Schriftliche Abiturprüfung

Leistungskursfach Mathematik

- Nachtermin im Schuljahr 1997/98-

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 1998, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@oskar-reime-gymnasium.de).
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Letzte Änderung: 12.04.03

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**
Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen A, B und C sowie dem Wahlteil D.
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Die Verwendung von GTR-Programmen war nicht erlaubt.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	25 BE,
im Teil B	15 BE,
im Teil C	10 BE,
im Teil D	10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 **Taschenrechner** (TR: nicht programmierbar, ohne Grafikdisplay)[1]
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“[2]

1 Aus diesem Grund wird bei der Lösung kein grafikfähiger Taschenrechner verwendet.
2 Diese werden hier nicht wiedergegeben. Sie enthalten zumeist eine Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Manchmal eine Tabelle zur Summenfunktion der Binomialverteilung. Beides kann durch Verwendung des GTR leicht ersetzt werden. Die Tabellen finden Sie im Inhalt der Online-Ausgabe dieses Textes www.sn.schule.de/~matheabi.

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) ist eine Funktion f_a gegeben durch $y = f_a(x) = \frac{x \cdot \sqrt{a-2x}}{2}$ $\left(x \in \boldsymbol{D}_{f_a}\right)$

Außerdem ist die zweite Ableitung der Funktionen f_a durch

$y = f_a''(x) = \frac{3x-2a}{2 \cdot (a-2x)^{\frac{3}{2}}}$ $\left(x \in \boldsymbol{R},\ x < \frac{a}{2}\right)$ gegeben.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktionen f_a an und führen Sie für die Funktionen f_a eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der Extrema).
Weisen Sie nach, dass die Funktionen f_a keine Wendestellen besitzen.
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_6 im Intervall $-2 \le x \le 3$ und den Graphen der Funktion f_{12} im Intervall $-2 \le x \le 6$. Erreichbare BE-Anzahl: 11

b) Ermitteln Sie eine Gleichung für die Tangente an den Graphen der Funktion f_6 im Punkt $Q(1 \mid f_6(1))$. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion h, auf deren Graph alle lokalen Extrempunkte der Graphen von f_a liegen. Erreichbare BE-Anzahl: 2

d) Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) schließt der Graph der Funktion f_a mit der x-Achse eine Fläche vollständig ein. Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Körper.
Ermitteln Sie den Wert a so, dass das Volumen dieses Rotationskörpers $\frac{2\pi}{3}$ beträgt.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

e) Der Graph der Funktion f_{12} und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebenen E_a durch $(21 - 7a)x + (5 - 5a)y - 35z = -35a$ ($a \in \mathbb{R}$), die Gerade g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(r \in \mathbb{R})$ sowie die Punkte $P(15 \mid -7/2 \mid 7)$, $Q(15 \mid 7 \mid 7)$ und $S(2 \mid 1 \mid -4)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt P in der Ebene E_1 liegt.
Berechnen Sie den Abstand der Punkte P und Q.
Ermitteln Sie den Wert a, für den der Punkt Q in der Ebene E_a liegt. Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Die Gerade g schneidet die Ebene E_1 im Punkt R. Die Punkte P, Q und R sind Eckpunkte eines in der Ebene E_1 liegenden Dreiecks.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide PQRS. Erreichbare BE-Anzahl: 8

c) Ermitteln Sie den Wert a, für den die Ebene E a orthogonal zur Ebene E_1 ist.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

d) Weisen Sie nach, dass die Gerade s mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(p \in \mathbb{R})$ in jeder der Ebenen E_a liegt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil C: Stochastik

Ein Betrieb produziert Glühlampen, Energiesparlampen und Leuchtstoffröhren.

