Schriftliche Abiturprüfung – Grundkurs – Mathematik Nachtermin

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2013 (Nachtermin).

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier ClassPad330) eingesetzt.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: L. Wendrock (wendrock@googlemail.com) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 24.07.17.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Hinweise für den Teilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 30 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten. Es sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	58	55	52	49	46	43	40	37	34	31	28	25	21	17	13	0

Prüfungsinhalt

Aufgabe A

Tragen Sie die Antworten zur Aufgabe 1 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 2 bis 4 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Der Graph einer Funktion f besitzt an der Stelle x = 2 den Anstieg 2.

Eine mögliche Gleichung von f lautet

☐ $f(x)=2$ ☐ $f(x)=x$ ☐ $f(x)=x^2-2$ ☐ $f(x)=\frac{1}{6}\cdot x^3$ ☐ $f(x)=e^x$

1.2 Für welche Funktion f ist die Funktion F mit $F(x)=\frac{1}{x}-7$ ($x\in\mathbb{R}, x\neq 0$) eine Stammfunktion?

☐ $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ ($x\in\mathbb{R}, x\neq 0$)

☐ $f(x)=\ln|x|$ ($x\in\mathbb{R}, x\neq 0$)

☐ $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ($x\in\mathbb{R}, x\neq 0$)

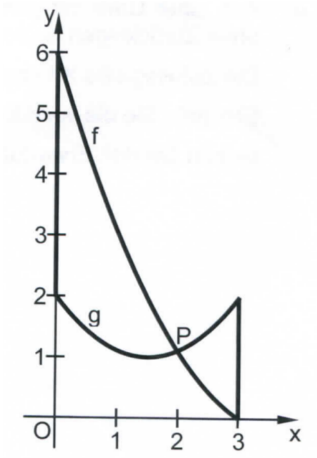
☐ $f(x)=-\frac{1}{x^2}-7\cdot x$ ($x\in\mathbb{R}, x\neq 0$)

☐ $f(x)=\ln|x|-7\cdot x$ ($x\in\mathbb{R}, x\neq 0$)

1.3 In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Verlauf der Graphen der Funktionen f und g im Intervall $0 \leq x \leq 3$ dargestellt. Die Graphen der Funktionen f und g schneiden sich im Punkt $P(2|f(2))$.

Die Graphen der Funktionen f und g sowie die Geraden x = 0 und x = 3 schließen im Intervall $0 \leq x \leq 3$ eine aus zwei Teilflächen zusammengesetzte Fläche vollständig ein (siehe Abbildung).

Mit welchem Term kann der Inhalt der gesamten eingeschlossenen Fläche berechnet werden?



☐ $\int_0^3 (f(x)-g(x))dx$

☐ $\left|\int_0^3 (f(x)-g(x))dx\right|$

☐ $\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 g(x)dx$

☐ $\int_0^2 (f(x)-g(x))dx+\int_2^3 (g(x)-f(x))dx$

☐ $\left|\int_0^2 (f(x)+g(x))dx\right|+\left|\int_2^3 (g(x)+f(x))dx\right|$

1.4 Von genau zehn Schülern sollen genau zwei Schüler je eine Kinokarte erhalten. Die beiden Kinokarten sind durch die Platznummer unterscheidbar. Die Zuordnung erfolgt zufällig.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Zuordnung der beiden Kinokarten auf die Schüler gibt es ?

☐	☐	☐	☐	☐
10	19	20	45	90

1.5 Bei einem Spiel wird eine Münze genau dreimal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von „Wappen" bei einem Wurf dieser Münze beträgt $\frac{1}{2}$.

Folgende Gewinnregel wird vereinbart:

Spieler A gewinnt, wenn mindestens einmal „Wappen" geworfen wurde.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Spieler A bei diesem Spiel beträgt

☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$

Für Aufgabe 1 erreichbare BE-Anzahl: 5

2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=x^3-3\cdot x^2+2\cdot x$ ($x\in\mathbb{R}$).

Der Graph der Funktion f besitzt genau einen Wendepunkt W .

Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt W .

Erreichbare BE-Anzahl: 05

3 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Ermitteln Sie die Koordinaten eines Vektors $\vec{c}$, der senkrecht zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ verläuft.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

4 Aus einer Urne mit genau 9 Kugeln (5 schwarzen und 4 weißen) wird genau zweimal ohne Zurücklegen je eine Kugel zufällig entnommen.

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der dabei gezogenen weißen Kugeln.

Ermitteln Sie die vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.

