Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskurs – Mathematik - Nachtermin

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2014 (Nachtermin).

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier ClassPad330) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: L. Wendrock (wendrock@googlemail.com) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 11.07.17.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Hinweise für den Teilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 30 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 240 Minuten. Es sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	115	109	103	97	91	85	79	73	67	61	55	49	41	33	25	0

Prüfungsinhalt

Aufgabe A

Tragen Sie die Antworten zur Aufgabe 1 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 2 bis 5 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

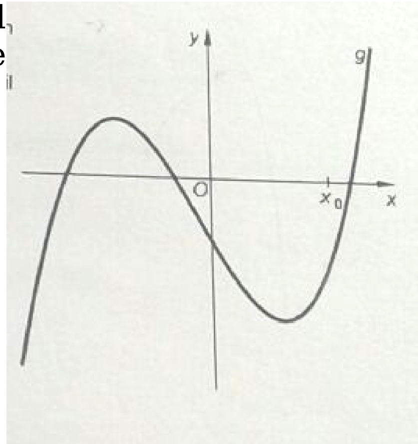
1.1 Welchen Anstieg m hat die Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x-2}$ $(x\in D_f)$ im Punkt $P(1/-1)$?

▢	▢	▢	▢	▢
$m=-1$	$m=-\frac{1}{3}$	$m=-\frac{1}{9}$	$m=0$	$m=1$

1.2 Der Graph einer Funktion schließt mit der Abszissenachsen eine Fläche vollständig ein. Welches der folgenden Integrale gibt den Inhalt einer derartigen Fläche an?

▢	▢	▢	▢	▢
$\int_{-2}^{2}(x+1)\,dx$	$\int_{-2}^{2}(\sin x)\,dx$	$\int_{-2}^{2}(e^x)\,dx$	$\int_{-2}^{2}(-x^2+4)\,dx$	$\int_{-2}^{2}(x^4-1)\,dx$

1.3 Die Funktion g ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades. Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Teil des Graphen dieser Funktion g. Welche Aussage gilt an der Stelle x_0 ?



- ▢ $g'(x_0)<0$ und $g''(x_0)<0$
- ▢ $g'(x_0)<0$ und $g''(x_0)>0$
- ▢ $g'(x_0)>0$ und $g''(x_0)<0$
- ▢ $g'(x_0)>0$ und $g''(x_0)>0$
- ▢ $g'(x_0)<0$ und $g''(x_0)=0$

1.4 Die Geraden g und h mit

g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} \quad (t\in\mathbb{R})$ und h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \quad (s\in\mathbb{R})$

- ▢ verlaufen parallel zueinander.
- ▢ sind identisch.
- ▢ verlaufen windschief.
- ▢ schneiden einander.
- ▢ verlaufen durch den Koordinatenursprung.

1.5 Eine Zeitschrift versendet eine große Anzahl von Briefen mit einer Meinungsumfrage, die mit einer Wahrscheinlichkeit p beantwortet werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass spätestens der fünfte Empfänger eines solchen Briefes antwortet, ist größer als 90%.

Der Ansatz zur Berechnung, wie groß p mindestens ist, heißt:

▢	▢	▢	▢	▢
$1-p^5<0{,}1$	$(1-p)^5<0{,}1$	$1-p^5>0{,}9$	$(1-p)^5>0{,}9$	$p^5>0{,}9$

Für Aufgabe 1 erreichbare BE-Anzahl: 10

2 Für jeden reellen Wert a ist eine Funktion f_a gegeben mit $f_a(x)=x^2-2ax+9 \quad (x \in \mathbb{R})$.

2.1 Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

2.2 Begründen Sie, dass jeder Graph der Funktion f_a einen lokalen Minimumpunkt besitzt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ortskurve der lokalen Minimumpunkte aller Graphen der Funktion f_a .

