Schriftliche Abiturprüfung – Grundkurs – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2015, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier ClassPad330) eingesetzt.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: L. Wendrock (wendrock@googlemail.com) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 10.07.17.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Hinweise für den Teilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 30 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten. Es sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	58	55	52	49	46	43	40	37	34	31	28	25	21	17	13	0

Prüfungsinhalt

Aufgabe A

Tragen Sie die Antworten zur Aufgabe 1 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 2 bis 4 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Welchen Anstieg besitzt der Graph der Funktion f mit $f(x)=e^{-\frac{1}{4}\cdot x+2}$ $x\in\mathbb{R}$ an der Stelle x=0?

☐ $-e^2$ ☐ $-\frac{1}{4}\cdot e^2$ ☐ $-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}}$ ☐ $\frac{1}{4}\cdot e^2$ ☐ e^2

1.2 Welches der folgenden bestimmten Integrale hat den Wert 0?

☐ $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$ ☐ $\int_0^1 e^x\,dx$ ☐ $\int_{-1}^1 x^2\,dx$ ☐ $\int_{-2}^1 (2\cdot x)\,dx$ ☐ $\int_{-1}^1 x\,dx$

1.3 In der Abbildung ist der Graph der ersten Ableitungsfunktion f' einer Funktion f in einem Intervall ihres Definitionsbereichs dargestellt. Die Nullstelle von f' ist x_0.
Welche der folgenden Aussagen ist für die Funktion f im dargestellten Intervall wahr?

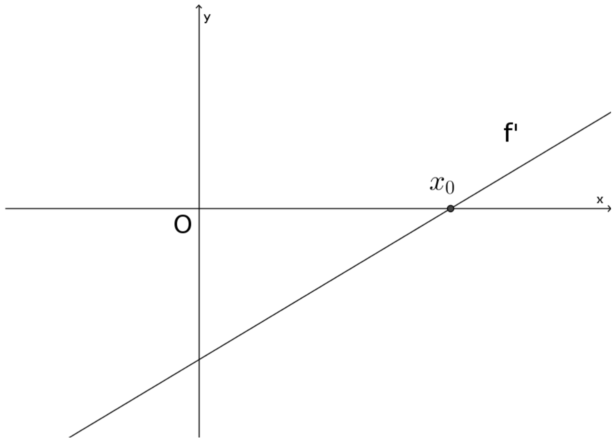
▢ Die Funktion f ist streng monoton fallend.

▢ Die Funktion f ist streng monoton wachsend.

▢ Die Funktion f ist für $x < x_0$ streng monoton wachsend.

▢ Die Funktion f ist für $x > x_0$ streng monoton wachsend.

▢ Die Funktion f besitzt keine Extremstelle.



1.4 Eine parameterfreie Gleichung der Geraden g mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$ ist:

▢	▢	▢	▢	▢
$y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2} \cdot x + 2$	$y = 2 \cdot x + \frac{1}{2}$	$y = 2 \cdot x + 2$	$y = \frac{1}{2} \cdot x$

1.5 Ein Glücksrad ist in zehn zueinander kongruente Sektoren eingeteilt. Fünf der Sektoren sind weiß, vier blau und einer gelb angestrichen. Durch Drehen des Glücksrades wird genau ein Sektor zufällig ausgewählt.
Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Es werden zwei Sektoren der gleichen Farbe ausgewählt." beträgt:

▢	▢	▢	▢	▢
0,10	0,41	0,42	0,50	0,51

Für Aufgabe 1 erreichbare BE-Anzahl: 5

2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x \cdot (x - 2)$ ($x \in \mathbb{R}$).

2.1 Der Graph der Funktion f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

2.2 Geben Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen der Funktion f an.

Erreichbare BE-Anzahl: 01

3 Gegeben sind der Punkt $A(2|1|-3)$ und eine Ebene E mit E: $2\cdot x-y-z=0$.
Der Punkt A wird an der Ebene E gespiegelt. Der Bildpunkt ist B.
Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes B.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

4 In einer Schachtel befinden sich neun Chips im Wert von je 2€, fünf Chips im Wert von je 1€ und sechs Chips im Wert von je 50 Cent.
Der Schachtel wird ein Chip zufällig entnommen.
Die Zufallsgröße X beschreibt den Wert des gezogenen Chips.
Ermitteln Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X .