Geben Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X an.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

Aufgabe B 1

Eine Firma plant den Bau einer Hallen-Radrennbahn.

Die Radrennbahn besteht im Kurvenbereich aus einer geneigten Fahrfläche und einem Auslauf. Der Auslauf verbindet die Fahrfläche und den ebenen Hallenboden.

In einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) mit dem Koordinatenursprung O ist ein Querschnitt der Radrennbahn im Kurvenbereich dargestellt (siehe Abbildung).

Die Querschnittslinie $\overline{BC}$ der Fahrfläche liegt auf der Geraden g mit der Gleichung $y=g(x)=\frac{6}{5}\cdot x+\frac{1}{2}$ ($x\in D_g$).

Der Abstand der Punkte B und C beträgt 7,00 m.

Die Querschnittslinie des Auslaufs vom Punkt A zum Punkt B liegt auf dem Graphen der Funktion f mit $y=f(x)=\frac{3}{5}\cdot e^{2\cdot x}-\frac{1}{10}$ ($x\in D_f$).

Die Querschnittslinie des Hallenbodens und der Punkt A liegen auf der x-Achse, der Punkt B auf der y-Achse.

Für die Berechnungen werden die Materialstärken vernachlässigt.

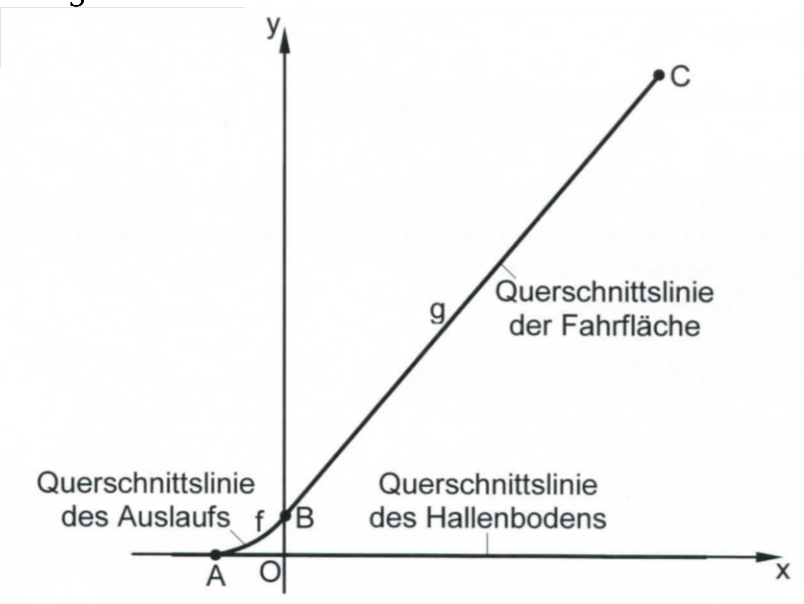


Abbildung (nicht maßstäblich)

1.1. Geben Sie die Koordinaten des Punktes B an.

Geben Sie die Größe des Anstiegswinkels der Geraden g gegenüber der x-Achse an.

Zeigen Sie, dass der Punkt C die Koordinaten $C(4{,}48|5{,}88)$ besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

1.2. Zeigen Sie, dass die Querschnittslinie des Auslaufs im Punkt B tangential (ohne Knick) in die Querschnittslinie der Fahrfläche übergeht.

Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen der Querschnittslinie des Hallenbodens und der Querschnittslinie des Auslaufs im Punkt A.

Erreichbare BE-Anzahl: 05

1.3. Vom Hallenboden aus sollen geradlinige Stützen zur Fahrfläche angebracht werden. Eine dieser Stützen soll im dargestellten Querschnitt vom Punkt D(4,50| 0,00) zu einem Punkt F der Querschnittslinie der Fahrfläche verlaufen.

Bestimmen Sie die x-Koordinate des Punktes F so, dass die Länge dieser Stütze minimal wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

1.4. In einer weiteren Planungsvariante zur Modellierung der Querschnittslinie des Auslaufs wird eine ganzrationale Funktion h mit

$h(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$ ($x\in D_h; a,b,c,d\in\mathbb{R}, a\neq 0$) verwendet.

Die Funktion h soll folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Im Im Punkt $A^*(-1{,}00|0{,}00)$ besitzt der Graph der Funktion h den Anstieg $m_{A^*}=0$.

(2) Im Punkt $B(0{,}00|0{,}50)$ besitzt der Graph der Funktion h den Anstieg $m_B=\frac{6}{5}$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion h.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

Zum Aufbau der Radrennbahn bezieht die Firma sehr viele Nägel bei einem Hersteller.

