Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskurs – Mathematik - Nachtermin

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2012 (Nachtermin).

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier ClassPad330) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: L. Wendrock (wendrock@googlemail.com) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 24.07.17.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Hinweise für den Teilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 15 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 240 Minuten. Es sind 45 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	58	55	52	49	46	43	40	37	34	31	28	25	21	17	13	0

Prüfungsinhalt

Aufgabe A

Tragen Sie die Antworten zur Aufgabe 1 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 2 bis 5 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\sqrt[3]{x^2} \quad (x \in D_f)$.

Welche Steigung besitzt die Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle $x=k \quad (k \in \mathbb{R}, k>0)$?

☐ $\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{k^2}}$ ☐ $\frac{2\cdot\sqrt[3]{k}}{3}$ ☐ $\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{k}}$ ☐ $\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{k}}$ ☐ $\frac{2}{\sqrt[3]{k}}$

1.2 Das bestimmte Integral $\int_0^e e^{2\cdot x}\,dx$ hat den Wert:

☐ $e^{2\cdot e}$ ☐ $e^{2\cdot e}-1$ ☐ $e^{2\cdot e}-e$ ☐ $\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot e}-\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot e}-\frac{1}{2}\cdot e$

1.3 Der Graph einer Funktion f hat eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x=2$ und eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y=1$.

Eine mögliche Gleichung der Funktion f lautet:

☐ $y=f(x)=\frac{x^3-4\cdot x}{x^3} \quad (x\in D_f)$

☐ $y=f(x)=\frac{2\cdot x^3-4\cdot x}{x^3-4} \quad (x\in D_f)$

☐ $y=f(x)=\frac{x^3-2\cdot x}{x^3-8} \quad (x\in D_f)$

☐ $y=f(x)=\frac{x-2}{x^3-8} \quad (x\in D_f)$

☐ $y=f(x)=\frac{x}{x^3-1} \quad (x\in D_f)$

1.4 Gegeben ist die Ebene E mit E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} \quad (r,s\in\mathbb{R})$.

Die x-Achse durchstößt die Ebene E im Punkt A mit den Koordinaten:

☐	☐	☐	☐	☐
$A(0\mid0\mid0)$	$A(3\mid0\mid0)$	$A(0\mid3\mid0)$	$A(0\mid0\mid3)$	$A(4\mid0\mid0)$

1.5 In einem Quiz gibt es genau acht Fragen mit jeweils genau drei Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine Antwort richtig ist.

Mit welchem Term berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für genau drei richtige Antworten, wenn man die jeweilige richtige Antwort nur erraten kann?

☐ $\binom{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5$

☐ $\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5$

☐ $\binom{8}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5$

☐ $3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5$

☐ $5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5$

Für Aufgabe 1 erreichbare BE-Anzahl: 5

2 Für jeden Wert für k $(k \in \mathbb{R}, k > 0)$ ist die Funktion f_k gegeben mit $f_k(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - k^2 \cdot x + k^3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f_k .
Weisen Sie jeweils die Art der lokalen Extrempunkte nach.
Erreichbare BE-Anzahl: 04

2.2 Die lokalen Minimumpunkte aller Funktionen f_k liegen auf dem Graphen einer Funktion g.
Geben Sie eine Gleichung der Funktion g an.
Erreichbare BE-Anzahl: 01

3 Gegeben sind die Gerade h mit h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$ und die Ebene E mit E: $x + 2 \cdot y - 5 \cdot z = 4$.
Die Gerade h liegt nicht in der Ebene E.
Zeigen Sie, dass die Gerade h parallel zur Ebene verläuft.
Erreichbare BE-Anzahl: 02

4 In einer Schale liegen genau acht Gummibärchen. Genau drei dieser Gummibärchen sind rot. Aus der Schale wird genau zweimal zufällig je ein Gummibärchen ohne Zurücklegen herausgenommen.
Berechnen Sie die zu erwartende Anzahl entnommener roter Gummibärchen.
Erreichbare BE-Anzahl: 03

Aufgabe B 1

Im Rahmen einer Rekultivierungsmaßnahme in einem Tagebau wurde ein Tagebaurestloch als See neu angelegt.

Die gesamte Uferlinie des Sees kann in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 100 Meter) dargestellt werden (siehe Abbildung). Der positive Teil der Abszissenachse zeigt nach Osten, der positive Teil der Ordinatenachse nach Norden.