Erreichbare BE-Anzahl: 03

Aufgabe B 1

In einem Skigebiet wird eine Kabinenseilbahn betrieben. Der Verlauf des Tragseils der Kabinenseilbahn und die Profillinie des Geländes unterhalb der Kabinenseilbahn können in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 100 Meter) dargestellt werden. Für die Höhe des Meeresspiegels gilt y = 0.

Das Tragseil verläuft zwischen zwei Befestigungspunkten. In der Abbildung werden der linke Befestigungspunkt mit A und der rechte Befestigungspunkt mit B bezeichnet. Diese Punkte besitzen die Koordinaten $A(-9{,}00|y_A)$ und $B(5{,}80|y_B)$.
Der Verlauf des Tragseils kann durch den Graphen der Funktion s mit
$y=s(x)=8{,}227\cdot10^{-3}\cdot x^2+1{,}955\cdot10^{-2}\cdot x+8{,}360$ ($x\in\mathbb{R};-9{,}00\leq x\leq 5{,}80$)
beschrieben werden.
Der Verlauf der Profillinie des Geländes unterhalb der Kabinenseilbahn kann durch den Graphen der Funktion g mit
$y=g(x)=1{,}504\cdot10^{-3}\cdot x^3+3{,}125\cdot10^{-2}\cdot x^2+7{,}300$ ($x\in\mathbb{R};-9{,}00\leq x\leq 5{,}80$)
beschrieben werden.

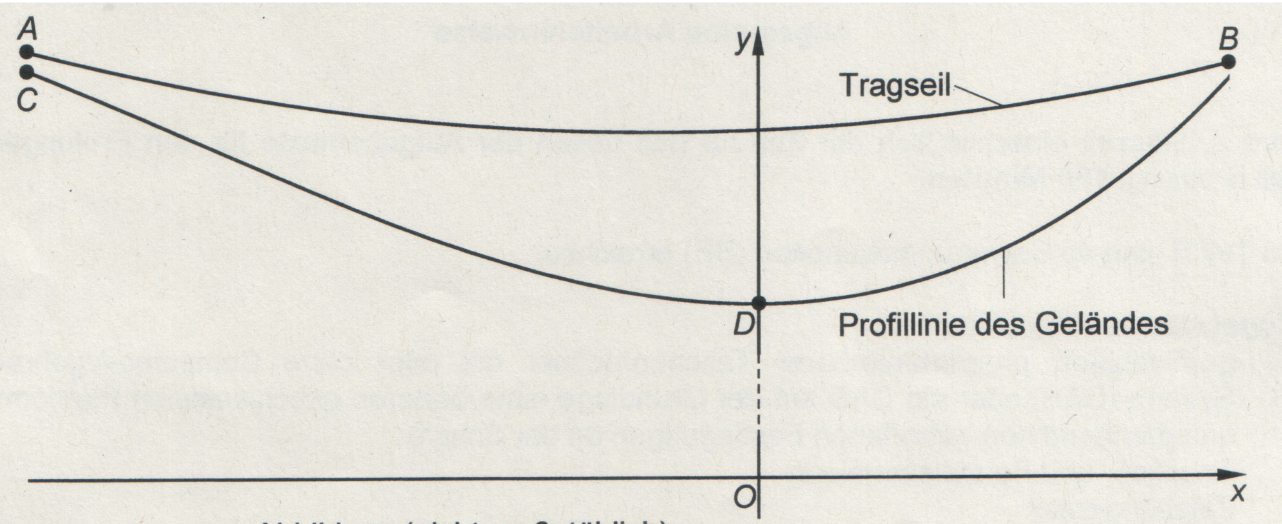


Abbildung (nicht maßstäblich)

1.1. Begründen Sie, dass die y-Koordinate des Punktes A näherungsweise 8,85 beträgt.

Zeigen Sie, dass der Höhenunterschied zwischen den beiden Befestigungspunkten des Tragseils etwa 10 m beträgt.