Erreichbare BE-Anzahl: 04

3 Für das Sommerfest eines Kindergartens bestellen die Organisatoren für jedes Kind ein mit einem Aufdruck versehenes T-Shirt.
Von der gelieferten Menge sind 80% erste Wahl, der Rest ist zweite Wahl. 60% aller T-Shirts erster Wahl sind mit einem IGEL-Aufdruck versehen. 40% der T-Shirts zweiter Wahl besitzen ebenfalls einen IGEL-Aufdruck.

3.1 Ermitteln Sie, wie viele T-Shirts mit einem IGEL-Aufdruck unter 100 gelieferten T-Shirts zu erwarten sind. Erreichbare BE-Anzahl: 03

3.2 Der gelieferten Menge T-Shirts wird zufällig ein T-Shirt entnommen. Dieses T- Shirt besitzt einen IGEL-Aufdruck.
Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieses T-Shirt zweiter Wahl ist. Erreichbare BE-Anzahl: 03

4 Gegeben sind eine Gerade g mit $g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ und der Punkt $A(1|-1|4)$.

4.1 Zeigen Sie, dass der Punkt A nicht auf der Geraden g liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

4.2 Ermitteln Sie den Abstand des Punktes A von der Geraden g.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

Aufgabe B 1

Ein geradlinig verlaufender Kanal dient dem Schiffsverkehr.

Jede Ebene, welche den Kanal senkrecht zu seinem Verlauf schneidet, erzeugt die gleiche Profillinie des Kanals. Diese Profillinie des Kanals wird in einem kartesischen Koordinatensystern (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) näherungsweise durch den Graphen der Funktion f mit $f(x)=-\left(\frac{1}{300}\cdot x^2-3\right)^2$ $(x\in\mathbb{R}, -u\le x\le u, u\in\mathbb{R}, u>0)$ dargestellt (siehe Abbildung).

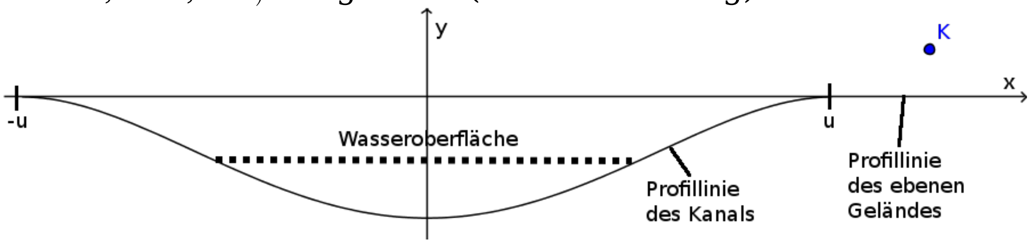


Abbildung (nicht maßstäblich)

In den Punkten $P(-u|0{,}00)$ und $Q(u|0{,}00)$ geht die Profillinie des Kanals jeweils in die Profillinie des ebenen Geländes über. Die Profillinien des ebenen Geländes befinden sich auf der Abszissenachse. Im Punkt K befindet, sich eine Kamera.

Die jeweilige Wassertiefe im Kanal wird entlang der Ordinatenachse zwischen der jeweiligen Wasseroberfläche und dem tiefsten Punkt der Profillinie des Kanals gemessen.

1.1. Ermitteln Sie die größtmögliche Wassertiefe im Kanal.

Bestimmen Sie die maximale Breite des Kanals.

Begründen Sie, dass die Profillinie des Kanals an der Stelle x=u tangential in die Profillinie des ebenen Geländes übergeht.

Ermitteln Sie das größte Gefälle der Profillinie des Kanals in Prozent.

Erreichbare BE-Anzahl: 12

1.2. Die Kamera K erfasst die Wasseroberfläche innerhalb der Schnittebene. Die Abmessungen der Kamera sind zu vernachlässigen.

Im gegebenen Koordinatensystem besitzt die Kamera die Koordinaten $K(40{,}00|3{,}50)$ (siehe Abbildung).

An einem bestimmten Tag kann die Kamera gerade noch die komplette Wasseroberfläche erfassen.

Ermitteln Sie für diesen Fall die Wassertiefe des Kanals.

