Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2011, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mueller@ehrenberg-gymnasium.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 10.05.11.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Hinweise für den Teilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 15 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 240 Minuten. Es sind 45 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt (Aufgaben ohne CAS)

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Tragen Sie die Antworten zur Aufgabe 1 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 2 bis 4 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Für jeden Wert für a ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = e^{a \cdot x^2}$ $(x \in D_{f_a})$ gegeben. Der Anstieg m der Tangente an den Graphen der Funktion f_a an der Stelle $x = 1$ hat den Wert

▢ $m = e$ ▢ $m = e^a$ ▢ $m = a \cdot e^a$ ▢ $m = 2 \cdot a \cdot e^a$ ▢ $m = 2 \cdot a \cdot e^{2 \cdot a}$

1.2 Der Grenzwert der Funktion f mit $f(x) = \frac{(x-5)\cdot(x+5)}{x-5}$ ($x \in D_f$) an der Stelle $x = 5$

▢ existiert nicht ▢ beträgt 0 ▢ beträgt 5 ▢ beträgt 10 ▢ beträgt -25

1.3 Gegeben ist die Menge aller ganzrationalen Funktionen f dritten Grades, deren jeweilige erste Ableitungsfunktion f' die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

(1) Die erste Ableitungsfunktion f' besitzt genau eine Nullstelle.

(2) Für alle $x \in D_{f'}$ gilt: $f'(x) \leq 0$.

Welche der folgenden Aussagen ist für jede Funktion f aus dieser Menge wahr?

▢ Die Funktion f hat zwei Nullstellen.
▢ Die Funktion f hat eine lokale Minimumstelle.
▢ Die Funktion f hat eine lokale Maximumstelle.
▢ Die Funktion f hat eine Wendestelle.
▢ Die Funktion f ist monoton wachsend.

1.4 Die Geraden g und h mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ bzw. $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R})$

▢ schneiden sich unter einem spitzen Winkel
▢ schneiden sich rechtwinklig
▢ verlaufen windschief
▢ sind identisch
▢ verlaufen parallel

1.5 Beim Werfen einer Reißzwecke kann diese entweder auf der Seite oder auf dem Kopf liegen bleiben. Eine Reißzwecke wird genau zweimal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei den zwei Würfen die Reißzwecke mindestens einmal auf der Seite liegen bleibt, beträgt 0,84. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie bei einmaligem Wurf auf dem Kopf liegen bleibt?

☐	☐	☐	☐	☐
0,08	0,16	0,4	0,6	0,84

Für Aufgabe 1 erreichbare BE-Anzahl: 5

2 Für jeden Wert für k ($k \in \mathbb{R}$, $k > 0$) ist eine Funktion f_k gegeben durch $f_k(x) = -\frac{1}{k} \cdot x^3 + k \cdot x$ ($x \in \mathbb{R}$). Der Graph der Funktion f_k und die Abszissenachse begrenzen im ersten Quadranten eine Fläche vollständig.

Bestimmen Sie den Wert für k für den der Inhalt dieser Fläche $\frac{27}{4}$ beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

3 Gegeben sind die Ebenen E und F durch die Gleichungen E: $2 \cdot x + y + 5 \cdot z = 2$ bzw. F: $x - y + z = 1$.
Berechnen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen E und F.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

4 Bei einem Spiel wird aus genau einem blauen und genau zwei roten Würfeln genau ein Turm so gebaut, dass alle drei Würfel zufällig übereinander gestapelt werden. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der roten Würfel über dem blauen Würfel.
Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Aufgabe B1

Eine Firma stellt rotationssymmetrische Dekorationsvasen her. Der Durchmesser der Grundfläche jeder Vase beträgt 2,0 cm. Die Deckfläche jeder Vase ist ein Kreisring, dessen äußerer Durchmesser 4,0 cm beträgt.

Eine dieser Vasen wird durch eine Ebene geschnitten, welche die Rotationsachse enthält. Die dabei entstehende Schnittfläche kann in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung 0 (1 Längeneinheit entspricht 1 Zentimeter) dargestellt werden (siehe Abbildung 1).

Die Rotationsachse der Vase liegt auf der Ordinatenachse. Die Begrenzungslinien der Schnittfläche liegen auf den Geraden mit den Gleichungen $y = 0$ und $y = 9$, zwei weiteren Geraden g und h sowie dem Graphen der Funktion f mit

$y = f(x) = \frac{3}{2} \cdot x^4 + 0{,}5$ ($x \in \mathbb{R}$).