Geben Sie die kleinste Höhe des Tragseils über dem Meeresspiegel an.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

1.2. Die Kabinen bewegen sich mit der Durchschnittsgeschwindigkeit $7{,}5\frac{m}{s}$.

Berechnen Sie die Fahrzeit einer Kabine zwischen den beiden Befestigungspunkten des Tragseils.

Hinweis: Für die Länge l des Graphen einer Funktion f im Intervall $a \le x \le b$ gilt:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx \ .$$

Erreichbare BE-Anzahl: 04

1.3. Jeder Punkt des Tragseils besitzt eine Höhe über der Profillinie des Geländes. Diese Höhen werden jeweils parallel zur y-Achse gemessen.

Ermitteln Sie den größten Wert dieser Höhen.

Aus Sicherheitsgründen muss die Höhe jedes Punktes des Tragseils über der Profillinie des Geländes mindestens 9 m betragen.

Zeigen Sie, dass diese Bedingung für die Befestigungspunkte A und B erfüllt ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

Entlang der Profillinie des Geländes verläuft eine Skipiste zwischen zwei Punkten. In der Abbildung werden der Anfangspunkt der Skipiste mit C und der Endpunkt mit D bezeichnet.

Diese Punkte besitzen die Koordinaten $C\left(-9{,}00 \mid g\left(-9{,}00\right)\right)$ und $D\left(0{,}00 \mid g\left(0{,}00\right)\right)$.

1.4. Skipisten werden nach dem Schwierigkeitsgrad in blaue, rote und schwarze Skipisten unterteilt. Bei blauen Skipisten darf das maximale Gefälle höchstens 25%, bei roten Skipisten höchstens 40 % betragen. Schwarze Pisten besitzen ein maximales Gefälle von mehr als 40 %.

Bestimmen Sie den Schwierigkeitsgrad der Skipiste.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

1.5. Untersuchen Sie, ob die Profillinie des Geländes den Blick vom Endpunkt der Skipiste zum linken Befestigungspunkt des Tragseils behindert.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

1.6. Erfahrungsgemäß betreiben 72 % der Wintertouristen des Skigebietes alpinen Skisport.

95 % der Wintertouristen des Skigebietes, die alpinen Skisport betreiben, nutzen auch diese Kabinenseilbahn. 50% der Wintertouristen des Skigebietes, welche keinen alpinen Skisport betreiben, nutzen ebenfalls diese Kabinenseilbahn.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Wintertourist des Skigebietes alpinen Skisport betreibt und diese Kabinenseilbahn nutzt.

Ermitteln Sie, wie viele von 1000 Wintertouristen des Skigebietes diese Kabinenseilbahn erfahrungsgemäß nutzen werden. Erreichbare BE-Anzahl: 04

1.7. Für die Kabinenseilbahn können auch ermäßigte Tickets erworben werden. Erfahrungsgemäß beträgt der Anteil der erworbenen ermäßigten Tickets 10%.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 30 erworbenen Tickets mehr als drei Tickets ermäßigt sind.

Bestimmen Sie, wie viele Tickets mindestens erworben werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 % mindestens ein ermäßigtes Ticket erworben wird. Erreichbare BE-Anzahl: 04

Aufgabe B 2

Die Abbildung zeigt den grundsätzlichen Aufbau eines Pumpspeicherkraftwerkes.