Erreichbare BE-Anzahl: 10

1.3. Ein Schiff durchfährt den Kanal. Am Punkt S des Rumpfes dieses Schiffes befindet sich eine Sonde, die den jeweils geringsten Abstand zur Profillinie des Kanals misst. Zu einem bestimmten Zeitpunkt zeigt die Sonde den geringsten Abstand zur Profillinie des Kanals mit 4,00 m an. Dieser Abstand wurde zum Punkt $R(11{,}00|f(11{,}00))$ gemessen.

Berechnen Sie für diesen Zeitpunkt die Koordinaten des Punktes S.

Erreichbare BE-Anzahl: 08

1.4. Damit die Schiffbarkeit des Kanals verbessert werden kann, soll die größtmögliche Wassertiefe im Kanal auf 16,00m erhöht werden. Nach Trockenlegung des Kanals erfolgt das Ausbaggern auf die geforderte Tiefe.

Die dabei entstehende neue Profillinie des Kanals soll auf dem Graphen der Funktion $g_{a,b}$ mit $g_{a,b}(x)=-\left(\frac{1}{a}\cdot x^2-b\right)^2$ $(x\in\mathbb{R}, -u\leq x\leq u; u\in\mathbb{R}, u>0; a,b\in\mathbb{R}, a>0, b>0)$ liegen.

Die neue Profillinie des Kanals geht ebenfalls in den Punkten P und Q in die Profillinie des ebenen Geländes über.

Bestimmen Sie das Volumen des auf einer Kanallänge von 1500 m auszubaggernden Erdreichs in Kubikmeter.

Erreichbare BE-Anzahl: 11

1.5. Auf der der Kamera gegenüberliegenden Uferseite soll eine Hecke aus Sträuchern angelegt werden.

Der Lieferant der Sträucher behauptet, dass aufgrund einer Neuzüchtung 95% statt bisher 85 % der Sträucher anwachsen.

Diese Behauptung soll in einem Testverfahren überprüft werden. Dafür wird ein Testfeld mit 50 Sträuchern angelegt und geprüft, wie viele Sträucher anwachsen. Die Nullhypothese „95 % der Sträucher wachsen an." wird gegen die Alternativhypothese „85 % der Sträucher wachsen an." getestet.

Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich der Nullhypothese bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 %.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art für diesen Ablehnungsbereich.

Erreichbare BE-Anzahl: 09

Aufgabe B 2

Ein prismenförmiger Theatersaal OAB_KC_KDEFG Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) dargestellt (siehe Abbildung).

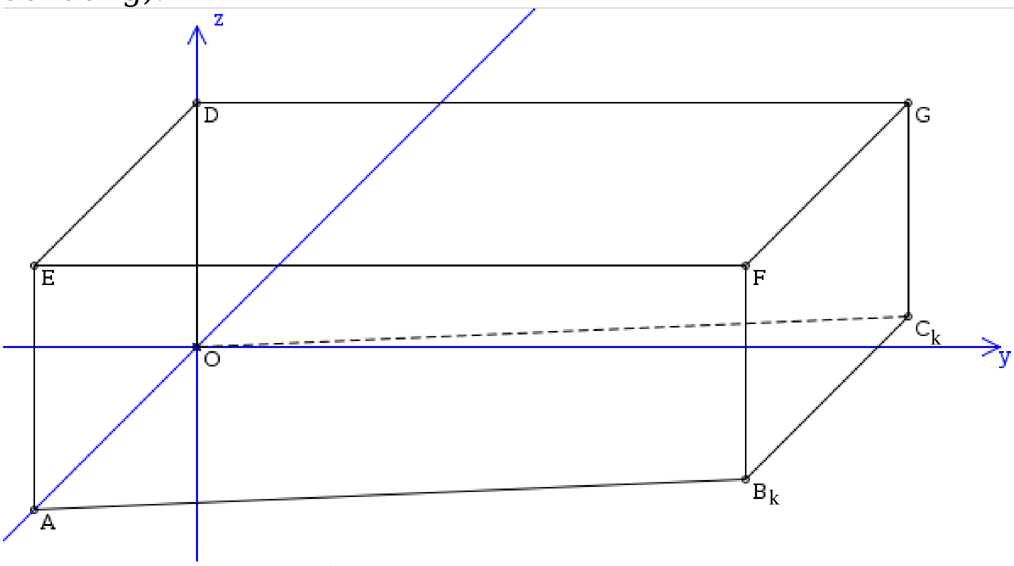


Abbildung (nicht maßstäblich)