a) Für die Produktion von Glühlampen stehen zwei Maschinen M_1 und M_2 zur Verfügung. Die Maschine M_1 produziert 65% der Glühlampen, wobei der Ausschussanteil 1% beträgt. Bei der Maschine M_2 beträgt der Ausschussanteil 2,5%.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine in diesem Betrieb produzierte Glühlampe Ausschuss ist?
Eine zufällig der Produktion entnommene Glühlampe ist Ausschuss. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt diese Glühlampe von Maschine M_2?
Für eine Untersuchung benötigt man ein von Maschine M_2 gefertigtes Ausschussstück.
Wie viele Glühlampen von M_2 müssen der laufenden Produktion mindestens entnommen werden, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 wenigstens ein Ausschussstück unter ihnen befindet? Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Ein Fachgeschäft erhält eine Lieferung von 900 Glühlampen, darunter 150 farbige. Aus der Lieferung werden 50 Glühlampen zufällig entnommen.
Die Zufallsgröße, welche die Anzahl der farbigen Glühlampen in der Stichprobe beschreibt, sei binomialverteilt. Bestimmen Sie unter dieser vereinfachten Annahme jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.
Ereignis A: Unter den 50 ausgewählten Glühlampen sind höchstens 4 farbige.
Ereignis B: Unter den 50 ausgewählten Glühlampen sind mindestens 8 farbige.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Bei der Produktion von Energiesparlampen rechnet dieser Betrieb mit einer Ausschussquote von 3%. Eine Tagesproduktion an Energiesparlampen wird komplett kontrolliert. Dabei werden 39 defekte Lampen ermittelt. Der Produktionsleiter sieht in dieser Zahl die exakte Bestätigung der Ausschussquote.
Wie viele Energiesparlampen wurden an diesem Tag produziert? Erreichbare BE-Anzahl: 2

d) Die Lebensdauer von Leuchtstoffröhren sei angenähert normalverteilt mit dem Erwartungswert 1 500 Stunden.
Ermitteln Sie die Standardabweichung, wenn 98% der Leuchtstoffröhren eine Lebensdauer zwischen 1 150 Stunden und 1 850 Stunden aufweisen. Erreichbare BE-Anzahl: 2

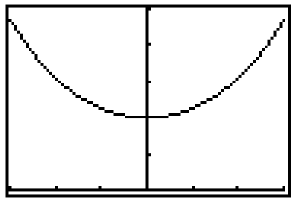
Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Für jedes k ($k \in \mathbb{R}$, $k > 0$) ist eine Funktion f_k durch $y = f_k(x) = \frac{k}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$ gegeben.

Die Abbildung zeigt das mit einem grafikfähigen Taschenrechner erzeugte Bild des Graphen der Funktion f_2:



a) Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f_2 im Punkt $Q(2 \mid f_2(2))$.
Für jedes u ($u \in \mathbb{R}$, $u > 0$) sind zwei Punkte $P_u(u \mid f_2(u))$ und $P_u^*(-u \mid f_2(-u))$ gegeben.
Die Gerade t_u ist Tangente an den Graphen der Funktion f_2 im Punkt P_u.
Die Gerade t_u^* ist Tangente an den Graphen der Funktion f_2 im Punkt P_u^*.
Ermitteln Sie den Wert u, für den sich die Tangenten t_u und t_u^* rechtwinklig schneiden.
Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Die Länge eines Kurvenstückes des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion f im Intervall $a \le x \le b$ bezeichnet man als Bogenlänge L. Diese Bogenlänge kann mit der Formel

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$ berechnet werden.

Weisen Sie nach, dass man die Bogenlänge des Graphen der stetig differenzierbaren Funktion f_k im Intervall $a \le x \le b$ durch $L = \frac{1}{2}\int_a^b e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\, dx$ berechnen kann.

Ermitteln Sie die Bogenlänge L des Graphen der Funktion f_k im Intervall $-k \le x \le k$.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

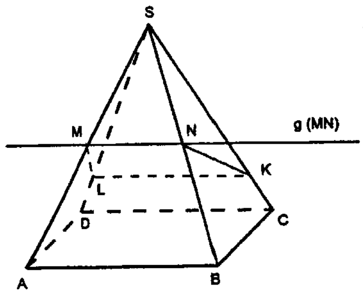


Abbildung 1: Skizze

In einem kartesischen Koordinatensystem ist eine gerade Pyramide ABCDS mit quadratischer Grundfläche durch die Eckpunkte A(-4 | 8 | 16), 8(-9 | 18 | 6), C(-19 | 8 | 1), D(-14 | -2 | 11) und S(1 | 7/4 | -4) gegeben.
Auf der Seitenfläche ABS der Pyramide liegen die Punkte M(0 | 3 | 0) und N(-1 | 5 | -2). Eine Ebene E_1 in der die Punkte M und N liegen, schneidet jede der vier Seitenflächen der Pyramide (siehe Skizze).

