Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2010, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
  Auf Besonderheiten beim Einsatz eines CAS wird an gegebener Stelle eingegangen.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mueller@gymnasium-delitzsch.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 08.05.10.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 15 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten. Es sind 45 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Tragen Sie die Antworten zu den Aufgaben 1 und 2 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 3 bis 5 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Die Funktion f mit $f(x)=\frac{x^2-6x+9}{x-3}$ ($x \in \mathbf{D}_f$) besitzt bei x = 3:

☐ eine Nullstelle ☐ eine Extremstelle ☐ eine Wendestelle ☐ keinen Funktionswert ☐ die erste Ableitung Null

1.2 Der Anstieg m der Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x)=\frac{3}{2}e^{2x}$ ($x \in \mathbf{D}_f$) an der Stelle x = 1 beträgt:

☐ $m = 3e^2$ ☐ $m = 3/2\, e^2$ ☐ $m = \frac{3}{4}\, e^2$ ☐ $m = 3/2\, e$ ☐ $m = 3e$

1.3 Die Punkte A(1 | 2 | 0), B(1 | 1 | 0) und C(5 | 1 | 0) sind Eckpunkte eines Rechtecks ABCD. Der Punkt S ist die Spitze einer geraden Pyramide mit dem Rechteck ABCD als Grundfläche und der Höhe h = 7.
Eine mögliche Spitze der Pyramide hat die Koordinaten:

☐ S(3 |-0,5 |7) ☐ S(3 |1,5 |7) ☐ S(2 |-0,5 |-1) ☐ S(-0,5 |2,5 |-1) ☐ S(-0,5 |2,5 |7)

1.4 Eine Zufallsgröße X hat die in der Tabelle gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung.

x_i	0	4	8	12	16
$P(X = x_i)$	c	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	d

($c, d \in \mathbb{R}$)

Für welchen Wert für d beträgt der Erwartungswert dieser Zufallsgröße E(X) = 7?

☐ $d = \frac{5}{8}$ ☐ $d = \frac{1}{8}$ ☐ $d = 0,1$ ☐ $d = \frac{1}{8} + c$ ☐ $d=c$

1.5 Eine Menge enthält genau die stetigen Funktionen f, die im Intervall I mit $a \le x \le b$ ($a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$) jeweils folgende Eigenschaften besitzen:
(1) Keine dieser Funktionen ist im Intervall I konstant.
(2) Jede dieser Funktionen besitzt im Intervall I eine Stammfunktion.

(3) Für jede dieser Funktionen f gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

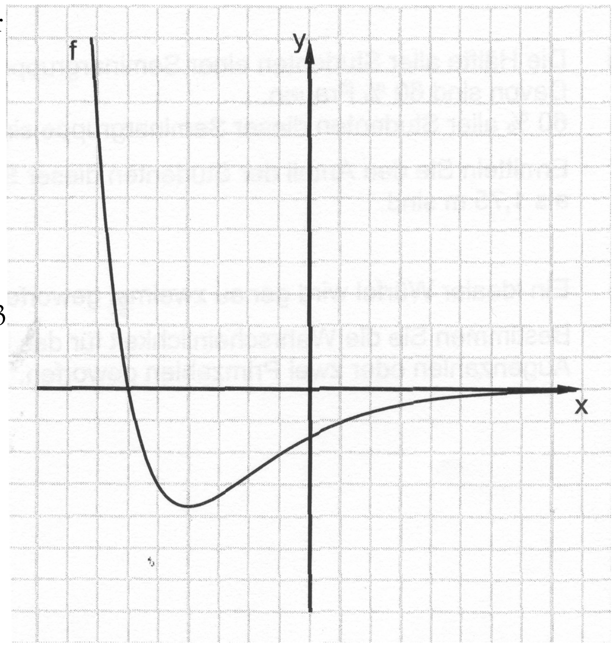
Welche Aussage ist unter diesen Voraussetzungen für jede Funktion f dieser Menge wahr?

- ▢ Der Graph von f ist im Intervall I achsensymmetrisch zur Ordinatenachse.
- ▢ Die Funktion f ist im Intervall I streng monoton steigend.
- ▢ Der Graph von f verläuft im Intervall I auf der Abszissenachse.
- ▢ Die Funktion f besitzt im Intervall I mindestens eine Nullstelle.
- ▢ Der Graph von f schließt im Intervall I mit der Abszissenachse mindestens drei Flächen vollständig ein.