Die nördliche Uferlinie des Sees kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion n mit $y=n(x)=\sqrt{25-x^2}+15 \quad (x\in D_n)$, die südliche Uferlinie durch den Graphen der Funktion s mit

$$s(x)=\left(\frac{49}{1200}\cdot x^2-\frac{5}{48}\cdot x+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x^2+x-12\right) \quad (x\in D_s)$$

beschrieben werden.

Die Graphen der beiden Funktionen n und s haben genau zwei Punkte gemeinsam. Diese bilden den westlichsten bzw. östlichsten Punkt des Sees.

Die erste Ableitungsfunktion n' der Funktion n kann durch die Gleichung

$$n'(x)=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}} \quad (x\in D_{n'})$$ beschrieben werden.

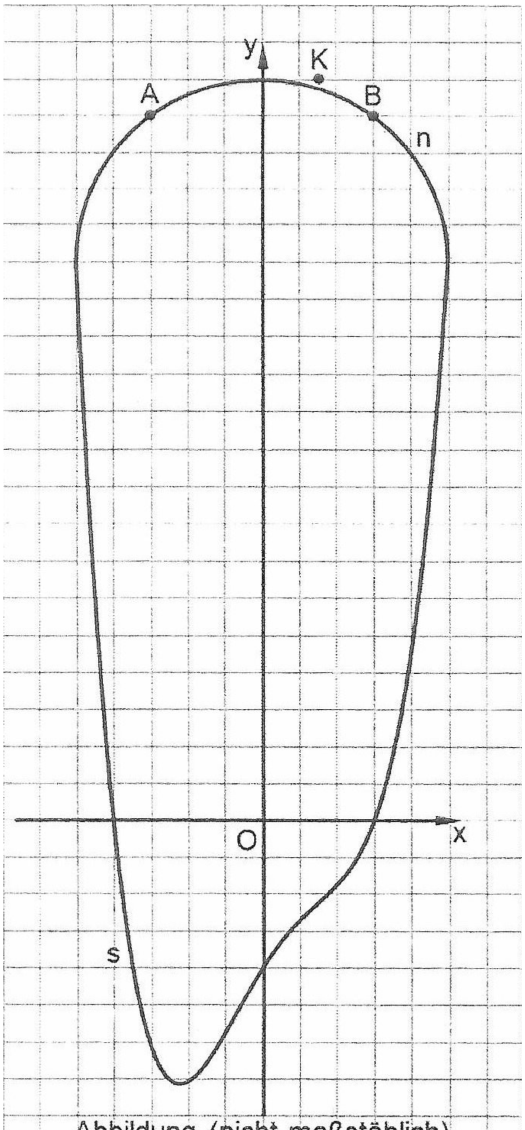


Abbildung (nicht maßstäblich)

1.1. Zeigen Sie, dass der See eine größte West-Ost-Ausdehnung von 1000 m besitzt.

Der Abstand eines beliebigen Punktes auf der nördlichen Uferlinie zur südlichen Uferlinie wird parallel zur Nord-Süd-Richtung gemessen.

Bestimmen Sie den größten dieser Abstände.

Erreichbare BE-Anzahl: 05

1.2. Entlang der nördlichen Uferlinie wird zwischen den Punkten $A(-3|n(-3))$ und $B(3|n(3))$ ein Weg zur Beobachtung der Flora und Fauna angelegt.

Auf 30 % der Länge dieses Weges rechnet man wegen des instabilen Untergrundes mit zusätzlichen Baukosten von 50 Euro pro 1 Meter Weg.

Bestimmen Sie die Höhe der zu erwartenden Mehrkosten.

Erreichbare BE-Anzahl: 05

1.3. Für die Region, in der sich der See befindet, wurde ein langjähriger Mittelwert für die Wasserverdunstung von 700 Liter pro Quadratmeter und Jahr festgestellt.

Ermitteln Sie einen Näherungswert für das Volumen des Wassers, welches jährlich von der Seeoberfläche verdunstet.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

1.4. Die Wasseroberfläche des Sees soll von einem Beobachtungspunkt K mit den Koordinaten $K(1{,}5|20)$ mithilfe einer Kamera in Bodennähe überwacht werden.

Weisen Sie nach, dass ein Öffnungswinkel des Objektivs der Kamera von 135° nicht ausreichend ist, um die gesamte Wasseroberfläche vollständig einzusehen.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

Bei der Rekultivierungsmaßnahme werden genormte Holzpfähle von Firma A und von Firma B verbaut. 70 % aller Holzpfähle stammen von Firma A, 30 % aller Holzpfähle von Firma B.