Bei den ausgelieferten Nägeln aus der Produktion dieses Herstellers treten genau zwei Fehler unabhängig voneinander auf. 2 % der ausgelieferten Nägel haben nicht die vorgeschriebenen Maße und 1 % der ausgelieferten Nägel haben verformte Nagelspitzen

1.5. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig der Lieferung des Herstellers entnommener Nagel genau einen der beiden Fehler besitzt.

Ermitteln Sie, wie viele fehlerfreie Nägel unter 1 000 gelieferten Nägeln des Herstellers zu erwarten sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

1.6. Nach Angabe des Herstellers sind 97 % der gelieferten Nägel fehlerfrei.

Die Firma, die den Bau der Radrennbahn plant, bezweifelt diese Angabe. Sie behauptet, dass nur 90 % der von diesem Hersteller gelieferten Nägel fehlerfrei sind, und fordert einen Preisnachlass.

Die Angabe des Herstellers wird als Nullhypothese gegen die Alternativhypothese der Firma geprüft.

Dazu werden 100 vom Hersteller gelieferte Nägel zufällig ausgewählt und untersucht.

Es wird folgende Entscheidungsregel vereinbart:
Wenn maximal 94 dieser 100 Nägel fehlerfrei sind, wird die Nullhypothese abgelehnt und es wird ein Preisnachlass gewährt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Preisnachlass irrtümlich gewährt wird.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Preisnachlass nicht gewährt wird, obwohl die Alternativhypothese zutrifft.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

Aufgabe B 2

Auf einem Hang steht ein geradliniger Sendemast.

Ein kartesisches Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) wird so festgelegt, dass der Mast in Richtung der z-Achse verläuft und sein Fußpunkt im Koordinatenursprung O liegt (siehe Abbildung 1). Der Durchmesser des Mastes wird vernachlässigt.

Der Hang befindet sich in der Ebene H, die durch die Gleichung H: $x + 20z = 0$ beschrieben werden kann.

Der Mast wird in den Punkten $D(0{,}00|0{,}00|63{,}00)$ und $E(0{,}00|0{,}00|114{,}00)$ von je drei geradlinig verlaufenden Spannseilen gehalten, die paarweise in den Punkten A , B und C des Hanges befestigt sind.

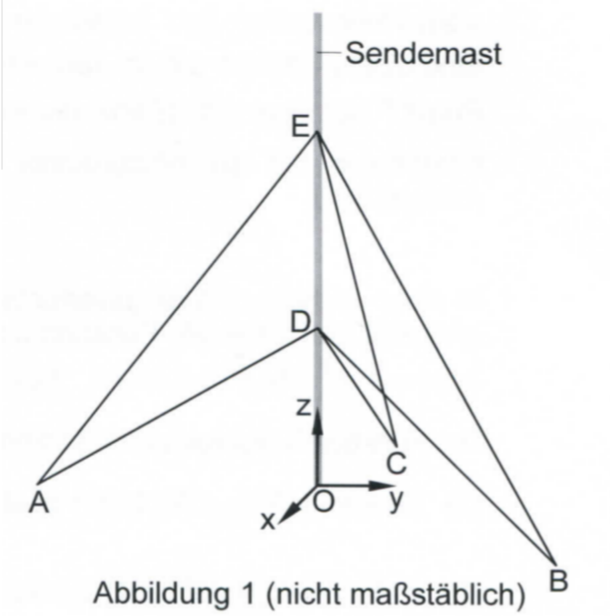


Abbildung 1 (nicht maßstäblich)

Der Befestigungspunkt B besitzt die Koordinaten $B(40{,}00|80{,}00|-2{,}00)$.

2.1. Geben Sie die Längen der beiden vom Punkt B ausgehenden Spannseile an.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

2.2. Das Spannseil vom Punkt E zum Punkt C verläuft in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5{,}00 \\ -10{,}00 \\ 14{,}00 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Befestigungspunktes C.

Der Befestigungspunkt A liegt auf dem negativen Teil der y-Achse. Das Spannseil vom Punkt E zum Punkt A ist 145,00 m lang.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Befestigungspunktes A.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

2.3. Der Befestigungspunkt B liegt in einer landwirtschaftlichen Nutzfläche. Betrachtet wird das Spannseil zwischen den Punkten B und D.

Die Durchfahrtshöhe für Fahrzeuge unter dem Spannseil wird parallel zum Sendemast gemessen und muss aus Sicherheitsgründen mindestens 4,00 m betragen. Deshalb soll in dem 4,00 m unter dem Seil liegenden Geländepunkt F ein Warnschild aufgestellt werden (siehe Abbildung 2).

