Schriftliche Abiturprüfung – Grundkurs – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2016, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier ClassPad330) eingesetzt.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: L. Wendrock (wendrock@googlemail.com) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 10.07.17.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Hinweise für den Teilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 30 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten. Es sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	58	55	52	49	46	43	40	37	34	31	28	25	21	17	13	0

Prüfungsinhalt

Aufgabe A

Tragen Sie die Antworten zur Aufgabe 1 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 2 bis 4 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=x\cdot e^x$ ($x\in\mathbb{R}$).
Die erste Ableitungsfunktion f‘ von f kann beschrieben werden durch:

- ▢ $f'(x)=e^x$
- ▢ $f'(x)=e^{x-1}$
- ▢ $f'(x)=x\cdot e^x$
- ▢ $f'(x)=e^x\cdot(1+x)$
- ▢ $f'(x)=x\cdot(e^x+1)$

1.2 Der Graph der Funktion f mit $y=f(x)=\frac{2\cdot x^2-3\cdot x+4}{-6\cdot x^2}$ ($x\in\mathbb{R};x\neq 0$) besitzt eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung

▢	▢	▢	▢	▢
$y=-3$	$y=-\frac{1}{3}$	$y=0$	$y=\frac{1}{3}$	$y=3$

1.3 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x)=(2\cdot x-4)^3$ ($x\in\mathbb{R}$).

Eine mögliche Stammfunktion G von g kann beschrieben werden durch:

- ▢ $G(x)=\frac{1}{6}\cdot(2\cdot x-4)^2$ ($x\in\mathbb{R}$)
- ▢ $G(x)=\frac{1}{3}\cdot(2\cdot x-4)^2$ ($x\in\mathbb{R}$)
- ▢ $G(x)=\frac{1}{8}\cdot(2\cdot x-4)^4$ ($x\in\mathbb{R}$)
- ▢ $G(x)=\frac{1}{4}\cdot(2\cdot x-4)^4$ ($x\in\mathbb{R}$)
- ▢ $G(x)=\frac{1}{2}\cdot(2\cdot x-4)^4$ ($x\in\mathbb{R}$)

1.4 In einem kartesischen Koordinatensystem verläuft einer Gerade g senkrecht zur y-z-Koordinatenebene.

Eine mögliche Gleichung der Geraden g ist:

- ▢ $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ ($t\in\mathbb{R}$)
- ▢ $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ($t\in\mathbb{R}$)
- ▢ $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ($t\in\mathbb{R}$)
- ▢ $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ ($t\in\mathbb{R}$)
- ▢ $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ ($t\in\mathbb{R}$)

1.5 In einer Urne befinden sich 3 grüne und 5 rote Kugeln.

Der Urne wird eine Kugel zufällig entnommen. Nach Feststellen ihrer Farbe wird die gezogene Kugel in die Urne zurückgelegt.

Dieser Vorgang wird insgesamt dreimal durchgeführt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der dabei gezogenen grünen Kugeln.

Die Wahrscheinlichkeit $P(X=2)$ kann mit folgendem Term berechnet werden:

▢	▢	▢	▢	▢
$2\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}$	$3\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$	$\left(\frac{3}{8}\right)^2\cdot\frac{5}{8}$	$3\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2\cdot\frac{5}{8}$	$3\cdot\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2$

Für Aufgabe 1 erreichbare BE-Anzahl: 5

2 Der Graph der Funktion f mit $f(x)=2\cdot x^3-6\cdot x^2$ ($x\in\mathbb{R}$)besitzt genau einen Wendepunkt W.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f in diesem Wendepunkt W.

Erreichbare BE-Anzahl: 05

3 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade g mit

$g:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ ($t\in\mathbb{R}$) und für jeden Wert von a ($a\in\mathbb{R}$) der Punkt $P_a(2|a|0)$ gegeben.

Es existiert genau ein Wert von a, sodass der Punkt P_a auf der Geraden g liegt.