Die x-y-Koordinatenebene verläuft horizontal. Die Neigung der Bodenfläche OAB_KC_K gegen die Horizontale lässt sich verändern.

Das Rechteck ODEA ist die 12,0 m hohe Bühnenöffnung.

Es gilt: $A(16{,}0|0{,}0|0{,}0)$, $B_K(16{,}0|35{,}0|1{,}5+k)$ und $C_K(0{,}0|35{,}0|1{,}5+k)$ $(k \in \mathbb{R}; 0{,}0 \leq k \leq 2{,}0)$ sowie $F(16{,}0|35{,}0|12{,}0)$ und $G(0{,}0|35{,}0|12{,}0)$

2.1. Geben Sie eine Gleichung der Ebene in Abhängigkeit von k an, in der die Bodenfläche OAB_KC_K liegt. Erreichbare BE-Anzahl: 03

2.2. Bestimmen Sie den maximal möglichen Neigungswinkel der Bodenfläche OAB_KC_K gegen die Horizontale. Erreichbare BE-Anzahl: 04

2.3. Ermitteln Sie das Volumen des Theatersaals in Abhängigkeit von k.

Erreichbare BE-Anzahl: 06

2.4. Hinter der Bühnenöffnung liegt parallel zur Horizontalen der rechteckige Bühnenboden. Eine Kante des Bühnenbodens liegt auf der Strecke $\overline{HK}$ mit $H(16{,}0|0{,}0|1{,}0)$ und $K(0{,}0|0{,}0|1{,}0)$. Der Bühnenboden wird durch die Bühnenrückwand begrenzt, welche in der Ebene mit der Gleichung $y=c$ $(c \in \mathbb{R}, c<0)$ liegt.

Im Punkt $S(8{,}0|14{,}4|12{,}0)$ befindet sich ein Scheinwerfer. Ein Lichtstrahl, der vom Punkt S ausgeht, ist auf den Mittelpunkt M der Bühnenöffnung gerichtet.

Beschreiben Sie einen mathematischen Lösungsweg, um in Abhängigkeit vom Wert von c zu prüfen, ob dieser Lichtstrahl den Bühnenboden trifft.

Erreichbare BE-Anzahl: 06

Für ein Theaterstück werden zur Unterstützung der Dramaturgie im Theatersaal dreieckige halbdurchsichtige Stoffbahnen so gespannt, dass die Stoffbahnen jeweils in einer Ebene liegen.

2.5. Stoffbahn 1 hat die Befestigungspunkte A, D und $P(16{,}0|25{,}0|12.0)$.

Stoffbahn 2 wird zwischen den Punkten D, P und $Q(16{,}0|27{,}0|3{,}0)$ gespannt.

Die Ebenen, in denen die Stoffbahnen 1 und 2 liegen, schließen einen Winkel ein. Ermitteln Sie diesen Winkel.

Der Bühnenbildner wünscht sich, dass die Stoffbahnen einen Winkel von 90° einschließen. Um dies zu erreichen, soll die Stoffbahn 1 nicht im Punkt A sondern in einem Punkt auf der Kante $\overline{AE}$ befestigt werden. Alle anderen Befestigungspunkte bleiben unverändert.

Berechnen Sie die Koordinaten des neuen Befestigungspunktes.

Erreichbare BE-Anzahl 11

2.6. Der Stoff für die Dekoration wird ballenweise gekauft. Bei 12% aller Stoffballen treten Farbabweichungen auf. Das Theater kauft 26 dieser Stoffballen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei mindestens 22 der gekauften Stoffballen keine Farbabweichungen auftreten.