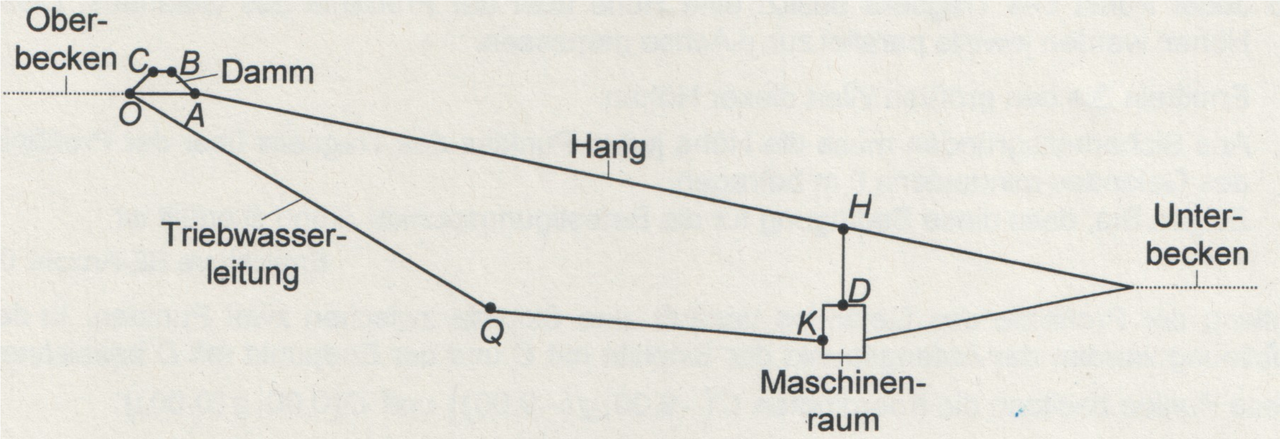


Abbildung (nicht maßstäblich)

Das Oberbecken ist mit dem unterirdischen Maschinenraum durch zwei baugleiche parallel zueinander verlaufende Triebwasserleitungen verbunden. In der Abbildung ist nur eine der beiden Leitungen von O über Q zu K sichtbar.

Das Oberbecken wird auf einer Länge von 500 Metern von einem geradlinig verlaufenden Damm begrenzt. Der Damm kann als gerades Prisma betrachtet werden. Die Grundfläche OABC dieses Prismas ist ein gleichschenkliges Trapez mit einer Höhe von 26 Metern. Die Längen der beiden parallelen Seiten dieses Trapezes betragen 80 Meter bzw. 24 Meter.

Ein kartesisches Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) wird so festgelegt, dass der Punkt O im Koordinatenursprung liegt.

Die Grundfläche OABC des Prismas liegt in der y-z-Koordinatenebene. Der Punkt A liegt auf dem positiven Teil der y-Achse.

2.1. Geben Sie die Koordinaten des Punktes A im festgelegten Koordinatensystem an.
Ermitteln Sie die Größe des Winkels AOC.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

Eine der beiden Triebwasserleitungen beginnt im Punkt O und verläuft geradlinig in Richtung des Vektors $\vec{v}=\begin{pmatrix}25\\221\\-128\end{pmatrix}$ bis zum Punkt Q. Vom Punkt Q aus verläuft diese Triebwasserleitung geradlinig in Richtung des Vektors $\vec{w}=\begin{pmatrix}45\\398\\-34\end{pmatrix}$ und trifft im Punkt K auf den Maschinenraum.

Der Punkt K besitzt die Koordinaten $K(95|840|-290)$.

2.2. Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den die beiden Abschnitte $\overline{OQ}$ und $\overline{QK}$ dieser Triebwasserleitung einschließen.

Bestimmen Sie die Gesamtlänge der Triebwasserleitung von O über Q bis K.

Erreichbare BE-Anzahl: 05

2.3. Für die beiden parallel verlaufenden Triebwasserleitungen wurde jeweils eine 915 m lange Bohrung mit 7m Durchmesser in den felsigen Untergrund getrieben. Der Felsausbruch für den Maschinenraum betrug ca. $160\,000\,m^3$. Der Felsausbruch für die beiden Triebwasserleitungen und der Felsausbruch für den Maschinenraum wurden vollständig zum Bau des Damms verwendet.

Berechnen Sie den prozentualen Anteil des gesamten Felsausbruchs am Volumen des Damms.

