x \equiv b' \ (m')$ mit ggT(a';m') = 1 , wobei $a = a'd$, $b = b'd$ und $m = m'd$ gilt. Diese Kongruenz hat dann stets genau eine Restklasse nach dem Modul m' als Lösungsmenge.

Lösungsverfahren (durch äquivalentes Umformen): Um eine lösbare Kongruenz auf die vereinfachte Form $x \equiv c \ (m)$ zu bringen (deren Lösungsmenge man dann sofort angeben kann), darf man folgende Umformungen vornehmen:
(1) Ersetzen von a oder b durch Zahlen, die ihnen nach dem Modul m kongruent sind.
(2) Division beider Seiten durch einen gemeinsamen Faktor q , falls q und m teilerfremd sind. (Trifft dies nicht zu, dann geht man zunächst zu der oben genannten "gekürzten Kongruenz" über.)
(Dieses Lösungsverfahren ist nicht streng algorithmisch und führt daher nicht bei allen Aufgaben (mit vertretbarem Aufwand) zum Ziel.)

2. Diophantische Gleichungen

2.1. Lineare diophantische Gleichungen

Def.: $ax + by = c$ heißt *lineare diophantische Gleichung* (mit 2 Variablen) genau dann, wenn a, b, c ganze Zahlen sind und wenn nur Paare (x;y) von ganzen Zahlen als Lösungen gesucht werden.

Lösbarkeitskriterium: $ax + by = c$ besitzt Lösungen genau dann, wenn ggT(a;b) ein Teiler von c ist.

Hinweis: Gilt ggT(a;b) > 1 und ist das Lösbarkeitskriterium erfüllt, dann dividiere man beide Seiten der Gleichung durch ggT(a;b), so dass dann ggT(a;b;c) = 1 gilt.
Die so entstandene Gleichung heißt *Normalform* der diophantischen Gleichung.

Satz über die Lösungsmenge: Ist $(x_0;y_0)$ eine spezielle Lösung der Normalform von $ax + by = c$, dann lautet die Lösungsmenge dieser Gleichung:
$L = \{ (x;y) \mid x = x_0+bk;\ y = y_0 - ak;\ k \in Z \}$.

Lösungsmethoden (für die Normalform von $ax + by = c$):

(1) Erraten einer speziellen Lösung und Anwendung des Satzes über die Lösungsmenge.
(2) Übergang zu einer der beiden zugehörigen linearen Kongruenzen $ax \equiv c\ (b)$ oder $by \equiv c\ (a)$.
(3) Anwendung des Eulerschen Reduktionsverfahrens.

Das Eulersche Reduktionsverfahren

Regeln (in Kurzform)

1. Löse nach der Variablen mit dem absolut kleineren Koeffizienten auf!
   [Im Beispiel: Auflösen nach x.]
2. Spalte vom entstandenen Bruch den (absolut größten) "ganzzahligen Teil" ab!
   (Probe nicht vergessen!) [Im Beispiel: $(-y + 1)$]
3. Bezeichne den entstandenen Bruch mit einer Hilfsvariablen; gehe zur zugehörigen diophantischen Gleichung über! [Im Bespiel: $55y - 72 = -179u$]
4. Führe die Schritte 1., 2., 3. so lange durch, bis eine diophantische Gleichung entsteht, bei der eine der beiden Variablen den Koeffizienten $+1$ oder -1 besitzt!
   [Im Beispiel: $v + 3 = 14k$]
5. Drücke (durch schrittweises Einsetzen und Umformen) die Hilfsvariablen und die Variablen der Ausgangsgleichung durch die zuletzt eingeführte Hilfsvariable aus!
   [Im Beispiel in der Reihenfolge $v = -3 + 14k$; $u = 13 - 55k$; $y = -41 + 179k$
   $x = 55 - 234k$.]

Beispiel für das Eulersche Reduktionsverfahren

$$179x + 234y = 251$$

$$x = \frac{-234y+251}{179} = (-y + 1) + \frac{-55y+72}{179} \qquad x = (41-179k+1)+(13-55k) = \underline{55 - 234k}$$

$$\frac{-55y+75}{179} = u \quad \text{äq} \quad 55y - 72 = -179u$$

$$y = \frac{-179u+72}{55} = (-3u + 1) + \frac{-14u+17}{55} \qquad y = (-39+165k+1)+(-3+14k) = \underline{-41 + 179k}$$

$$\frac{-14u+17}{55} = v \quad \text{äq} \quad 14u - 17 = -55v$$

$$u = \frac{-55v+17}{14} = (-4v + 1) + \frac{v+3}{14} \qquad u = (12-56k+1)+k = \underline{13 - 55k}$$

$$\frac{v+3}{14} = k \quad \text{äq} \quad v + 3 = 14k \qquad v = \underline{-3 + 14k}$$

Folglich lautet die gesuchte Lösungsmenge:
$L = \{ (x;y) \mid x = 55 - 234k;\ y = -41 + 179k;\ k \in Z \}$.

2.2. Nichtlineare diophantische Gleichungen

Def.: Drei positive ganze Zahlen x, y, z heißen *pythagoreisches Zahlentripel* genau dann, wenn $x^2 + y^2 = z^2$ gilt.
Sind x, y, z teilerfremd, dann nennen wir ein solches Tripel *pythagoreisches Grundtripel*.