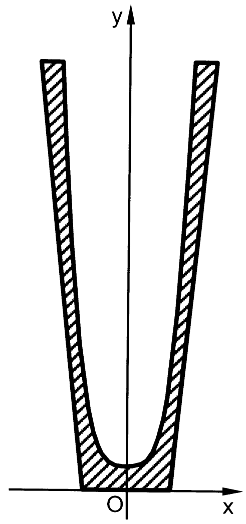


Abbildung 1: (nicht maßstäblich)

1.1 Ermitteln Sie die Tiefe des Hohlraumes im Inneren der Vase.
Bestimmen Sie den inneren Durchmesser der Deckfläche der Vase.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

1.2 Ermitteln Sie eine Gleichung einer der Geraden g oder h. Erreichbare BE-Anzahl: 2

1.3 Bestimmen Sie die Größe der beschriebenen Schnittfläche der Vase. Erreichbare BE-Anzahl: 3

1.4 Die Vase soll vollständig mit Wasser gefüllt werden.
Ermitteln Sie das Volumen des benötigten Wassers. Erreichbare BE-Anzahl: 3

1.5 In die Vase wird ein geradliniges Duftstäbchen mit der Gesamtlänge 10,0 cm gestellt (siehe Abbildung 2). Die Dicke des Stäbchens ist vernachlässigbar.
Bestimmen Sie, welche Länge des Duftstäbchens mindestens aus der Vase herausragt.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

1.6 Die Wandstärke der Vase wird jeweils senkrecht zur äußeren Mantelfläche gemessen.
Beschreiben Sie ein Verfahren, wie man rechnerisch einen Näherungswert für die geringste Wandstärke dieser Vase ermitteln kann.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

1.7 Die Masse der hergestellten Vasen ist normalverteilt mit dem Erwartungswert 56,6 g und der Standardabweichung 0,6 g.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Masse einer Vase um mehr als 1,0 g vom Erwartungswert abweicht.

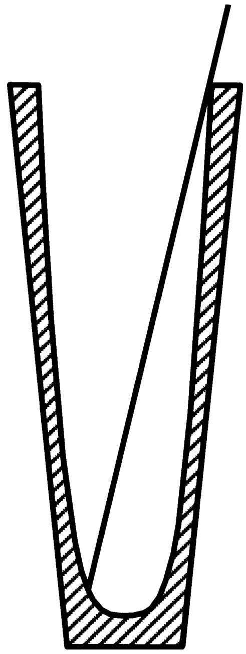


Abbildung 2: (nicht maßstäblich)

Aufgabe B 2

Auf einem Spielplatz soll in einem ebenen Gelände ein neues Klettergerüst gebaut werden. Der Klettergerüstdesigner ist von einem Würfel mit der Kantenlänge 3,0 m ausgegangen. Von diesem Würfel wird an jeder Ecke der Deckfläche eine gerade dreiseitige Pyramide abgeschnitten. Die Schnittebenen verlaufen dabei durch die Mittelpunkte von Kanten des ursprünglichen Würfels (siehe Abbildung 3).

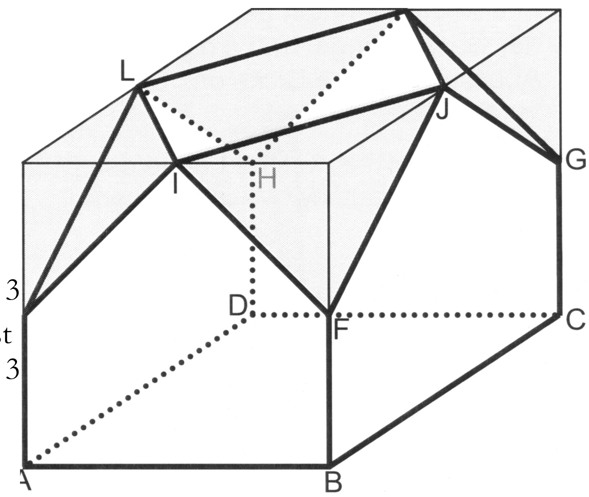


Abbildung 3: (nicht maßstäblich)

Entlang aller Kanten des so entstandenen Körpers wird das Klettergerüst aus Edelstahlrohren aufgebaut, die an den Eckpunkten miteinander verschweißt sind.