Erreichbare BE-Anzahl: 05

2.4. Zum Anschluss an das Stromnetz existiert ein parallel zur z-Achse verlaufender Schacht $\overline{DH}$ in den Maschinenraum. Der Punkt D besitzt die Koordinaten $D(40|865|-245)$. Im Punkt H erreicht der Schacht den Hang zwischen Ober- und Unterbecken. Dieser Hang liegt in der Ebene Emit E: $y+5\cdot z=80$.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes H.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

Pumpspeicherkraftwerke können im Energieverbundnetz sowohl erhöhten Stromverbrauch als auch erhöhte Stromerzeugung ausgleichen.

2.5. An durchschnittlich 8 von 30 Tagen wird ein Pumpspeicherkraftwerk zum Ausgleich von erhöhtem Stromverbrauch zugeschaltet.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der dieses Pumpspeicherkraftwerk innerhalb von 30 Tagen an höchstens 8 Tagen aus diesem Grund zugeschaltet werden muss.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

2.6. An durchschnittlich 5 von 30 Tagen muss ein Pumpspeicherkraftwerk erhöhte Stromerzeugung ausgleichen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,04 ist die Stromerzeugung an zwei aufeinanderfolgenden Tagen erhöht.

Zeigen Sie, dass die erhöhte Stromerzeugung an einem Tag von der des Vortages stochastisch abhängig ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

Lösungsvorschläge

Teil A

1. Je eine BE für das richtige Feld: Feld 2, Feld 5, Feld 4, Feld 2, Feld 3
2.

2.1. Nullstellen bei 0 und 2

==> $\int_0^2 (3x^2-6x)\,dx=\left[x^3-3x^2\right]_0^2=8-12=-4$ also 4FE

2.2. $f'(x)=6x-6$
$0=6x-6$
$x_E=1$ $\quad f(1)=-3$ Extrempunkt bei $E(1|-3)$

3. Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

==> Lotgeradengleichung durch A $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

einsetzen in die Ebenengleichung $2(2+2s)-(1-s)-(-3-s)=0$
$s=-1$

nun s=-2 in die Geradengleichung einsetzen ==> $B(-2|3|-1)$

4. $\frac{9}{20}\cdot 2+\frac{5}{20}\cdot 1+\frac{6}{20}\cdot 0{,}5=1{,}3$

Teil B1

1. Lift

1.1. $A(-9|y_A)$ einsetzen in die Funktion ergibt $y_A \approx 8{,}85$

$B(5{,}8|y_B)$ einsetzen in die Funktion ergibt $y_B \approx 8{,}75$ also 10m tiefer

Minimum mit dem Taschenrechner ermitteln $P_{Min}(-1{,}19|8{,}35)$ also 835m

1.2. $l=\int_{-9}^{5{,}8} \sqrt{1+(s'(x))^2}\,dx \approx 1483{,}68\,m$

$t=\frac{s}{v}=197{,}8\,s$

1.3. $d=s(x)-g(x)$ mit dem GTR das Maximum ermitteln

==> (0,408/1,06) also 106 m

$d_A=s(-9)-g(-9)=0{,}116$ also 11,6m

$d_B=s(5{,}8)-g(5{,}8)=0{,}105$ also 10,5m

1.4. Das Maximum der Anstiege muss ermittelt werden, das ist der Wendepunkt.

GTR g(x) zeichnen lassen und Wendepunkt ermitteln $x_W \approx -6{,}926$

Der Anstieg bei x_W ist $g'(x_W) \approx -0{,}216$ das sind ungefähr 22% Gefälle, also eine blaue Piste

1.5. zu untersuchen ist, ob die Gerade durch D und A mit der Funktion g einen Schnittpunkt im Intervall [-9/0) hat.

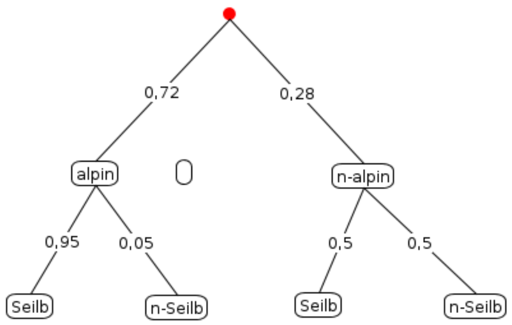
$m_{DA}=-0{,}172$ ==> $y=-0{,}172\,x+7{,}3$

Schnittpunkt mit der Funktion g mit dem Taschenrechner ermitteln

==> kein Schnittpunkt im Intervall

(eigentlich bei Untersuche nicht korrekt, aber bei einer Funktion dritten Grades erscheint mir ein Weg ohne Taschenrechner für einen GK nicht lösbar zu sein)

1.6.