Satz: Ein Zahlentripel ist genau dann ein pythagoreisches Grundtripel, wenn u und v teilerfremde ungerade Zahlen mit $u > v$ sind und wenn gilt:

$$x = uv \;; \quad y = \frac{u^2 - v^2}{2} \;; \; z = \frac{u^2 + v^2}{2} \qquad .$$

Großer Satz von Fermat: Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ ist für keinen ganzzahligen Wert $n>2$ in ganzen Zahlen x, y, z lösbar.

3. Das Rechnen mit Restklassen ; der Begriff der Gruppe

Def.: $[a]_m = \{ x \in Z \mid x \equiv a \ (m) \} = \{ ..., a-m, a, a+m, a+2m, ..., a+km, ... \}$ nennt man *Restklasse* nach dem Modul m (mit dem Repräsentanten a), wobei $a, m \in Z$ und $m>1$ gilt.

Satz: Zu jedem Modul m gehören genau m verschiedene Restklassen. Jedes Element einer Restklasse zu einem vorgegebenen Modul legt diese Restklasse eindeutig fest.

Hinweis: In der Regel werden die Restklassen durch die nichtnegativen kleinsten Reste oder durch die absolut kleinsten Reste charakterisiert.

Def.: $[a]_m + [b]_m = [a + b]_m$ *Summe* von Restklassen

Def.: $[a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m$ *Produkt* von Restklassen

Def.: Eine Restklasse heißt *Kehrwert* der Restklasse $[a]_m$ genau dann, wenn sie Lösung der folgenden Gleichung ist : $[a]_m \cdot [x]_m = [1]_m$.

Def.: Unter einer *zweistelligen Operation* o verstehen wir eine eindeutige Abbildung, die jedem geordneten Paar (x,y) von Elementen genau ein Element z zuordnet.
Wir schreiben $(x,y) \to z$ oder $x \circ y = z$ oder $z = o(x,y)$.

Def.: Einige *Eigenschaften zweistelliger Operationen* mit Elementen aus einer Menge M :

(1) *Unbeschränkte Ausführbarkeit* in der Menge M:
Zu jedem Paar $(x,y) \in M$ gibt es genau ein $z \in M$, so dass gilt: $x \circ y = z$.

(2) *Assoziativität*: Für alle $a, b, c \in M$ gilt : $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

(3) *Existenz eines neutralen Elements:*
In M existiert ein Element e , so dass für alle Elemente $a \in M$ gilt : $a \circ e = e \circ a = a$.

(4) *Invertierbarkeit*:
Zu jedem Element $a \in M$ gibt es ein inverses Element $a^{-1} \in M$, so dass gilt:
$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

(5) *Kommutativität*: Für alle $a, b \in M$ gilt : $a \circ b = b \circ a$.

Def.: Eine Menge M , in der eine zweistellige Operation o erklärt ist, heißt *Gruppe [M;o]* genau dann, wenn die Operation o die Eigenschaften (1) bis (4) besitzt.
Gilt zusätzlich noch die Eigenschaft (5), dann spricht man von einer kommutativen Gruppe.

4. Der kleine Satz von Fermat und weitere Sätze über Primzahlen

Wenn p eine Primzahl ist, dann gilt stets:

(1) Wenn $ab \equiv 0 \ (p)$, dann $a \equiv 0 \ (p)$ oder $b \equiv 0 \ (p)$.

(2) Wenn $a \not\equiv 0 \ (p)$, dann hat die Kongruenz $ax \equiv b \ (p)$ stets genau eine (Restklasse als) Lösung.

(3) Wenn $a \not\equiv 0$ (p), dann wiederholen sich die Potenzen a^k nach dem Modul p zyklisch.
Dabei ist die Länge s dieses Zyklus stets ein Teiler von (p -1).

(4) *Kleiner Satz von Fermat*
Sind a und p teilerfremd, dann gilt $a^{p-1} \equiv 1$ (p).
Das heißt, dass p dann stets ein Teiler von $(a^{p-1} - 1)$ ist.

A R I T H M E T I K

1. Lineare Gleichungssysteme ; der Gaußsche Algorithmus

Die Lösungsmenge eines Gleichungssystems ändert sich nicht, wenn man
a) Gleichungen des Systems äquivalent umformt, speziell beide Seiten einer Gleichung mit derselben von 0 verschiedenen Zahl multipliziert;
b) zu einer Gleichung eine andere Gleichung des Systems addiert;
c) Gleichungen miteinander vertauscht.

Bei der Lösung *linearer Gleichungssysteme* kann man dies wie folgt ausnützen:
Man formt zunächst das System in *"Dreiecksgestalt"* um, d.h. man addiert günstig gewählte Vielfache der 1. Gleichung zu günstig gewählten Vielfachen der anderen Gleichungen, so dass die Koeffizienten der 1. Variablen (außer in der 1. Gleichung) sämtlich Null werden.
Der so entstandene Koeffizient der 2. Variablen in der 2. Gleichung sei von Null verschieden. (Ist dies nicht der Fall, dann vertauscht man die 2. Gleichung mit einer der neu entstandenen weiteren Gleichungen.) Dann verfährt man analog, so dass von der 3. Gleichung an die Koeffizienten der 2. Variablen Null werden, usw.
Von der letzten Gleichung des so äquivalent umgeformten Systems ausgehend ermittelt man durch Einsetzen ein zum Ausgangssystem äquivalentes System, dessen Lösungsmenge sich unmittelbar ablesen lässt. Tritt hierbei ein Widerspruch auf, dann ist die Lösungsmenge leer.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcrll}
2x & + & y & + & 3z & = & 9 & |\cdot(+1) & |\cdot(-3) \\
x & - & 2y & + & z & = & -2 & |\cdot(-2) & \\
3x & + & 2y & + & 2z & = & 7 & & |\cdot(+2)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
2x & + & y & + & 3z & = & 9 & \\
 & & 5y & + & z & = & 13 & |\cdot(+1) \\
 & & y & - & 5z & = & -13 & |\cdot(-5)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
2x & + & y & + & 3z & = & 9 \\
 & & 5y & + & z & = & 13 \\
 & & & & 26z & = & 78
\end{array}$$