2.1 Ermitteln Sie die benötigte Gesamtlänge an Edelstahlrohr für das Klettergerüst.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

2.2 Berechnen Sie das Volumen des vom Klettergerüst umbauten Raumes. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Das Klettergerüst wird in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) dargestellt (siehe Abbildung 2).

Die Fläche ABCD liegt im ebenen Gelände und befindet sich in der x-y-Koordinatenebene. Die Kanten der Fläche ABCD verlaufen achsenparallel. Der Koordinatenursprung O liegt im Mittelpunkt der Fläche ABCD. Eine Kletterstange ist im Punkt O verankert und verläuft senkrecht zur Fläche ABCD.

2.3 Geben Sie die Koordinaten des Punktes K an.
Erreichbare BE-Anzahl: 1

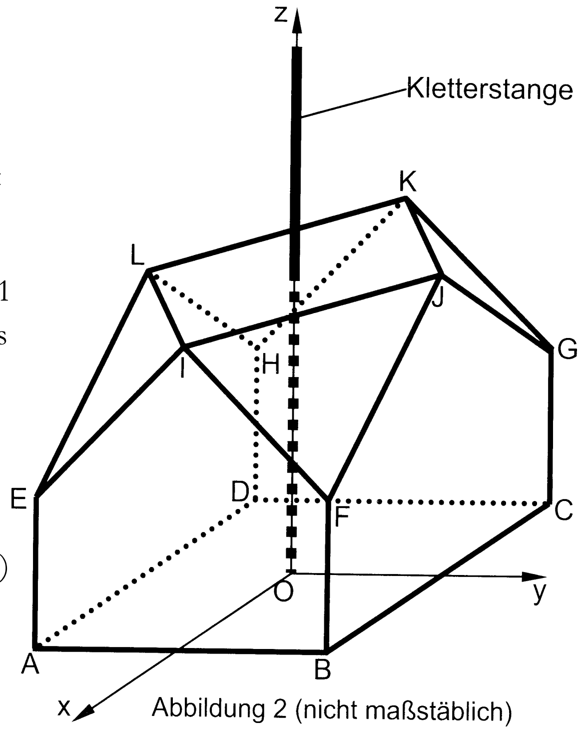


Abbildung 2 (nicht maßstäblich)

Ein dreieckiges Sonnensegel soll so gefertigt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

(1) Zwei Eckpunkte des dreieckigen Sonnensegels liegen im ebenen Gelände, der dritte Eckpunkt befindet sich an der Kletterstange in der Höhe h über der Fläche ABCD.

(2) Die Punkte I(1,5 | 0,0 | 3,0) und L(0,0 | -1,5 | 3,0) liegen jeweils auf einer Seite des dreieckigen Sonnensegels.

(3) Das Sonnensegel wird so gespannt, dass es sich in einer Ebene außerhalb des Klettergerüstes befindet.

Der Punkt E besitzt die Koordinaten E(1,5 | -1,5 | 1,5).

2.4 Begründen Sie, dass nur für 3,0 m < h ≤ 4,5 m eine derartige Befestigung des Sonnensegels möglich ist. Erreichbare BE-Anzahl: 3

2.5 Zeigen Sie, dass für h = 4,0 m der Abstand der beiden Befestigungspunkte im ebenen Gelände rund 8,5 m beträgt.
Ermitteln Sie den Abstand der beiden Befestigungspunkte im ebenen Gelände in Abhängigkeit von h. Erreichbare BE-Anzahl: 6

Ein Hersteller von Sonnensegeln gibt an, dass seine Sonnensegel erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % die ersten zwei Nutzungsjahre ohne Defekt überstehen.

2.6 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 150 verkauften Sonnensegeln mindestens 130 die ersten zwei Nutzungsjahre ohne Defekt überstehen.
Geben Sie an, bei wie vielen von 150 verkauften Sonnensegeln zu erwarten ist, dass sie die ersten zwei Nutzungsjahre ohne Defekt überstehen. Erreichbare BE-Anzahl: 3

2.7 Ermitteln Sie die Anzahl der mindestens zu prüfenden Sonnensegel, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % nach den ersten zwei Nutzungsjahren an mindestens einem Sonnensegel ein Defekt gefunden wird. Erreichbare BE-Anzahl: 2