Berechnen Sie diesen Wert von a.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

4 Gegeben ist die vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,25	0,4	P(X=2)	0,2

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X

Erreichbare BE-Anzahl: 03

Aufgabe B 1

Eine ebene viereckige Werbefläche wird in einem kartesischen Koordinatensystem durch die Eckpunkte $P(4|2|0)$, $Q(2|4|0)$, $R(0|4|2)$ und $S(0|2|4)$ beschrieben (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter).

1.1. Stellen Sie das Viereck PQRS in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

Weisen Sie nach, dass dieses Viereck ein gleichschenkliges Trapez ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 06

1.2. Ermitteln Sie den Flächeninhalt der Werbefläche.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

Für eine Sonderausstellung wird die Werbefläche so zu einem Sechseck PQRSTU vergrößert, dass die Gerade durch die Punkte P und S eine Symmetrieachse dieses Sechsecks ist.

1.3. Weisen sie nach, dass der Punkt T die Koordinaten $T(2|0|4)$ besitzt.

Bestimmen Sie die Koordinaten das Punktes U.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

1.4. Zur Stabilisierung dieser sechseckigen Werbefläche verlaufen von einem Punkt Z jeweils gleich lange Metallstreben zu jedem Eckpunkt des Sechsecks PQRSTU, sodass die gerade Pyramide PQRSTUZ entsteht. Der Punkt Z liegt in der x-yKoordinatenebene.

Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes Z.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

1.5. Träger für derartige Werbeflächen werden aus Kunststoff gefertigt.

30% der Träger werden aus recyceltem Kunststoff hergestellt. Die Wahrscheinlichkeit für einen Materialfehler bei einem Träger aus nicht recyceltem Kunststoff beträgt 0,3 %. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Träger einen Materialfehler besitzt, beträgt 1,5 %.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Träger aus nicht recyceltem Kunststoff besteht und keinen Materialfehler besitzt.

Ermitteln Sie den prozentualen Anteil der Träger mit Materialfehler an allen aus recyceltem Kunststoff hergestellten Trägern.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

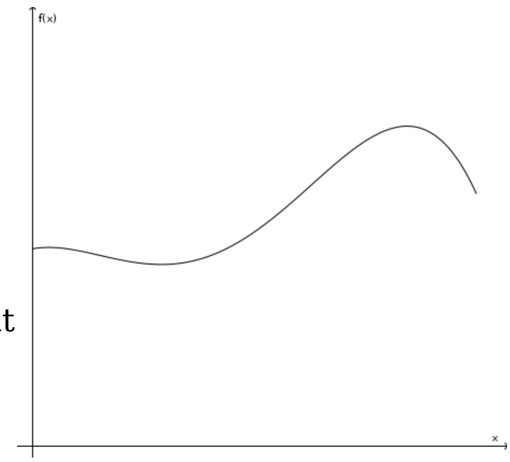
Aufgabe B 2

An einer Wetterstation in Deutschland werden kontinuierlich Temperaturen gemessen.

In der Abbildung ist der Temperaturverlauf für die ersten 18 Stunden nach Mitternacht an einem Tag im Juli dargestellt.

Der Temperaturverlauf kann in dem gegebenen Koordinatensystem näherungsweise durch den Graphen der Funktion f mit

$f(x) = -0{,}00178 \cdot x^4 + 0{,}05 \cdot x^3 - 0{,}33 \cdot x^2 + 0{,}37 \cdot x + 16$ ($x \in \mathbb{R}; 0{,}00 \le x \le 18{,}00$) beschrieben werden.



Dabei gilt:

x … Zeitpunkt nach Mitternacht (in Stunden)

f(x) … Temperatur (in Grad Celsius) zum Zeitpunkt x

2.1. Zeigen Sie, dass 10,00 Stunden nach Mitternacht die Temperatur von 18,9°C erreicht wurde. Ermitteln Sie, zu welcher Uhrzeit die niedrigste Temperatur im angegebenen Zeitraum gemessen wurde.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

2.2. Bestimmen Sie für den angegebenen Zeitraum den Zeitpunkt nach Mitternacht, an dem der Anstieg des Temperaturverlaufes am größten war.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