("Dreiecksgestalt")

$$\begin{array}{rcl}
2x + y + 9 & = & 9 \\
5y + 3 & = & 13 \\
z & = & 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
2x + 2 + 9 & = & 9 \\
y & = & 2 \\
z & = & 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
x & = & -1 \\
y & = & 2 \\
z & = & 3
\end{array}$$

Das geordnete Tripel (x;y;z) = (-1;2;3) ist die (einzige) Lösung unseres Gleichungssystems.

Eine *Probe* (als Existenznachweis) ist nicht notwendig, weil nur äquivalent umgeformt wurde. Sie dient in einem solchen Fall lediglich dem Finden von Rechenfehlern und sollte aus diesem Grunde durchgeführt werden, falls dies nicht unangemessen kompliziert wird.
Tritt in einem solchen Gleichungssystem anstelle eines konstanten Koeffizienten ein *Parameter* auf, dann geht man analog vor.

Auftrag: Führe die Umformungen durch, die zur Lösung des folgenden *parameterhaltigen Gleichungssystems* führen:

$$\begin{array}{lll} 2x + y + 3z = 9 & 2x + y + 3z = 9 & x = \dfrac{19 - 16a}{23 - 5a} \\ x - 2y + z = -2 & 5y + z = 13 & y = \dfrac{13(4 - a)}{23 - 5a} \\ 3x + 2y + az = 7 & 2(23 - 5a)z = 78 & z = \dfrac{39}{23 - 5a} \end{array}$$

Für $a = 2$ erhalten wir die Lösung des obigen Gleichungssystems.

Für $a = \frac{23}{5}$ erhalten wir als dritte Gleichung des in Dreiecksgestalt umgeformten Systems $0 \cdot z = 78$; diese Gleichung besitzt keine Lösung (es tritt ein "Widerspruch" auf).
Folglich kann in diesem Fall auch unser Gleichungssystem keine Lösung besitzen, seine Lösungsmenge ist leer.

Es ist auch möglich, dass beim Umformen eines solchen Gleichungssystems die allgemeingültige Gleichung $0 \cdot z = 0$ entsteht. In diesem Fall besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen

Auftrag: Führe die Umformungen durch, die zur Lösung des folgenden Gleichungssystems führen:

$$\begin{array}{lll} 2x + y + 3z = 9 & 2x + y + 3z = 9 & x = \dfrac{16 - 7z}{5} \\ x - 2y + z = -2 & 5y + z = 13 & y = \dfrac{13 - z}{5} \\ 3x + 4y + 5z = 20 & 0 \cdot z = 0 & z \text{ beliebig reell} \end{array}$$

Folglich sind alle Zahlentripel $\left(\frac{16 - 7z}{5} ; \frac{13 - z}{5} ; z\right)$ mit $z \in R$ Lösungen dieses Gleichungssystems.

2. Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

Allgemeine Form einer quadratischen Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$

Normalform einer quadratischen Gleichung: $x^2 + px + q = 0$

Präge dir außer der (meist in den Lehrbüchern stehenden) *Lösungsformel* für die Normalform auch die *für die allgemeine Form* ein:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) ; \quad \textit{Diskriminante:} \; D = b^2 - 4ac \; .$$

Vietascher Wurzelsatz (für die Normalform einer quadratischen Gleichung):

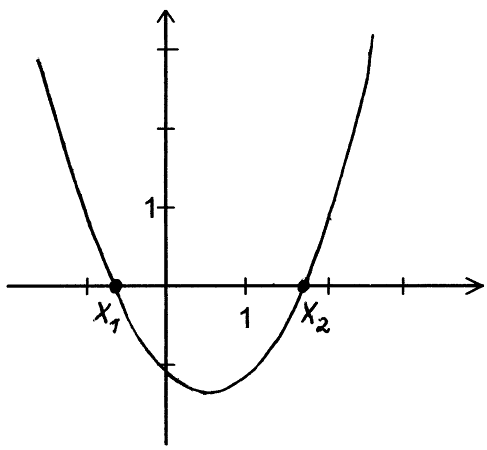
Es gilt stets $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Bevor man die Lösungen einer quadratischen Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel zu ermitteln sucht, sollte man stets zunächst die Diskriminante berechnen. Gilt $D < 0$, dann besitzt die Gleichung keine reellen Lösungen und man kann sich unnötige Rechnungen ersparen. Nur wenn D eine Quadratzahl ist, können die Lösungen ganzzahlig sein.

Ganzzahlige Lösungen versucht man mit Hilfe des Vietaschen Wurzelsatzes zu *erraten*. Man betrachte alle Möglichkeiten, q als Produkt zweier ganzzahliger Faktoren darzustellen und vergleiche dann deren Summe mit $-p$.

Um eine *quadratische Ungleichung* zu lösen, ermittle man zunächst die Lösungen der zugehörigen Gleichung.

Der Graph der zugehörigen Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ ist stets eine Parabel, die die x-Achse in x_1 und x_2 schneidet, falls diese Lösungen existieren.