2.8 Der Hersteller überprüft mithilfe eines Testverfahrens an einer Stichprobe von 20 Sonnensegeln die Qualitätsaussage, dass seine Sonnensegel mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % die ersten zwei Nutzungsjahre ohne Defekt überstehen.
Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich dieses Testverfahrens für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 %. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Lösungsvorschläge

Aufgabe A

1. Feld 4, Feld 4, Feld 4, Feld 1, Feld 3
2. Nullstellen, $\int_0^k f_k(x)\,dx = \frac{27}{4}$
   Anwendung des Hauptsatzes (2 BE)
   Wert für k: k = 3
3. Ansatz für eine Gleichung der Schnittgeraden (2 BE)
   eine Gleichung der Schnittgeraden: z. B. $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$
4. alle Werte der Zufallsgröße X
   vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung
   Erwartungswert: E(X) = 1

x_i	$P(X = x_i)$
0	⅓
1	⅓
2	⅓

Aufgabe B1

1.1. Ansatz für Tiefe des Hohlraumes
Tiefe des Hohlraumes: 8,5 cm
Ansatz für inneren Durchmesser der Deckfläche der Vase: `solve(Y1-9,X,2)` → 1.5429
innerer Durchmesser der Deckfläche der Vase: 3,1 cm

1.2. Ansatz für eine Gleichung der Geraden
eine Gleichung einer Geraden: z. B. y = 9x – 9 oder y = -9x – 9

1.3. Ansatz für Größe der Schnittfläche der Vase (2 BE)
$\bar{f}(x) = \sqrt[4]{\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3}}$ in $A = 27 - 2 \cdot \int_{0.5}^{9} \bar{f}(x)\,dx \approx 6.0168$
oder Zerlegung in Teilflächen für $0 \leq x \leq 1.5429$
½A = `fnInt(Y1,X,0, 1.5429) + (2 – 1.5429)·9 – ½·1·9`
Größe der Schnittfläche der Vase: 6,0 cm²

1.4. Ansatz für Volumen des benötigten Wassers (2 BE)
$V = \pi \int_{0.5}^{9} \bar{f}(x)^2\,dx \approx 42.3781$
Volumen des benötigten Wassers: 42 cm³

1.5. Ansatz für Zielfunktion
Zielfunktion
qaudratische Abstandsfunktion $d^2(x) = (x - 1.5429)^2 + (f(x) - 9)^2 \rightarrow x \approx -0.33279$
$d(-0.33279) \approx 8.6865 \Rightarrow 1.3135$
Mindestlänge: 1,3 cm

1.6. vollständige Beschreibung
Ich suche die Stelle auf Graph f, die den Anstieg m = 9 aufweist, berechne die Tangente an dieser Stelle und den Abstand dieser Tangente zu y = 9x -9 (sind parallel).
Beispielsweise: t: y = 9 ·x – 7.2268 und d = (9 - 7.2268) ·SIN(90° - ATAN(9)) ≈ 0.1958
oder
Für alle Normalen zur äußeren Mantelfläche (z. B. Anstieg m = 1/9 mit .5 < n < 9) wird der Abstand der Schnittpunkte mit f und g bestimmt. Die Schnittpunkte hängen nur von n ab. Der Abstand der Schnittpunkte demzufolge auch. Damit lässt sich ein Minimum des Abstandes

finden.
Oder – eine „etwas gröbere[1]“ Näherung über Abstand der Umkehrfunktionen entlang der y-Achse ergibt: x = 3.0756 und d ≈ 0.1970

1.7. Ansatz für Wahrscheinlichkeit (2 BE)
$m \sim N_{\mu=56{,}6,\ \sigma=1{,}0} \Rightarrow P(|x-\mu| > 1) =$ `1 – Tistat.NV_Iwkt(55.6,57.6,56.6,.6)` (TI-89)
Wahrscheinlichkeit: 0,0956