2.3. Ermitteln Sie für den angegebenen Zeitraum die Zeitdauer, in der die Temperatur mindestens 25,0°C betrug.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

2.4. An einem anderen Tag wurden um 07:00Uhr die Temperatur von 18,0°C und um 12:00Uhr die Temperatur von 27,0°C gemessen. Die Tageshöchsttemperatur von 30,0°C wurde um 15:00Uhr erreicht. Der Temperaturverlauf kann für diesen Tag im Zeitraum von 07:00Uhr bis 18:00Uhr annähernd durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades beschrieben werden. Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

Die Funktion h mit $h(x)=-\frac{x^2}{80}+\frac{x}{5}$ ($x\in D_h$) beschreibt näherungsweise die Leistung pro Fläche, die an einem Sommertag zu einem bestimmten Zeitpunkt zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang an die Erdoberfläche abgegeben wird.
Daher gilt:
x … Zeitpunkt nach Sonnenaufgang (in Stunden)
h(x) … Leistung pro Fläche (in Kilowatt pro Quadratmeter) zum Zeitpunkt x
Zu den Zeitpunkten des Sonnenaufgangs und des Sonnenuntergangs beträgt die Leistung pro Fläche null Kilowatt pro Quadratmeter.
Die Energie pro Fläche, die in einem Zeitintervall an die Erdoberfläche übertragen wird, kann durch die Integration der Leistung pro Fläche über die Zeit bestimmt werden.

2.5. Ermitteln Sie die Energie pro Fläche (in Kilowattstunden pro Quadratmeter), die an diesem Tag zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang an die Erdoberfläche abgegeben wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

2.6. Bestimmen Sie, bis zu welchem Zeitpunkt x = a ($a\in\mathbb{R};0<a<16$) nach Sonnenaufgang eine Energie von 7,2 Kilowattstunden an einen Quadratmeter der Erdoberfläche abgegeben wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

2.7. Der Deutsche Wetterdienst gibt die Niederschlagswahrscheinlichkeiten für drei aufeinander folgende Tage mit jeweils 30 % an.

Ermitteln Sie unter Verwendung dieser Angabe die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

Ereignis A: An allen drei Tagen fällt kein Niederschlag

Ereignis B: An höchstens einem der drei Tage fällt Niederschlag.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

2.8. Die Güte einer Wettervorhersage gibt Aufschluss darüber, wie hoch die Wahrscheinlichkeit für das Zutreffen dieser Wettervorhersage ist.

Erfahrungsgemäß beträgt die Güte einer Wettervorhersage für den kommenden Tag 90%. Es besteht die Vermutung, dass die Güte einer Wettervorhersage für den kommenden Tag gestiegen ist.

In einem Test mit 120 zufällig ausgewählten Wettervorhersagen für den jeweils kommenden Tag soll die Nullhypothese „Die Güte einer Wettervorhersage für den kommenden Tag liegt höchstens bei 90%“ auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden.

Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

Lösungsvorschläge

Teil A

1. Je eine BE für das richtige Feld: Feld 4, Feld 2, Feld 3, Feld 4, Feld 4

2. $\begin{array}{c} f'(x)=6x^2-12 \\ f''(x)=12x-12 \end{array}$ ==> $\begin{array}{c} 0=12x-12 \\ x=1 \end{array}$ der Nachweis mit f‘‘‘ kann entfallen, da ein WP laut Aufgabenstellung vorhanden ist.

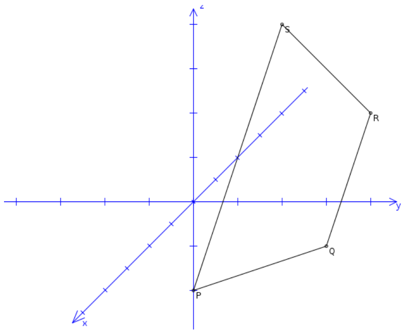
   $\begin{array}{c} f(1)=2\cdot 1-6\cdot 1=-4 \\ f'(1)=6\cdot 1-12 \end{array}$ $\begin{array}{c} P(1|-4) \\ m=-6 \end{array}$ ==> $\begin{array}{c} -4=-6\cdot 1+n \\ n=2 \end{array}$ also $y=-6x+2$

3. $\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+t \\ 3-t \\ 2+2t \end{pmatrix}$ erste und letzte Zeile ergeben t=-1, damit wird a=4

4. $\begin{array}{c} P(X=2)=1-0{,}25-0{,}4-0{,}2=0{,}15 \\ E(X)=0\cdot 0{,}25+1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}15+3\cdot 0{,}2=1{,}3 \end{array}$

Teil B1

1.