Aus dem Verlauf der Parabel und der Lage der Nullstellen lässt sich die Lösungsmenge der Ungleichung leicht ablesen.

Beispiele:

a) $2x^2 + 3x + 4 < 0$; $D = -23 < 0$, also keine Nullstellen; $L = \emptyset$.
b) $2x^2 + 3x + 4 > 0$; $D = -23 < 0$, also keine Nullstellen; $L = R$.
c) $x^2 - x - 6 < 0$; $D = 25 = 5^2$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ (erraten); $L = (-2; 3)$
d) $x^2 - x - 6 > 0$; Nullstellen analog ermittelt; $L = (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$

3. Gleichungen höheren Grades

Normalform einer Gleichung n-ten Grades: $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$

Ist $L = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, dann gilt $a_1 = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ und $a_n = (-1)^n\, x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$.

Eine Gleichung n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Lösungen. Es gibt keine Formel, die diese Lösungen allgemein zu berechnen gestattet. (Wohl aber gibt es Näherungsverfahren, mit deren Hilfe sich alle reellen Lösungen mit vorgegebener Genauigkeit ermitteln lassen.)
Um eine derartige Gleichung zu lösen, versucht man zunächst, sie auf das Lösen von quadratischen Gleichungen zurückzuführen. Dies ist entweder durch eine geschickte Substitution oder durch das Erraten ganzzahliger Lösungen nebst Abspalten der zugehörigen Linearfaktoren durch Partialdivision möglich.

Beispiel: $x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$

Diese Gleichung kann nur einen der ganzzahligen Teiler 1, -1, 2, -2, 4, -4 des absoluten Gliedes 4 als ganzzahlige Lösung besitzen. Durch systematisches Probieren erkennt man, dass nur $x_1 = 2$ eine ganzzahlige Lösung unserer Gleichung ist. Wir spalten den zugehörigen Linearfaktor $(x - 2)$ durch Partialdivision ab und erhalten
$(x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4) : (x - 2) = x^4 - 2x^2 - 2$.

Da der entstandene Term biquadratisch ist, führen wir die Substitution $x^2 = u$ durch, lösen die quadratische Gleichung $u^2 - 2u - 2 = 0$ und erhalten auf diese Weise $u_1 = 1 + \sqrt{3}$ und $u_2 = 1 - \sqrt{3}$. Wegen $u_1 > 0$ liefert u_1 die Lösungen $x_2 = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$ und $x_3 = -\sqrt{1 + \sqrt{3}}$. Wegen $u_2 < 0$ liefert u_2 keine weiteren reellen Lösungen.
Folglich gilt
$x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = (x - 2)(x - \sqrt{1+\sqrt{3}})(x + \sqrt{1 + \sqrt{3}})(x^2 - 1 + \sqrt{3})$
sowie $L = \{2; \sqrt{1 + \sqrt{3}}; -\sqrt{1 + \sqrt{3}}\}$.

4. Transformation von Funktionsgraphen

Gegeben sei der Graph einer durch die Funktionsgleichung $y = f(x)$, $x \in X$ dargestellten Funktion f und es gelte $a > 0$ und $b > 0$.

Man erhält den Graph von	aus dem Graph von $y = f(x)$ durch
$y = f(-x)$	Spiegelung an der y-Achse
$y = -f(x)$	Spiegelung an der x-Achse
$y = f(x - a)$	Verschiebung um a Einheiten in Richtung der positiven x-Achse
$y = f(x) + b$	Verschiebung um b Einheiten in Richtung der positiven y-Achse
$y = \|f(x)\|$	Spiegelung desjenigen Teils des Graphen an der x-Achse, der im III. oder im IV. Quadranten liegt

GEOMETRIE

1. Die algebraische Methode zur Lösung von Konstruktionsaufgaben

Def.: Eine *Konstruktion* heißt *elementar* genau dann, wenn sie sich allein mit Hilfe von Zirkel und Lineal (ohne Maßeinteilung) durchführen lässt. Dabei werden folgende *Axiome* zugrunde gelegt:

(A1) Es ist stets möglich, durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade zu ziehen.
(A2) Der gemeinsame Punkt zweier nichtparalleler Geraden lässt sich stets eindeutig konstruieren.
(A3) Es lässt sich stets genau ein Kreis zeichnen, wenn sein Mittelpunkt und mindestens ein Punkt seiner Peripherie gegeben sind.
(A4) Zu einem gegebenen Kreis und einer gegebenen, diesen Kreis schneidenden Geraden lassen sich stets die beiden Schnittpunkte eindeutig konstruieren.
(A5) Es ist stets möglich, die beiden Punkte eindeutig zu konstruieren, die zwei einander schneidenden Kreisen gemeinsam sind.

Hinweis: Die Lösbarkeit bzw. Unlösbarkeit einer Konstruktionsaufgabe hängt vor allem davon ab, welche Zeichengeräte als Hilfsmittel zugelassen sind. (So gibt es z.B. keine elementare Konstruktion, die es gestattet, einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen. Dieses Problem der Winkeldreiteilung wird aber lösbar, wenn man ein "Einschiebelineal" als Hilfsmittel zulässt.)
Die bekanntesten elementar nicht lösbaren Konstruktionsaufgaben sind:
"Würfelverdoppelung", "Winkeldreiteilung", "Quadratur des Kreises", "Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks".