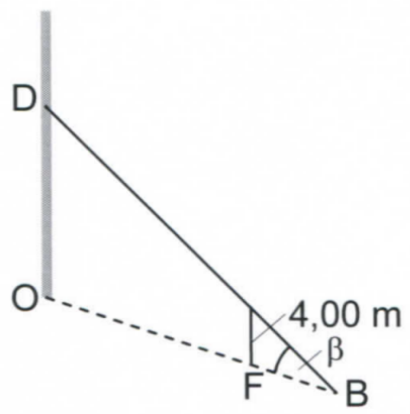


Abbildung 2 (nicht maßstäblich)

Begründen Sie, dass das Dreieck O B D nicht rechtwinklig ist.

Bestimmen Sie die Größe des Winkels β zwischen dem Spannseil und der Strecke $\overline{OB}$.

Ermitteln Sie den Abstand der Punkte B und F.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes F

Erreichbare BE-Anzahl: 08

2.4. Die Stabilität des Sendemastes wird mittels Laserstrahlen überwacht. Dazu befindet sich in einem Punkt des Sendemastes ein Reflektor, der von zwei Laserstrahlen von den Punkten $M_1(100{,}00|10{,}00|-4{,}00)$ und $M_2(10{,}00|100{,}00|0{,}75)$ aus anvisiert wird.

Nach einem schweren Sturm verläuft der Laserstrahl vom Punkt M_1 aus in Richtung des Vektors $\vec{a}=\begin{pmatrix}-100{,}10\\-10{,}20\\154{,}00\end{pmatrix}$ und der Laserstrahl vom Punkt M_2 aus in Richtung des Vektors $\vec{b}=\begin{pmatrix}-10{,}10\\-100{,}20\\149{,}25\end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass bei dieser Messung eine Abweichung des Sendemastes von der Senkrechten feststellbar ist.

Es wird davon ausgegangen, dass der Sendemast nach dem Sturm immer noch geradlinig ist.

Berechnen Sie die Größe des Winkels, um den der Sendemast nach dem Sturm von seiner ursprünglichen Richtung abweicht.

Erreichbare BE-Anzahl: 05

2.5. Sendemasten müssen Stürmen bis zu einer Spitzenwindgeschwindigkeit standhalten. Am Standort des Sendemastes wird die Spitzenwindgeschwindigkeit in einem beliebigen Jahr erfahrungsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{7}$ mindestens einmal überschritten.

Ermitteln Sie den kleinsten Zeitraum (in Jahren), in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens ein Sturm auftritt, bei welchem die Spitzenwindgeschwindigkeit überschritten wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

Lösungsvorschläge

Teil A

1 Felder 4,1,4,5,5

2 $f'(x)=3x^2-6x+2$ $\quad f''(x)=6x-6$ $\qquad 0=6x-6$ $\quad x_w=1$ $\qquad f'(1)=3-6+2=-1=m_T$

die Tangente geht durch $f(1)=1-3+2=0$

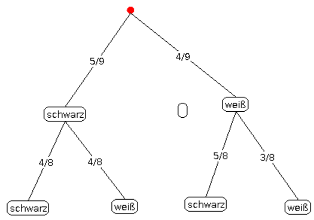
also hat sie die Gleichung $y=-x+1$

3 Kreuzprodukt der gegebenen Vektoren ergibt: $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

4

$X=x_i$	*0*	*1*	*2*
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}$	$\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}$

$E(x)=0\cdot\frac{5}{18}+1\cdot\frac{5}{9}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{8}{9}$



Teil B1

1.1 $B(0|\frac{1}{2})$

$m=\tan\alpha$ $\qquad \frac{6}{5}=\tan\alpha$ $\qquad \alpha\approx 50{,}19°$

C liegt auf der Geraden: $y_B=\frac{6}{5}\cdot 4{,}48+\frac{1}{2}=5{,}876$ also gerundet 5,88

C hat den Abstand 7: $|\overline{BC}|=\sqrt{4{,}48^2+(5{,}88-0{,}5)^2}\approx 7{,}00$

1.2 $f'(x)=\frac{6}{5}\cdot e^{2x}$ ==> $f'(0)=\frac{6}{5}=m_g$ also gleicher Anstieg