Ein von der Firma A gelieferter Pfahl ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % von Güteklasse 1; ein von der Firma B gelieferter Pfahl mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % von Güteklasse 1.

1.5. Aus allen gelieferten Pfählen wird zufällig ein Pfahl ausgewählt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Pfahl von Güteklasse 1 ist.

Ein aus allen gelieferten Pfählen zufällig ausgewählter Pfahl ist von Güteklasse 1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Pfahl von Firma A geliefert wurde.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

1.6. Ein Vertreter der Firma B behauptet, dass durch eine Verbesserung der Rohstoffauswahl der Anteil der Güteklasse 1 ihrer Lieferungen auf 95% gestiegen ist.

In einer Stichprobe mit dem Umfang n = 50 wird die Nullhypothese „Der Anteil der Güteklasse 1 von Firma B beträgt 95 %.“ gegen die Alternativhypothese „Der Anteil der Güteklasse 1 von Firma B beträgt 85%.“ getestet.

Ermitteln Sie für den Ablehnungsbereich $\overline{A}$ der Nullhypothese von $\overline{A}=\{0;\ldots;44\}$ die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler 1. und 2. Art.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

Aufgabe B 2

Ein Architekturbüro ist mit der Planung des Gebäudes für das Informationszentrum eines Nationalparks beauftragt. In den Planungsunterlagen wird das Gebäude in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) mit dem Koordinatenursprung O dargestellt (siehe Abbildung).

Das Gebäude besitzt eine quadratische Grundfläche ABCO mit einer Seitenlänge von 8 Meter. Die Grundfläche ABCO liegt in der x-y-Koordinatenebene. Der Punkt C besitzt die Koordinaten $C(0|8|0)$.

Die Seitenwände des Gebäudes liegen jeweils parallel zu einer Koordinatenebene.

Die z-Koordinate eines Punktes gibt dessen Höhe über der Grundfläche ABCO an.

Zur Modellierung der Dachkonstruktion wird die Höhe der Punkte

$D_i(8|0|i)$ $(i \in \mathbb{R}, 0 < i < 5)$ und $H_k(2|6|5+k)$ $(k \in \mathbb{R}, k > 0)$ über der Grundfläche des Gebäudes zunächst nicht festgelegt.

Die Dachkonstruktion wird auf die Kanten $\overline{D_i E}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$ und $\overline{GD_i}$ der Seitenwände aufgesetzt, wobei die Kanten $\overline{EF}$ und $\overline{FG}$ jeweils einen Abstand von 5 Meter zur Grundfläche ABCO haben. Der Punkt E besitzt die Koordinaten $E(8|8|5)$.

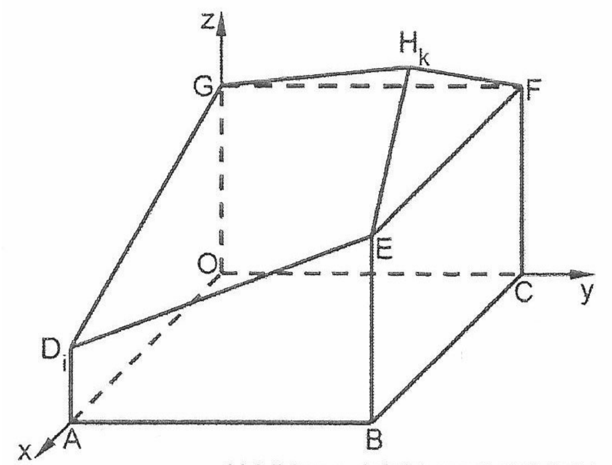


Abbildung (nicht maßstäblich)

2.1. Zeigen Sie, dass die Kante $\overline{EH_k}$ die Länge $\sqrt{k^2+40}$ hat.

Weisen Sie nach, dass die beiden dreieckigen Dachflächen EFH_k und FGH_k für jeden Wert des Parameters k zueinander kongruent sind.

Bestimmen Sie den Wert für k so, dass diese Dachflächen rechtwinklige Dreiecke bilden.

Erreichbare BE-Anzahl: 07

Die Werte für i und k sollen so gewählt werden, dass das Dach aus den drei ebenen Dachflächen $D_i E H_k G$, EFH_k und FGH_k besteht.