Satz: Sind a und b die Längen zweier gegebenen Strecken (wobei die verwendete Längeneinheit - als Länge einer "Einheitsstrecke" - mit vorgegeben ist, dann kann man Strecken mit den folgenden Längen elementar konstruieren:

$(a + b)$ und $(a - b)$ für $a > b$;
$r \cdot a$, wobei r eine positive rationale Zahl ist ;
$a \cdot b$; $a : b$; $\sqrt{a}$.

Man sagt kurz: Ein Term lässt sich elementar konstruieren genau dann, wenn er nur rationale Rechenoperationen oder Quadratwurzeln enthält.

Hinweis: Findet man mit der Methode der geometrischen Örter oder mit der Methode der Hilfselemente (speziell der Methode der ähnlichen Figuren) keinen Lösungsweg, dann wende man folgende *algebraische Methode* an:
- Man suche ein Bestimmungsstück (Streckenlänge oder Winkelgröße), das eine *"hinreichende Hilfsgröße"* ist, d.h. mit deren Hilfe sich die gesuchte Größe konstruieren ließe.
- Man drücke diese hinreichende Hilfsgröße durch die Daten aus (wozu in der Regel geometrische Sätze benötigt werden). Erweist sich der so ermittelte Term als elementar konstruierbar, dann hat man einen Lösungsweg gefunden.

Mit Hilfe der algebraischen Methode kann man auch nachweisen, dass eine Konstruktionsaufgabe nicht elementar lösbar ist.

2. Einige Begriffe und Sätze aus der Stereometrie

LAGEBEZIEHUNGEN ZWISCHEN GEOMETRISCHEN GEBILDEN IM RAUM

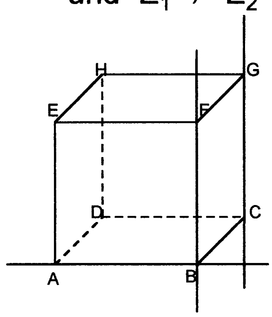
I. Gerade - Gerade

(a_1): Die beiden Geraden fallen zusammen. $g \equiv h$
(a_2): Die beiden Geraden liegen in derselben Ebene und haben keinen Punkt gemeinsam. $g \cap h = \emptyset$ mit $g, h \subset E$
In diesen beiden Fällen nennt man die Geraden *parallel*. $g \parallel h$

(b) Die beiden Geraden haben genau einen Punkt gemeinsam; man spricht von einander *schneidenden* Geraden. $g \cap h = \{S\}$

(c): Die beiden Geraden liegen nicht in ein und derselben Ebene, und sie haben keinen Punkt gemeinsam; man spricht von *windschiefen* Geraden. $g \cap h = \emptyset$, $g \subset E_1$, $h \subset E_2$ und $E_1 \neq E_2$

Beachte: Der Begriff *"orthogonal"* (aufeinander senkrecht stehend) wird nicht nur für schneidende Geraden, sondern auch für windschiefe Geraden angewendet. So bezeichnet man etwa in dem nebenstehend gezeichneten Quader nicht nur die einander schneidenden Geraden AB und BF als orthogonal, sondern etwa auch die windschiefen Geraden AB und CG .

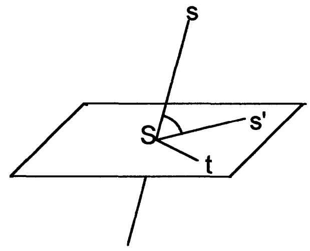


II. Gerade - Ebene

(a_1): Die Gerade liegt in der Ebene E (hat mit ihr alle Punkte gemeinsam). $g \subset E$
(a_2): Die Gerade hat mit der Ebene E keinen Punkt gemeinsam. $g \cap E = \emptyset$
In diesen beiden Fällen heißt g *parallel* zu E . $g \parallel E$

(b): g hat mit E genau einen Punkt gemeinsam; man sagt, g *schneidet* E . $g \cap E = \{S\}$

Ist s einer der beiden vom Schnittpunkt S ausgehenden Strahlen auf g , dann gibt es in E einen von S ausgehenden Strahl s' , für den $\angle(s;s') \leq \angle(s;t)$ für alle in E gelegenen Strahlen t gilt, die von S ausgehen.
$\angle(s;s')$ wird als *Schnittwinkel* zwischen g und E bezeichnet.



III. Ebene - Ebene

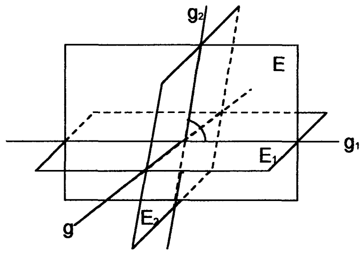
(a_1): Die beiden Ebenen fallen zusammen. $E_1 \equiv E_2$

(a_2): Die beiden Ebenen haben keinen Punkt gemeinsam. $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

In diesen beiden Fällen heißen die Ebenen *parallel* . $E_1 \parallel E_2$

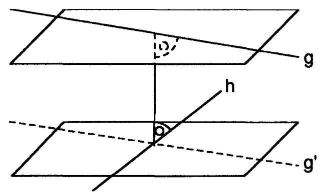
(b): Die beiden Ebenen haben genau eine Gerade g gemeinsam; man sagt, dass die beiden Ebenen einander *schneiden* . $E_1 \cap E_2 = g$

Jede Ebene E , die auf der Schnittgeraden g senkrecht steht, schneidet die Ebenen E_1 und E_2 in zwei Geraden g_1 und g_2, die einander ebenfalls schneiden. $\angle(g_1;g_2)$ bezeichnet man als *Schnittwinkel* zwischen E_1 und E_2 .