a) Weisen Sie nach, dass die durch die Punkte Mund N bestimmte Gerade g parallel zu einer Grundkante der Pyramide verläuft.
Zeigen Sie, dass der Punkt M auf der Kante AS und der Punkt N auf der Kante es liegen.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Die Schnittfigur der Ebene E mit der Pyramide ist das Trapez KLMN, dessen größere der beiden parallelen Seiten die Länge 9 besitzt und dessen Höhe $\frac{3\sqrt{41}}{2}$ beträgt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Lösungsvorschläge

Teil A

a) Definitionsbereich:
$D_{f_a} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a/2\}$
wegen $0 \leq a - 2x$
Nullstellen: 0; a/2
Ansatz für 1. Ableitung: $f_a'(x_E) = 0$
1. Ableitung:

$$f_a'(x) = \frac{a - 3 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{a - 2 \cdot x}}$$

Extremstelle: $x_E = a/3$
Nachweis des lokalen Maximums:

$$f_a''(x_E) = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{a}} < 0$$

Koordinaten des lokalen Maximums:

$$P_{MAX}\left(\frac{a}{3} \middle| \frac{a}{6}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$$

Ansatz für Wendestellen: $f_a''(x_W) = 0$
Nachweis, dass keine Wendestellen existieren:

$$3x_W - 2a = 0 \Rightarrow \quad x_W = \frac{2}{3}a \notin D_{f_a}$$

Graph der Funktion f_6
Graph der Funktion f_{12} 11 BE

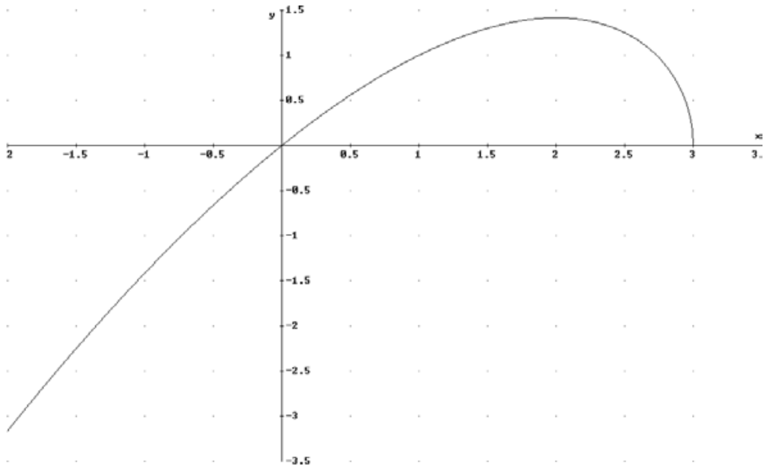


Abbildung 2: f_6

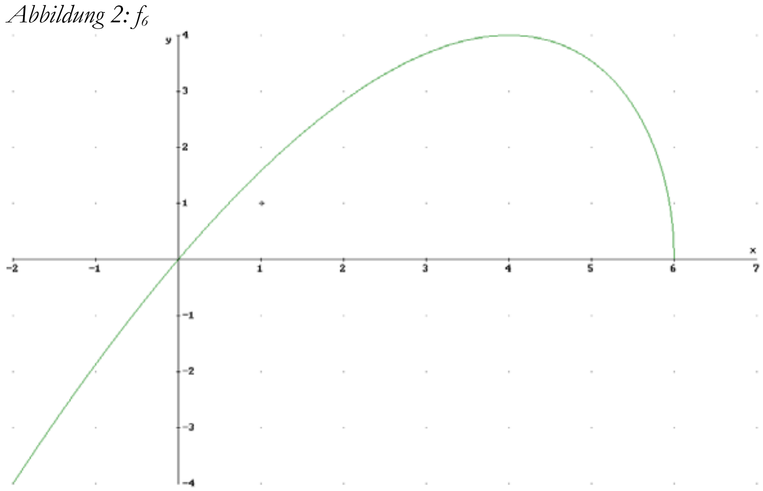


Abbildung 3: f_{12}

b) Ordinate des Punktes Q: y = 1
Anstieg der Tangente: $f_a'(1) = 3/4$
Gleichung der Tangente:
$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ 3 BE

c) Ansatz für Gleichung der Funktion h: $P_{MAX}\left(\underbrace{\frac{a}{3}}_{x} \middle| \underbrace{\frac{a}{6}\sqrt{\frac{a}{3}}}_{y}\right)$ und anschließendes Eliminieren von a