1.1. $\vec{QR} || \vec{PS}$ Da $2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ==> Trapez

Gleichschenkligkeit: $d(PQ) = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8}$
$d(RS) = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

1.2. Fläche eines Trapezes: $A = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$

h ermittelt mit TR Programm „lagepge“ $h \approx 2{,}4495$

also
$$A = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{QR}| + |\overline{PS}|) \cdot 2{,}4495$$
$$A = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{32}) \cdot 2{,}4495 \approx 10{,}39$$

1.3. Wenn $\overline{PS}$ Symmetrieachse ist, dann $|\overline{ST}| = |\overline{SR}|$ und $\sphericalangle(PSR) = \sphericalangle(PST)$

$$|\overline{ST}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8}$$
$$|\overline{SR}| = \sqrt{8}$$

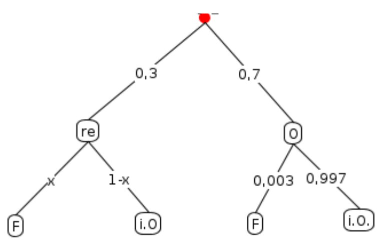
TR:
$$angle\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = 120°$$
$$angle\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 120°$$

$\vec{OU} = \vec{OT} + \vec{RQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ also $U(4|0|2)$

1.4. $Z(x|y|0)$ $M_{PS}(2|2|2)$

Normalenvektor der Ebene PQS: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ==> t=-2 also $Z(0|0|0)$



1.5. $P(\textit{nicht recycelt und } i.O) = 0{,}7 \cdot 0{,}997 = 0{,}6979$

$$0{,}3 \cdot x + 0{,}7 \cdot 0{,}003 = 0{,}015$$
$$x = 0{,}043$$

Teil B2

2.

2.1. $f(10)=18{,}9$ (einsetzen in die Gleichung)

TR- Zeichnen und Minimum ermitteln lassen $Min(5{,}222|14{,}730)$

5,22 entspricht 5:13Uhr

2.2. Wendepunkte mit TR

$W_1(2{,}73|15{,}47)$ (ist ein Temperaturabfall)

$W_2(11{,}31|21{,}19)$ entspricht 11:19 Uhr

2.3. TR: „x-berechnen“ für y=25 ergibt $x_1=13{,}705$ und $x_2=16{,}460$ also eine Spanne von 2,76 Stunden

2.4. vier Informationen für eine Steckbriefaufgabe:

$$\begin{matrix} (7|18) \\ (12|27) \\ (15|30) \\ f'(15)=0 \end{matrix}$$ ergibt ein vierdimensionales LGS

$$\frac{-7}{240}x^3+\frac{107}{120}x^2-\frac{113}{16}x+\frac{135}{4}=y$$

2.5. Nullstelle mit TR grafisch ermitteln : $\begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=16 \end{matrix}$

$$\int_0^{16}\frac{-x^2}{80}+\frac{x}{5}\,dx\approx 8{,}533$$

2.6. $solve(\int_0^t \frac{-x^2}{80}+\frac{x}{5}\,dx=7.2\,,t)$ ergibt t=12 (andere Lösungen entfallen)

2.7. $P(A)=0{,}7^3=0{,}343$

$P(B)=0{,}7^3+3\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}3=0{,}784$

2.8. $H_0: p\le 0{,}9$

$P(0\le X\le A)\ge 0{,}95$

TR: $invBinomialCDf(0.95{,}120{,}0.9)=113$

==> 113 überprüfen ergibt {114;...;120}