$P(alpin+Seilb)=0{,}72\cdot 0{,}95=0{,}684$
$P(Seilb)=P(alpin+Seilb)+P(n-alpin+Seilb)=0{,}72\cdot 0{,}95+0{,}28\cdot 0{,}05=0{,}824$
$E(Seilb)=0{,}824\cdot 1000=824$

1.7. binomialverteilt

$P(X>3)=binomialCDf(4{,}30{,}30{,}0.1)\approx 0{,}3526$

oder $1-P(X\leq 3)=1-binomilaCDf(3{,}30{,}0.1)$

mindestens erworben:

$1-P(X=0)\geq 0{,}98$
$P(X=0)\leq 0{,}02$
$0{,}9^n\leq 0{,}02$
$n\geq 37{,}13$

also mindestens 38 Tickets

Teil B2

2.

2.1. $A(0|80|0)$ $C(0|28|26)$

Taschenrechner $angle\left(\begin{pmatrix}0\\80\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\28\\26\end{pmatrix}\right)\approx 42{,}88°$

2.2. $angle\left(\begin{pmatrix}25\\221\\-128\end{pmatrix},\begin{pmatrix}45\\398\\-35\end{pmatrix}\right)\approx 25{,}07°$ also 180°-25,07°=154,03°

Für die Länge benötigt man die Koordinaten von Q ==> Schnitt der beiden Geraden

$\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}25\\221\\-128\end{pmatrix}$ und $\vec{x}=\begin{pmatrix}95\\840\\-290\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}45\\398\\-34\end{pmatrix}$

mit dem Taschenrechner ergibt $Q(50|442|-256)$

nun $|\overline{OQ}|+|\overline{QK}|=513{,}225+401{,}376\approx 915$

2.3. $V_{Damm} = A_{Trapez} \cdot 500 = \frac{80+24}{2} \cdot 26 \cdot 500 = 676000$

$V_{Bohrung} = \Pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 915 \approx 35213{,}33$

$V_{Fels} = 2 \cdot 35213{,}33 + 160000 = 230426{,}66$ das sind 34,1% vom Damm

2.4. Geradengleichung der Gerade durch D und H

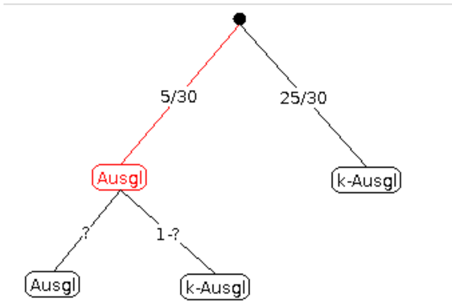
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 865 \\ -245 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (da parallel zur z-Achse)

Schnittpunkt mit der Ebene $\begin{gathered} 865 + 5(-245 + s) = 80 \\ s = 88 \end{gathered}$

einsetzen von s=88 in die Geradengleichung ergibt H(40/865/-157)

2.5. binomialverteilt

$P(X \le 8) = binomialCdf\left(8{,}30{,}\frac{8}{30}\right) \approx 0{,}5937$



2.6. Für den Grundkurs kann man stochastisch abhängig am Baumdiagramm verwenden. Die Wahrscheinlichkeit beim zweiten Tag darf nicht mehr $\frac{5}{30}$ sein, wenn der Vortag einen Ausgleich erforderte.

$\begin{gathered} 0{,}04 = P(Ausgl + Ausgl) = \frac{5}{30} \cdot ? \\ ? = 0{,}04 \cdot 6 = 0{,}24 \end{gathered}$ da 0,24 höher als $\frac{5}{30} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$ ist, kann man von Abhängigkeit sprechen