Gleichung der Funktion h: $y = h(x) = \frac{1}{2} x^{3/2}$ 2 BE

d) Ansatz für Volumen: $V(a) = \pi \int_0^{\frac{a}{2}} f_a^2(x)\,dx$

Stammfunktion: $\int f_a^2(x)\,dx = \frac{x^3 \cdot (2a - 3x)}{24}$

Volumen in Abhängigkeit von a: $V(a) = \frac{\pi}{384} a^4$

Ansatz für Wert von a: $V(a) = 2/3\ \pi$
Wert a: 4 5 BE

e) Ansatz: $V(a)=\int_{0}^{a/2} f_a(x)\,dx$ mit a = 12

Umformungen

Stammfunktion: $V(a)=\frac{\sqrt{a^5}}{30}$

Flächeninhalt: $\frac{48\sqrt{3}}{5}$ 4 BE

Teil B

a) Nachweis für Punkt P: P in E_1: 14 ·15 - 35 ·7 = -35
Abstand: 21/2
Wert a: 1 wegen (21 - 7a) ·15 + (5 - 5a) ·7 - 35 ·7 = -35a ist nur für a=1 wahr 3 BE

b) Ansatz für Koordinaten des Punktes R: R = g ∩ E_1 bzw.: 14 ·(6+r) - 35 ·(12+3r) = -35
Koordinaten des Punktes R: R(5 | -14 | 3)

Ansatz für die Höhe der Grundfläche: $F_{PQR}=\frac{1}{2}\left|\vec{PQ}\times\vec{PR}\right|$

Höhe der Grundfläche
Flächeninhalt der Grundfläche: 21/2 √29

Ansatz für Höhe der Pyramide: $h=|S,E_1|=\frac{14\cdot x_S\ +\ 0\cdot y_S\ -\ 35\cdot z_S\ +35}{\sqrt{14^2+0^2+35^2}}$

Höhe der Pyramide: h = √29
Volumen: 203/2 8 BE

c) Ansatz für Wert a: Skalarprodukt der Normalen von E_a und E_1: (21–7a) ·14 + (5–5a) ·0 + 35 ·35 = 0
Wert a: 31/2 2 BE

d) Ansatz für Nachweis:
1. Der Punkt (0 | 7 | 1) liegt in jeder Ebene E_a
2. Der Richtungsvektor von s wird von den Richtungsvektoren von E_a erzeugt bzw. ist senkrecht zum Normalenvektor von E_a
Nachweis, dass die Gerade s in jeder Ebene E a liegt
zu 1.: (21 - 7a) ·0 + (5 - 5a) ·7 - 35 ·1 = -35a
zu 2.: (21 - 7a) ·5 + (5 - 5a) ·(-7) - 35 ·2 = 0 2 BE

Teil C

a) Im Text gegeben:
$P(M_1) = 0{,}65$; $P(M_2) = 1 – P(M_1) = 0{,}35$;
A – die Maschine produziert Ausschuss; $P_{M1}(A) = 0{,}01$; $P_{M2}(A) = 0{,}025$
Totale Wahrscheinlichkeit: P(A) = 61/4000

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_A(M_2)$ = 35/61 → Satz von Bayes: $P_A(M_2)=\frac{P(M_2)\cdot P_{M_2}(A)}{P(A)}$

Ansatz für Anzahl:
X – Zufallsgröße, die beschreibt, wie viele Glühlampen der Produktion von M_2 entnommen wurden, bis erstmals eine defekte Glühlampe auftaucht.
$P(X \leq k) \geq 0{,}99$ (Bernoulli-Kette)
$1 – P(X > k) \geq 0{,}99$ ↑[3]

---

3 Mit $P(X > k)$ wird die Wahrscheinlichkeit beschrieben, dass bis zur Auswahl der k-ten Glühlampe noch keine Lampe defekt war.