$f(0)=\frac{3}{5}-\frac{1}{10}=\frac{1}{2}=g(0)$ also gleicher Punkt

x-Wert des Punktes A: $f(x)=0$ ergibt $x_0\approx -0{,}89588$

$f'(-0.90)\approx 0{,}2=\tan\alpha$ ==> $\alpha\approx 11{,}31°$

1.3 kürzeste Länge, wenn die Stütze senkrecht zur Bahn

$m=\frac{-5}{6}$ Da durch den Punkt D: $0=\frac{-5}{6}\cdot 4{,}5+n$ ==> $n=3{,}75$

die Stütze: $y=s(x)=\frac{-5}{6}x+3{,}75$

Schnittpunkt der Stütze s(x) mit g(x) ==> $x_F\approx 1{,}598$

1.4 $h'(x)=3ax^2+2bx+c$

(I) $f(-1)=0$

(II) $f(0)=0{,}5$

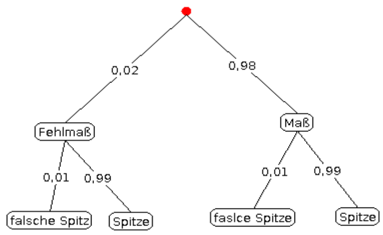
(III) $f'(-1)=0$

(IV) $f'(0)=\frac{6}{5}$

Gleichungssystem lösen ==> $y=0{,}2\,x^3+0{,}9\,x^2+1{,}2\,x+0{,}5$

1.5 $0{,}02\cdot 0{,}99+0{,}98\cdot 0{,}01=0{,}0296$

$0{,}98\cdot 0{,}99\cdot 1000=970{,}2$



1.6 $H_0: p=0{,}97$

$H_1: p=0{,}90$

H_0 gilt, wird aber verworfen:

$B_{100;\,0{,}97}$ $P(X\leq 94)=binomialCDF(95{,}100{,}0.97)\approx 0{,}0808$

H_1 gilt, aber H_0 wird nicht abgelehnt:

$B_{100;\,0{,}90}$ $P(X>94)=1-binomialCDF(94{,}100\,{,}0.90)\approx 0{,}0576$

Teil B2

2.1 $|\overline{BD}|=\sqrt{40^2+80^2+65^2}\approx 110{,}57$

$|\overline{BE}|=\sqrt{40^2+80^2+116^2}\approx 146{,}48$

2.2 Gerade des Seiles: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\114\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}5\\-10\\14\end{pmatrix}$

in die Ebenengleichung x+20z=0 einsetzen: $5s+20(114+14s)=0$

==> s=-8 ==> $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\114\end{pmatrix}+(-8)\begin{pmatrix}5\\-10\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-40\\80\\2\end{pmatrix}$ also C(-40/80/2)

Da A auf dem negativen Teil der y-Achse liegt:

$145=\sqrt{0^2+y^2+114^2}$ ==> y=-89,60

A(0/-89,60/0)

2.3 z.B. Skalarprodukt $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}40\\80\\-2\end{pmatrix}\neq 0$

Winkel β : $angle\left(\begin{pmatrix}-40\\-80\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-40\\-80\\65\end{pmatrix}\right)\approx 34{,}73°$

Winkel bei D: $angle\left(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}40\\80\\-65\end{pmatrix}\right)\approx 53{,}99°$

Sinussatz $\frac{\sin(53{,}99)}{|\overline{BF}|}=\frac{\sin(34{,}73°)}{4}$ ==> $|\overline{BF}|\approx 5{,}68$

Alternativer Lösungsweg von M. Günther mit den Strahlensätzen:

Der zweite Strahlensatz sagt: $\frac{|BF|}{|BO|}=\frac{4}{|OD|}$

==> $|BF|=\frac{4}{63}\cdot\sqrt{8004}\approx 5{,}6803$

Nun die Koordinaten von F

==> Gerade durch BF mit normiertem Richtungsvektor

$\vec{x}=\begin{pmatrix}40\\80\\-2\end{pmatrix}+5{,}68\begin{pmatrix}-40\\-80\\2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{89{,}47}=\begin{pmatrix}37{,}46\\74{,}92\\-1{,}87\end{pmatrix}$ also F(37,46/74,92/-1,87)

2.4 Der Schnittpunkt der beiden Geraden (Programm pge) ist bei $S(-0.1|-0.2|150)$. Stünde er senkrecht, müsste x = y = 0 sein.

$angle\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-0{,}1\\-0{,}2\\150\end{pmatrix}\right)\approx 0{,}0854°$

2.5 $0{,}9=1-\left(\frac{6}{7}\right)^n$ ergibt für $n\approx 14{,}94$ also 15 Jahre