Erreichbare BE-Anzahl 04

2.7. Der Hersteller der Stoffe gibt an, dass die Stoffstärke normalverteilt ist mit dem Erwartungswert $\mu=1{,}2\,mm$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Stoffstärke unter 1 mm liegt, beträgt 6,2 %.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Stoffstärke im Intervall von 1,1 mm bis 1,3 mm befindet.

Erreichbare BE-Anzahl 06

Lösungsvorschläge

Teil A

1 pro richtig gesetztes Kreuz 2BE: Feld 1, Feld 4, Feld 4, Feld 4, Feld 2

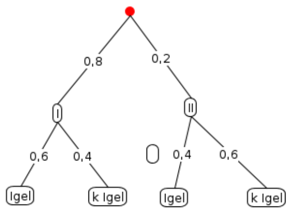
2.1 Wenn a=3 oder a=-3, dann existiert genau eine Nullstelle (komplette binomische Formel).

Wenn a zwischen -3 und 3 liegt, dann gibt es keine Nullstelle (Diskriminante kleiner 0)

Sonst existieren zwei Nullstellen.

2.2 $f'(x)=2x-2a$ ==> $\begin{matrix} 0=2x-2a \\ x_E=a \end{matrix}$ und $f''(a)=2$ also größer Null ==> Min

3.1 Die Wahrscheinlichkeit für Igel-Aufdruck berechnet man mit zwei Pfaden: $0{,}8\cdot 0{,}6+0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}56$ also $E(I)=100\cdot 0{,}56=56$



3.2 Nach dem Satz von Bayes gilt

$$P_{Ig}(II)=\frac{P(II)\cdot P_{II}(Ig)}{P(II)\cdot P_{II}(Ig)+P(I)\cdot P_I(Ig)}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}4}{0{,}2\cdot 0{,}4+0{,}8\cdot 0{,}6}=\frac{1}{7}$$

4.

4.1 Die Punktprobe $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ergibt in der letzten Zeile t=-4 und in der zweiten t=-2/3

4.2 Die Ebene senkrecht zu g durch A hat die Gleichung $3y-z=-7$ (Richtungsvektor als Normalenvektor verwenden)

Einsetzen der Geraden ergibt $\begin{matrix} 3(1+3t)+t=-7 \\ t=-1 \end{matrix}$

Dieses t=-1 in die Geradengleichung einsetzen ergibt den Punkt F(1/-2/1)

Der Abstand des Punktes F zu A ist der gesuchte Abstand $\sqrt{0^2+1^2+3^2}=\sqrt{10}$

Teil B1

1.1 Ermitteln läßt den graphischen Teil des Taschenrechners zu

=> Minimum bei $Min(0|-9)$ also 9m Wassertiefe

Bestimmen läßt den graphischen Teil des Taschenrechners zu

=> NST bei $x_1=-30$ $x_2=30$ also 60m Breite

tangential bedeutet hier $f'(x)=0$ also $f'(x)=-2\left(\frac{1}{300}x^2-3\right)\cdot\left(\frac{2}{300}x\right)$

einsetzen ergibt $f'(-30)=0$ und $f'(30)=0$

Das größte Gefälle kann nur am Wendepunkt sein. Ermitteln läßt den Taschenrechner zu => $W(17{,}32|-4)$ mit dem Anstieg m=0,462 also 46,2%

1.2 Es ist eine Tangente an den Graphen von f vom Punkt K aus gesucht.

Der Berührungspunkt sei $P(x_t|y_t)$

Es muss gelten $m_t=f'(x_t)$ und $m_t=\frac{y_t-3{,}5}{x_t-40}$ ==> Gleichungssystem lösen

von $x_1\approx-30{,}60$ $x_2\approx9{,}93$ $x_3\approx25{,}37$ $x_4\approx48{,}64$ ist nur x_3 eine sinnvolle Lösung