Zwei einander schneidende Geraden sowie zwei nicht zusammenfallende parallele Geraden bestimmen stets genau eine Ebene (sie spannen diese Ebene auf).

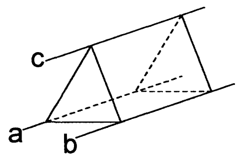
Zu zwei windschiefen Geraden gibt es stets genau ein Paar paralleler Ebenen, in denen diese Geraden liegen. Es gibt auch stets eine Strecke, die auf beiden Geraden senkrecht steht und deren Endpunkte zu diesen Geraden gehören. Die Länge dieser Strecke nennt man den *Abstand der windschiefen Geraden*; man bezeichnet diesen Abstand mit d(g;h) .



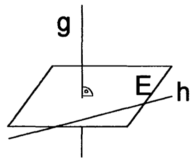
Entsprechend lässt sich der *Abstand zwischen parallelen Gebilden* als Länge eines "gemeinsamen Lots" definieren, den man dann mit d(g;h), d(g;E) bzw. $d(E_1;E_2)$ bezeichnet.

EINIGE STEREOMETRISCHE SÄTZE

S1) Die Parallelität zwischen Geraden bzw. Ebenen ist transitiv, d.h. es gilt stets: $a \parallel b \wedge b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$; $E_1 \parallel E_2 \wedge E_2 \parallel E_3 \Rightarrow E_1 \parallel E_3$.

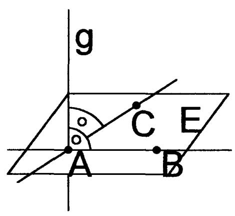


S2) Sind drei verschiedene Geraden paarweise parallel, dann ist jede dieser Geraden parallel zu der von den anderen beiden Geraden aufgespannten Ebene. Speziell: $a \parallel b \wedge a \parallel c \Rightarrow a \parallel E(b;c)$.

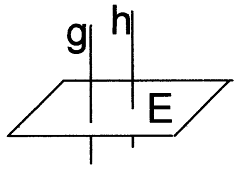


S3) Wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, dann steht sie auch auf jeder Geraden senkrecht, die in dieser Ebene liegt.
$g \perp E \wedge h \subset E \Rightarrow g \perp h$.

S4) Wenn eine Gerade auf zwei einander schneidenden Geraden senk recht steht, dann steht sie auch auf der von diesen beiden Geraden aufgespannten Ebene senkrecht.
$g \perp AB \wedge g \perp AC \Rightarrow g \perp E(ABC)$.

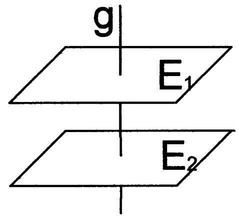


S5) Zwei zur selben Ebene orthogonale Geraden sind stets parallel.
$g \perp E \;\wedge\; h \perp E \quad \Rightarrow \quad g \parallel h$.

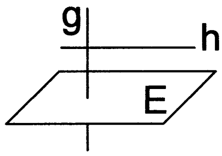


U5) Steht eine von zwei parallelen Geraden auf einer Ebene senkrecht, dann ist dies auch bei der zweiten Geraden der Fall.
$g \perp E \;\wedge\; g \parallel h \quad \Rightarrow \quad h \perp E$.

S6) Zwei zur selben Geraden orthogonale Ebenen sind stets parallel.
$g \perp E_1 \;\wedge\; g \perp E_2 \quad \Rightarrow \quad E_1 \parallel E_2$.



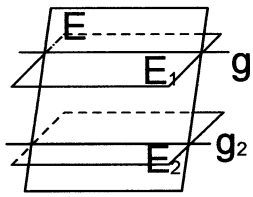
U6) Steht eine von zwei parallelen Ebenen auf einer Geraden senkrecht, dann ist dies auch bei der zweiten Ebene der Fall.
$g \perp E_1 \;\wedge\; E_1 \parallel E_2 \quad \Rightarrow \quad g \perp E_2$.



S7) $g \perp E \;\wedge\; g \perp h \quad \Rightarrow \quad h \parallel E$.

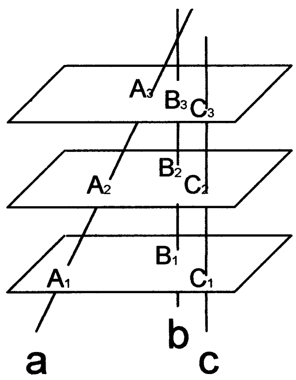
U7) $g \perp E \;\wedge\; h \parallel E \quad \Rightarrow \quad g \perp h$.

S8) Schneidet eine Ebene zwei parallele Ebenen, dann sind die beiden Schnittgeraden parallel.
$E \cap E_1 = g_1 \;\wedge\; E \cap E_2 = g_2 \;\wedge\; E_1 \parallel E_2 \quad \Rightarrow \quad g_1 \parallel g_2$.



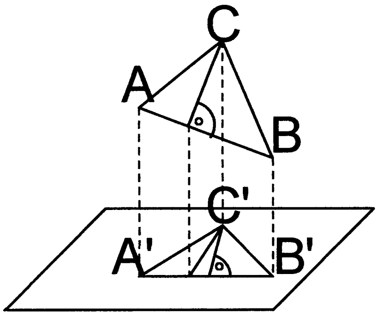
S9) Steht jede von zwei einander schneidenden Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht, dann steht auch ihre Schnittgerade auf dieser Ebene senkrecht.
$E_1 \perp E \;\wedge\; E_2 \perp E \;\wedge\; E_1 \cap E_2 = g \quad \Rightarrow \quad g \perp E$.