2.2. Bestimmen Sie die Gesamthöhe des Gebäudes, wenn der Punkt D_i eine Höhe von 4 m besitzen soll. Erreichbare BE-Anzahl: 03

Der Architekt legt die Gesamthöhe des Gebäudes mit sechs Meter fest. Der Punkt D_i liegt dabei drei Meter über der Grundfläche ABCO.

2.3. Die viereckige Dachfläche soll mit Kunststoffplatten eingedeckt werden. Für eine Eindeckung mit diesem Material ist eine Mindestdachneigung gegen die Horizontale von 15° vorgeschrieben, damit das Dach regensicher sein kann.

Überprüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

2.4. Ein rechteckiges Dachfenster soll in die Dachfläche EFH_1 eingebaut werden.

Dabei soll sich eine Begrenzungslinie des Dachfensters auf der Kante $\overline{EF}$ befinden und die Dachfensterfläche soll vollständig in der Dachfläche EFH_1 liegen.

Ein Hersteller bietet ein Dachfenster mit einer Breite von 2,5m und einer Höhe von 1,5 m an.

Untersuchen Sie, ob das angebotene Dachfenster unter den beschriebenen Bedingungen in die Dachfläche EFH_1 eingebaut werden kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

2.5. Das Architekturbüro stellt das Projekt in einer Informationsveranstaltung vor. Im Rahmen dieser Veranstaltung werden an einem Stand Knoblauchbrote verkauft.

Die Masse eines solchen Knoblauchbrotes ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu=75\text{g}$ und der Standardabweichung $\sigma=5\text{g}$.

Ein Knoblauchbrot gilt als „zu leicht", wenn es eine Masse von weniger als 72 g hat.

Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Besucher der Informationsveranstaltung, der drei Knoblauchbrote kauft, genau zwei „zu leichte" Knoblauchbrote erwirbt.

Erreichbare BE-Anzahl 04

2011/2012 Abitur Sachsen - Leistungskurs Mathematik Nachtermin

Lösungsvorschläge

Teil A

1 pro richtig gesetztes Kreuz 1BE: Feld 4, Feld 4, Feld 3, Feld 2, Feld 1

2.1
$$f'_k(x)=x^2-k^2 \qquad f_k(k)=\frac{1}{3}k^3 \qquad P_1(k|\frac{1}{3}k^3)$$
$$0=x^2-k^2$$
$$x_E=\pm k \qquad f_k(-k)=\frac{5}{3}k^3 \qquad P_2(-k|\frac{5}{3}k^3)$$

$f''(x)=2x$ da k>0 ist P_1 Min und P_2 ein Max

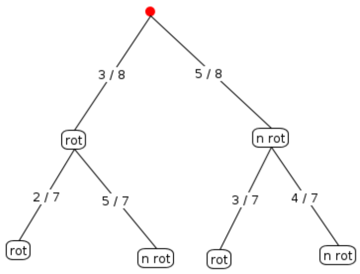
2.2
$$x=k$$
$$y=g(x)=\frac{1}{3}k^3 \text{ ergibt } y=\frac{1}{3}x^3$$

3. Der Normalenvektor der Ebene ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}$. Das Skalarprodukt mit dem Richtungsvektor der Geraden ergibt Null.

4.

x_k	0	1	2
$P(X=x_k)$	$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{20}{56}$	$\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{30}{56}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{6}{56}$

$$E(x)=0\cdot\frac{20}{56}+1\cdot\frac{30}{56}+2\cdot\frac{6}{56}=\frac{3}{4}$$



Teil B1

1.1 $n(x)=s(x)$ ergibt $x_1=-5$ und $x_2=5$ also einen Abstand von (5+5)*100

$d(x)=n(x)-s(x)$ und dann das Maximum von d graphisch ermitteln
$\approx 26{,}636$ also 2663,6m

1.2 $\int_{-3}^{3} \sqrt{1+(n'(x))^2}\,dx \approx 6{,}435$

$643{,}5 \cdot 50 \cdot 0{,}3 = 9652{,}5$ Euro

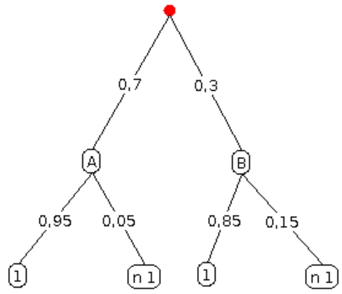
1.3 $\int_{-5}^{5} n(x)-s(x)\,dx \approx 199{,}96$