Aufgabe B2

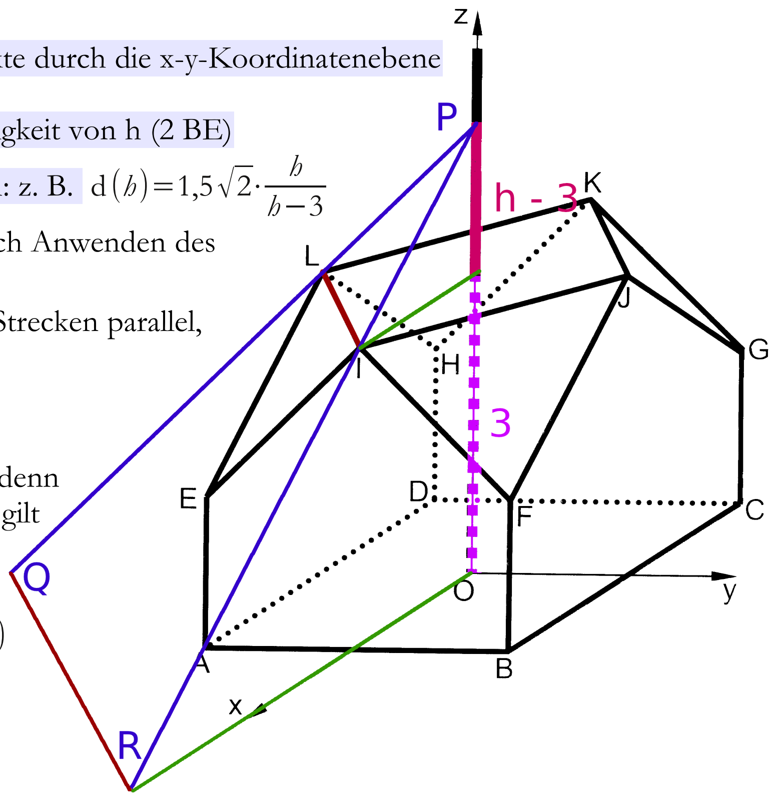
2.1. Ansatz für Gesamtlänge der Stahlrohre (2 BE)
$4 \cdot (3 + 1{,}5) + 12 \cdot \sqrt{2} \cdot 1{,}5 \approx 43.4558$
Gesamtlänge der Stahlrohre: 43,5 m

2.2. Ansatz für Volumen (2 BE)
$V = 27 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot 1.5$
Volumen: 24,75 m³

2.3. Koordinaten des Punktes K: K(-1,5 | 0 | 3)

2.4. Begründung für h > 3,0 m:
für h ≤ 3 m würde die Eckpunkte das Segel den Boden nicht berühren
Begründung für h ≤ 4,5 m (2 BE):
für h = 4,5 m liegt Punkt E auf dem Segel und für noch größere Höhen liegt E über dem Segel, damit würden die Kanten $\overline{EI}$ und $\overline{EL}$ geschnitten[2]
z. B. Schnitt der Ebene E_{EIL} mit der z-Achse
Schlussfolgerung

2.5. zwei Geradengleichungen
Koordinaten der Durchstoßpunkte durch die x-y-Koordinatenebene
Nachweis
Ansatz für Abstand d in Abhängigkeit von h (2 BE)
Abstand d in Abhängigkeit von h: z. B. $d(h) = 1{,}5\sqrt{2} \cdot \frac{h}{h-3}$



Aus der Abbildung lässt sich durch Anwenden des Strahlensatz das Gleiche ableiten:

1. im Dreieck OPR sind grüne Strecken parallel, deshalb ist $\frac{\overline{PI}}{\overline{PR}} = \frac{h-3}{h}$
2. im Dreieck PQR sind die rot markierten Strecken parallel, denn es sind Höhenlinien, deshalb gilt $\frac{\overline{LI}}{\overline{QR}} = \frac{h-3}{h}$
3. $\overline{LI} = 1{,}5 \cdot \sqrt{2}$ und $\overline{QR} = d(h)$
   das wars

2.6. Definition einer Zufallsgröße
$X \sim b_{150;.8}$ und $P(X \geq 130)$
Wahrscheinlichkeit: 0,0224
Erwartungswert: 120

1 Das ist also erst ein Unterschied im Hunderstel-Millimeter-Bereich (14 nm). Es kann wohl davon ausgegangen werden, dass im Fertigungsprozess der Vase größere Schwankungen entstehen.

2 Das die obere Höhe tatsächlich 4,5 m beträgt, ist auch ohne Rechnung leicht zu begründen. Die Punkte I und L liegen ja in der Mitte. Der Höhengewinn von E nach I ist also zu verdoppeln.

2.7. Ansatz für Mindestanzahl: $1 - .8^n \geq .95$
Mindestanzahl: 14

2.8. Festlegung einer Zufallsgröße: $X \sim b_{20;.8}$
Ansatz für Ablehnungsbereich: $P(X \leq g) \leq .1$ mit GTR: `binoSum(20,.8,13)` → .08669
Ablehnungsbereich: {0 .. 13}