S10) *Räumlicher Strahlensatz:*
Wenn zwei Geraden zwei (oder auch mehrere) parallele Ebenen schneiden, dann verhalten sich die Abschnitte auf der einen Geraden so zueinander wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden.

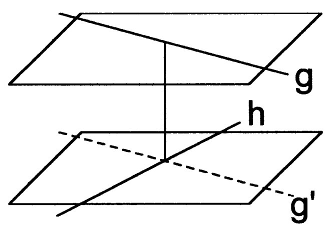


S11) Ist s die Länge einer Strecke und s' die Länge ihrer Projektion auf eine Ebene, dann gilt stets $s \geq s'$ .Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn die Strecke zur Projektionsebene parallel ist.

S12) Ist J der Inhalt eines Vielecks und J' der Inhalt seiner Projektion auf eine Ebene, dann gilt stets $J \geq J'$ .Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn das Vieleck zur Projektionsebene parallel ist.



S13) Zwei windschiefe Geraden besitzen stets genau eine Normaltransversale (das ist eine Strecke, deren Endpunkte auf je einer dieser Geraden liegen und die auf beiden Geraden senkrecht steht).
Die Normaltransversale ist die kürzeste aller Strecken, die Punkte zweier windschiefer Geraden verbindet.
(Beachte, dass man erst auf der Grundlage dieses Satzes den Begriff "Abstand windschiefer Geraden" definieren kann!)



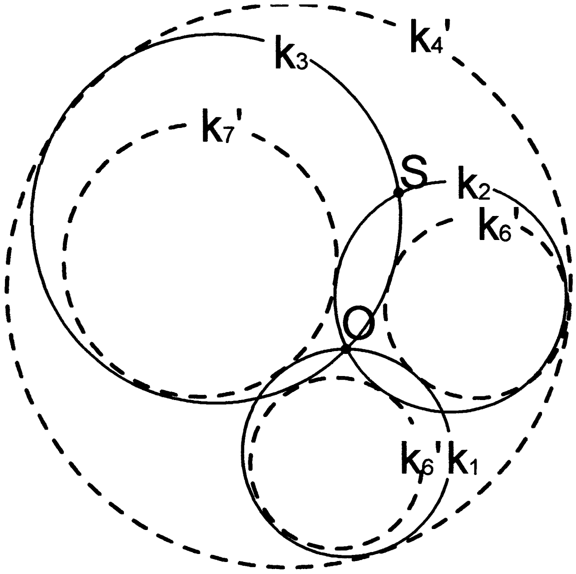
3. Spiegelung am Kreis

P $\xrightarrow{Sp(O;r)}$ P' bedeute, dass dem Originalpunkt P bei Spiegelung am Kreis k(O;r) der Bildpunkt P' zugeordnet wird.

Def.(1):
Liegt P *außerhalb* des Spiegelkreises k(O;r) und ist (PT_1; PT_2) das Tangentenpaar durch P an k(O;r) , dann ist der Bildpunkt P' gleich dem Schnittpunkt der Zentralen OP mit der Berührungssehne $\overline{T_1T_2}$ dieses Tangentenpaares.

Liegt P *innerhalb* des Spiegelkreises k(O;r) und gilt P = O , dann wird P' so konstruiert, dass P' $\xrightarrow{Sp(O;r)}$ P' gilt. [Das heißt, dass Sp(O;r) eine *involutorische* Abbildung ist.]
Liegt P *auf* dem Spiegelkreis k(O;r) , dann gilt P = P' . [Das heißt, dass jeder Punkt des Spiegelkreises ein *Fixpunkt* bei dieser Abbildung ist.]
Dem Punkt O wird als Bildpunkt der sogenannte *"uneigentliche Punkt"* O_∞ zugeordnet und umgekehrt.

Def.(2):
Für $P \neq O$ gilt: P $\xrightarrow{Sp(O;r)}$ P' genau dann, wenn $P' \in \overline{OP}$ und $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$.
Für P = O gilt O $\xrightarrow{Sp(O;r)}$ O_∞ .



Beispiel für die Anwendung der Spiegelung am Kreis für die Lösung einer Aufgabe:

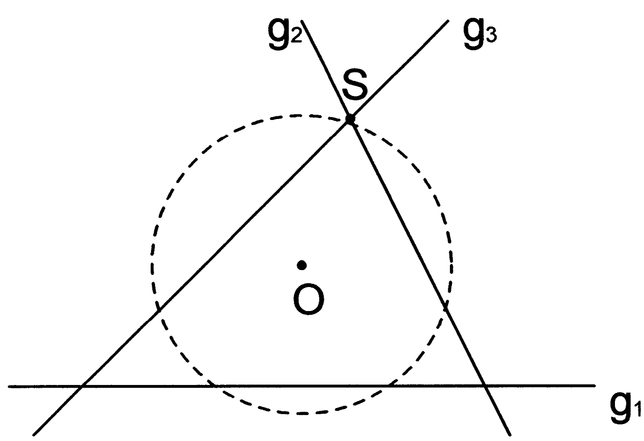
Ausgangsaufgabe:

Geg.:

Drei Kreise k_1 , k_2 , k_3 , die durch einen Punkt O gehen und die einander paarweise schneiden.