$199{,}96 \cdot 10000 \cdot 700 \approx 1{,}4\,Mrd$

1.4 Es ist eine Tangente von K an den Graphen von n gesucht.

$$\begin{aligned} n'(x) &= \frac{y-20}{x-1{,}5} \\ n'(x) &= \frac{n(x)-20}{x-1{,}5} \end{aligned} \quad \text{ergibt} \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &\approx 2{,}752 \end{aligned} \quad \text{daraus} \quad \begin{aligned} m_1 &= n'(0) = 0 \\ m_2 &= n'(2{,}752) \approx -0{,}659 \end{aligned}$$

ergibt $\alpha = 180° - \tan^{-1}(0{,}659)$ also $\alpha \approx 146{,}60°$ also größer als 135°



1.5 Güteklasse 1: $0{,}7 \cdot 0{,}95 + 0{,}3 \cdot 0{,}85 = 0{,}92$

Wkt von A über Satz von Bayes:

$$\frac{0{,}7 \cdot 0{,}95}{0{,}7 \cdot 0{,}95 + 0{,}3 \cdot 0{,}85} = 0{,}7228$$

1.6 Fehler 1. Art: binomcdf(44,50,0.95)=0,0378

Fehler 2. Art: 1- binomcdf(44,50,0.85)=0,2194

Teil B2

2.

2.1 $d=\sqrt{6^2+2^2+k^2}=\sqrt{k^2+40}$

$$\left.\begin{aligned} |\overline{EF}| &= 8 = |\overline{FG}| \\ |\overline{FH_k}| &\text{ in beiden enthalten} \\ |\overline{EH_k}| &= \sqrt{k^2+40} = |\overline{GH_k}| \end{aligned}\right. \quad \text{also nach SSS kongruent}$$

rechtwinklig, wenn Skalarprodukt aus

$$\begin{aligned} \langle \vec{EH_k} | \vec{FH_k} \rangle &= 0 = -6 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + k^2 \\ k^2 &= 8 \\ k &= \pm\sqrt{8} \end{aligned}$$

wobei $k=-\sqrt{8}$ entfällt, da k>0

2.2 Ebene D_iEG: $\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\0\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\8\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-8\\0\\1\end{pmatrix}$

Nun soll die Dachfläche eben sein, also H_k in der Ebene liegen:

$\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\0\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\8\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-8\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\\5+k\end{pmatrix}$ ergibt k=0,5

Damit ist das Gebäude 5+0,5=5,5m hoch

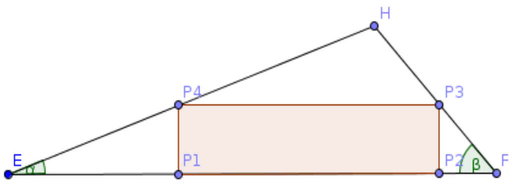
2.3 Ebenengleichung (Programm econf) mit dem Taschenrechner ergibt:
$-0{,}2357\,x+0{,}2357\,y-0{,}9428\,z=-4{,}714$

(Oder: Berechnung des Normalenvektors mit dem Kreuzprodukt $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$)

mit dem Taschenrechner $angle\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}\right]\approx 19{,}47\,°$

also ein Winkel von ca. 20°

2.4 Das kann man als zweidimensionales Problem auffassen:



$\alpha=angle(\overline{EH},\overline{EF})\approx 20{,}44\,°$
$\beta=angle(\overline{FE},\overline{FH})\approx 48{,}19\,°$

nimmt man nun an, dass das Fenster gerade so hineinpasst, kann man die Strecke FP2 berechnen

$\tan 48{,}15\,°=\dfrac{1{,}5}{FP2}$ genau so für Strecke EP1 $\tan 20{,}44\,°=\dfrac{1{,}5}{EP1}$

$FP2\approx 1{,}34$ $EP1\approx 4{,}02$

Nun kann man $|\overline{EP1}|+|\overline{P1P2}|+|\overline{P2F}|=4{,}02+2{,}5+1{,}34=7{,}86<8$ berechnen. Man hat also noch Platz. Das Fenster passt.

2.5 $P(X<72)=normcdf(-\infty,72{,}5{,}75)\approx 0{,}2743$

$P(X=2)=binompdf(2{,}3{,}0.2743)\approx 0{,}1638$