$1-(1-P_{M2}(A))^k \geq 0{,}99$ usw.
Anzahl: 182 4 BE

b) Wahrscheinlichkeit P(A): ≈ 0,0643
Wahrscheinlichkeit P(B): ≈ 0,6089 ↑[4] 2 BE

c) Ansatz für Anzahl: Da die Zahl von 39 erwartet wurde, müsste wohl E(X) = 39 = n ·0,03 gelten.
Anzahl: 1 300 2 BE

d) Ansatz für Standardabweichung:
$\mu = 1500$ und Satz von Moivre-Laplace mit $P(1150<X<1850) \approx 2\Phi(350/\sigma) - 1 \approx 98\% \Rightarrow$
$\Phi(350/\sigma) \approx \Phi(2{,}33)$
Standardabweichung: ≈ 150 2 BE

Teil D1

a) 1. Ableitung: $f_k'(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2}$

Anstieg der Tangente

Gleichung der Tangente: $y = \dfrac{e^2-1}{2e}x + \dfrac{2}{e}$

Ansatz für Wert u: $f_k'(u) \cdot f_k'(-u) = -1$

quadratische Gleichung: $e^{2u} - 6e^u + 1 = 0$

Wert u: $2\ln(\sqrt{2}+1)$ 6 BE

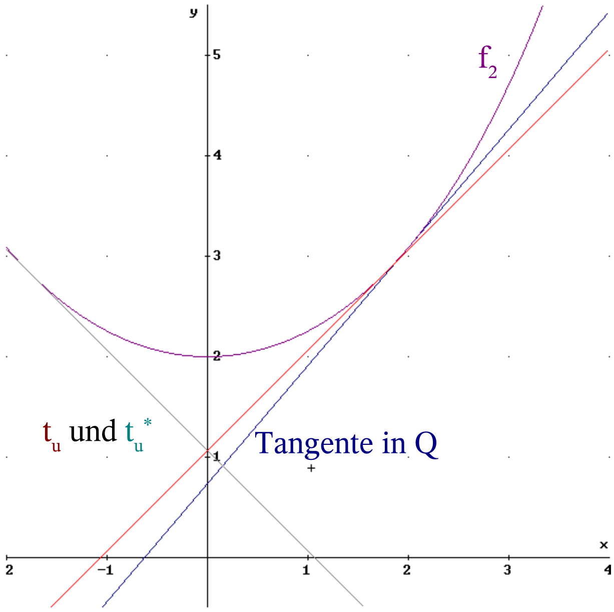


Abbildung 4: zu a)

b) Ansatz für Nachweis:

$$2 \cdot \sqrt{1+[f_k'(x)]^2} = e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}$$

Nachweis:

$$\sqrt{1+[f_k'(x)]^2} = \sqrt{\frac{4+\left[e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right]^2}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{e^{\frac{2x}{k}} + 2 + e^{-\frac{2x}{k}}}}{2} = \frac{\sqrt{\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)^2}}{2}$$

Stammfunktion: $\dfrac{1}{2}\int e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\,dx = f_k(x)$

Bogenlänge L: $k(e-e^{-1})$ 4 BE

Teil D2

a) Ansatz für Nachweis der Parallelität: $\vec{AB} = k \cdot \vec{MN}$

Nachweis der Parallelität: k = 5
Ansatz für Nachweis der Lage der Punkte M und N: M $g_{AS}(\varkappa)$ und M $g_{BS}(\varkappa)$
Nachweis der Lage der Punkte M und N: $\varkappa = 0{,}8$ 4 BE

b) Abstand der Punkte M und N: 3
Flächeninhalt: $9 \cdot\sqrt{41}$
Bedingungen für die Lage der Schnittpunkte der Ebene E mit den Kanten $\overline{CS}$ und $\overline{DS}$
Ansatz für Koordinaten eines der Punkte K oder L:
z. B.: Wegen K $g_{CS}(\lambda)$, L $g_{DS}(\lambda)$, der Länge $\overline{CD} = 15$ und der Gültigkeit des Strahlensatzes,

4 Hier ist die den Materialien zur Prüfung beiliegende Tabelle zur Binomialverteilung n=50 zu nutzen.

muss $\frac{1}{1-\lambda}=\frac{15}{9}$ gelten. Es folgt: $\lambda = 0{,}4$ und $K = g_{CS}(0{,}4)$ bzw. $L = g_{DS}(0{,}4)$.

Koordinaten des Punktes K oder L: $K\left(-11\,|\,\frac{11}{2}\,|\,-1\right)$; $L\left(-8\,|\,-\frac{1}{2}\,|\,5\right)$

Gleichung der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}22\\-5\\2\end{pmatrix}$ $(s,t\in\mathbb{R})$ 6 BE