Ges.:

Alle Kreise, die k_1, k_2 und k_3 (von außen oder von innen) berühren.



Transformation:

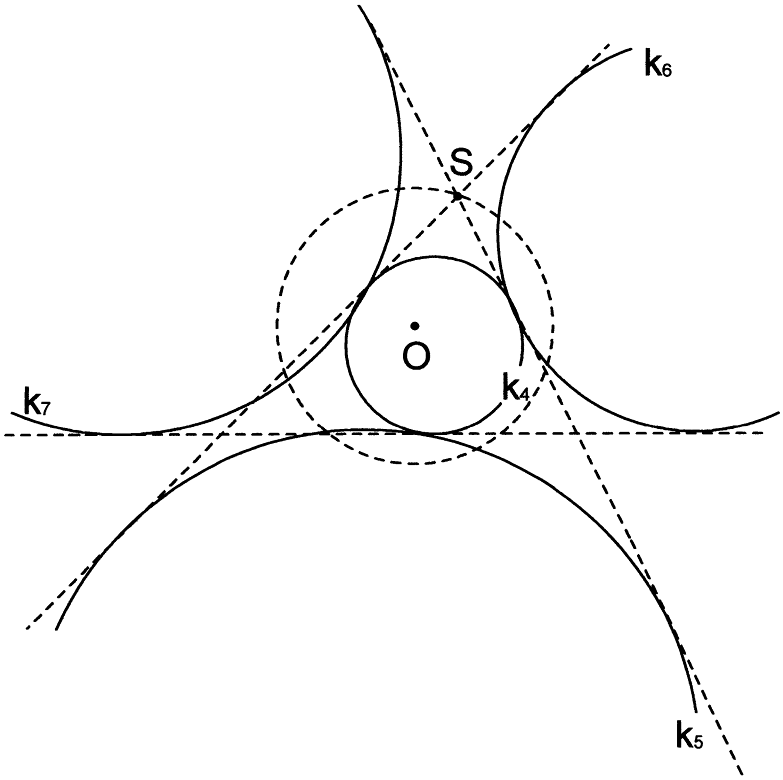
Spiegelung an k(O; $\overline{OS}$),
(wobei r = $\overline{OS}$ günstig gewählt wurde).

$k_1 \rightarrow g_1$
$k_2 \rightarrow g_2$
$k_3 \rightarrow g_3$

Hilfsaufgabe, die durch Transformation der Ausgangsaufgabe erhalten wurde:

Geg.:
Drei Geraden g_1 , g_2 , g_3 , die einander paarweise in drei Punkten schneiden.

Ges.:
Alle "Berührungskreise".



Lösung der Hilfsaufgabe:

Man erhält die Berührungskreise k_4 , k_5 , k_6 , k_7 .

Rücktransformation: Sp(O;r)

$k_4 \rightarrow k_4'$
$k_5 \rightarrow k_5'$
$k_6 \rightarrow k_6'$
$k_7 \rightarrow k_7'$

Die Kreise k_4' , k_5' , k_6' , k_7' sind die Lösungen der Ausgangsaufgabe (vgl. die erste Abbildung).

4. Eigenschaften von Bewegungen

Verschiebungen $V(\overrightarrow{PP'})$, Drehungen Dr(M; φ) , Geradenspiegelungen Sp(g) , Punktspiegelungen Sp(P) sowie alle aus diesen Abbildungen durch Nacheinanderausführung entstehenden Abbildungen heißen Bewegungen.

(a) *Eindeutige Verknüpfbarkeit:*
Die Nacheinanderausführung zweier Bewegungen ergibt stets wieder eine Bewegung.

(b) *Umkehrbarkeit:*
Zu jeder Bewegung gibt es eine eindeutig bestimmte entgegengesetzte Bewegung (die mit der Ausgangsbewegung verknüpft die identische Abbildung ergibt).

(c) *Inzidenztreue:*
Wenn $A \in a$, dann gilt auch für die Bilder $A' \in a'$.

(d) *Geradentreue, Strahlentreue, Streckentreue, Kreistreue:*
Das Bild einer Geraden (eines Strahls, einer Strecke, eines Kreises) ist stets wieder eine Gerade (ein Strahl, eine Strecke, ein Kreis).

(e) *Anordnungstreue:*
Wenn B zwischen A und C liegt, dann liegt auch B' zwischen A' und C'.

(f) *Parallelentreue:*
Wenn $g \parallel h$ und g', h' die Bilder von g, h sind, dann gilt auch $g' \parallel h'$

(g) *Mittelpunktstreue:*
Das Bild des Mittelpunkts einer Strecke ist stets auch der Mittelpunkt der Bildstrecke.

(h) *Längentreue, Winkeltreue, Inhaltstreue:*
Die Länge einer Strecke, die Größe eines Winkels und der Inhalt einer Fläche bleiben bei Bewegungen dieser Gebilde erhalten.

(i) Eine (von der identischen Abbildung verschiedene) orientierungserhaltende Bewegung ist genau dann eine *Verschiebung* $V(\overrightarrow{PP'})$, wenn sie keinen Fixpunkt besitzt.

(j) Eine (von der identischen Abbildung verschiedene) Bewegung ist genau dann eine *Drehung* $Dr(M; \varphi)$, wenn sie genau einen Fixpunkt (nämlich das Drehzentrum M) besitzt.

(k) Eine Bewegung ist genau dann eine *Geradenspiegelung* $Sp(g)$, wenn sie genau eine Fixpunktgerade (nämlich die Spiegelgerade) besitzt.