$f(25{,}37)=-0{,}73$ => $9-0{,}73=8{,}27$ als Wassertiefe

1.3 Man ermittelt die Normale im gegebene Punkt mit dem Taschenrechner (graphisch): $y_N=-2{,}63x+22{,}14$

Mit der Abstandgleichung
$4=\sqrt{(x_S-11)^2+(y_S-f(11))^2}=\sqrt{(x_S-11)^2+((-2{,}63x_S+22{,}14)-f(11))^2}$ ergibt sich
$x_S\approx9{,}58$ und daraus $y_S\approx-3$ also $S(9{,}58|-3)$

1.4 zunächst braucht man die Gleichung von $g_{a,b}$

$-16=-\left(\frac{1}{a}\cdot0^2-b\right)^2$ ergibt b=4 ==> $0=-\left(\frac{1}{a}\cdot30^2-4\right)^2$ ergibt a=225

Die Fläche zwischen den beiden Graphen ergibt sich aus
$\int_{-30}^{30} f(x)-g(x)dx=224$

Da der Kanal 1500m lang ausgebaggert werden soll, ist das Volumen:

$224\cdot1500=336000$ (in m^3)

1.5 $H_0=0{,}95$ $H_1=0{,}85$

Die Nullhypothese wird abgelehnt obwohl sie stimmt.
$0{,}05=binomialcdf(k{,}50{,}0.95)$ ergibt durch probieren k=44. Abgelehnt wird also von 0 bis 44.

Der Fehler 2.Art (H_0 wird angenommen, obwohl H_1 gilt)
$1-binomialcdf(44{,}50{,}0.95)\approx0{,}219$

Teil B2

2.

2.1 $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}16\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\35\\1{,}5+k\end{pmatrix}$

2.2 Hier muss k=2 gesetzt werden. Dann mit dem Taschenrechner

$angle\left(\begin{pmatrix}0\\35\\3{,}5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\approx 5{,}71°$

2.3 Das Prisma mit der Grundseite ABFE wird wie folgt berechnet:

$V=A_G\cdot h=(A_{Rechteck}-A_{Dreieck})\cdot h$

$V=\left(12\cdot 35-\frac{(1{,}5+k)\cdot 35}{2}\right)\cdot 16$

2.4 Es ist nur eine Beschreibung notwendig. Hier gibt es einige Ansätze. Zum Beispiel:

- Mittelpunkt M berechnen
- Geradengleichung durch M und S
- Schnittpunkt von Gerade und Ebene y=c ermitteln
- x muss zwischen 0 und 16 sein, y muss zwischen 0 und c sein, z muss 1 sein

2.5 Die Ebenen in eine allgemeine Form bringen (Programm econv)

Bahn 1 $8{,}962=-0{,}561x+0{,}358y-0{,}747z$

Bahn 2 $-1{,}427=-0{,}836x+0{,}535y+0{,}119z$

$angle\left(\begin{pmatrix}-0{,}561\\0{,}358\\-0{,}747\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-0{,}836\\0{,}535\\0{,}119\end{pmatrix}\right)\approx 55{,}14°$

Der Normalenvektor der Bahn2 bleibt.

Der Normalenvektor der Bahn1 wird zu $\begin{pmatrix}300-25\text{t}\\-192+16\text{t}\\400\end{pmatrix}$

Über das Skalarprodukt $0=\left\langle\begin{pmatrix}300-25t\\-192+16t\\400\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}-0{,}836\\0{,}535\\-0{,}119\end{pmatrix}\right\rangle$

erhält man t=10,39 also $A_{neu}(16|0|10{,}39)$

2.6 Binomialverteilung $P(X\geq 22)=1-P(21<X)=1-binomialcdf(21{,}26{,}0.88)\approx 0{,}8051$

2.7 Man benötigt σ .

Über $solve\,normCDF(-\infty,1,x,1.2)=0.062$ erhält man $\sigma\approx 0{,}1300$

Dann kann man $normCDF(1.1{,}1.3{,}0.13{,}1.2)\approx 0{,}5582$ berechnen