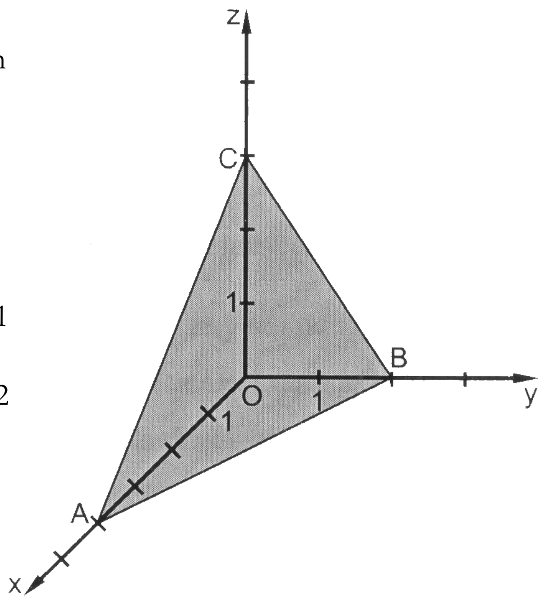
Für Aufgabe 1 erreichbare BE-Anzahl: 5

2 Skizzieren Sie zum vorgegebenen Graphen einer Funktion f in dasselbe Koordinatensystem den Graphen einer zugehörigen Stammfunktion F im dargestellten Intervall.
Begründen Sie Ihre Darstellung des Graphen von F mit einem charakteristischen Zusammenhang zwischen den Graphen von f und F.

Erreichbare BE-Anzahl: 3



3 In der Abbildung ist ein Teil der Ebene E, die durch die Punkte A, Bund C eindeutig bestimmt ist, in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem dargestellt.
Die Punkte A, Bund C liegen auf den Koordinatenachsen und besitzen jeweils ganzzahlige Koordinaten.



3.1 Geben Sie eine Gleichung der Ebene E an.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

3.2 Weisen Sie nach, dass der Punkt P(3 | ½ | 0) in der Ebene E liegt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

4 Die Hälfte aller Studenten einer Seminargruppe ist höchstens 1,75 m groß.
Davon sind 60 % Frauen.
60 % aller Studenten dieser Seminargruppe sind Männer.
Ermitteln Sie den Anteil der Studenten dieser Seminargruppe, die Männer und größer als 1,75 m sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

5 Ein idealer Würfel wird genau zweimal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis: "Es werden zwei gleiche Augenzahlen oder zwei Primzahlen geworfen." Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil B1

Canopy ist eine Touristenattraktion. Dabei werden in großer Höhe Stahlseile angebracht, an denen man auf Rollen entlang gleitet.

Für jeden Wert für t ($t \in \mathbb{R}$, $t > 0$) beschreibt der Graph der Funktion f_t mit $y = f_t(x) = \frac{5}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{t}} + e^{-\frac{x}{t}}\right)$ ($x \in \mathbb{R}$) in einem kartesischen Koordinatensystem den Verlauf eines solchen Stahlseiles.

1.1 Begründen Sie, dass die Funktion ft keine Nullstelle besitzt.

Zeigen Sie, dass die erste Ableitungsfunktion durch die Gleichung $f_t'(x) = \frac{5}{2t} \cdot \left(e^{\frac{x}{t}} - e^{-\frac{x}{t}}\right)$ ($x \in \mathbb{R}$) beschrieben werden kann.

Der Wert für den Parameter t beeinflusst Eigenschaften der Funktion bzw. des Graphen der Funktion f_t.

Nennen Sie eine durch den Parameter t beeinflusste und eine nicht beeinflusste Eigenschaft. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Die nebenstehende Abbildung zeigt für t = 90 das Stahlseil einer Canopy-Tour zwischen dem Startpunkt A(-200,0 | f_{90}(-200,0)) und dem Endpunkt E(80,0 | f_{90}(80,0)) in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter).
Die Profillinie des ebenen Geländes liegt auf der Abszissenachse.
Die Funktionswerte der Funktion f_{90} geben die jeweilige Höhe des Stahlseils über dem Gelände in Meter an.

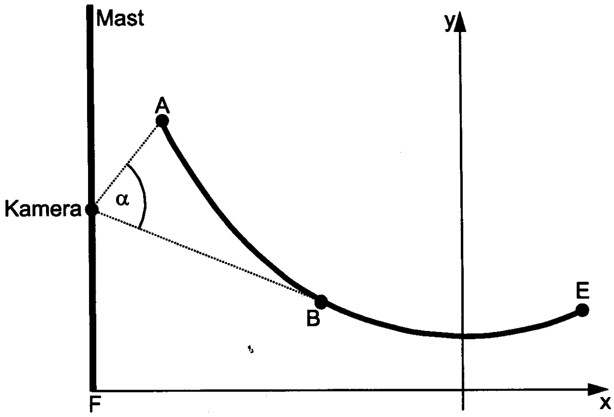


Abbildung 1: nicht maßstäblich

1.2 Bestimmen Sie den Höhenunterschied zwischen Start- und Endpunkt.
Geben Sie die Höhe des tiefsten Punktes des Stahlseils an.
Ermitteln Sie das Gefälle des Stahlseils im Startpunkt A. Erreichbare BE-Anzahl: 5

1.3 Bestimmen Sie, um wie viel sich die Länge des Stahlseils reduziert, wenn man es zwischen den Punkten A und E straff spannen würde.
Zur Kontrolle:
Die Länge des nicht straff gespannten Stahlseils zwischen den Punkten A und E beträgt $l \approx 281{,}4$ m.
Ermitteln Sie den größten Höhenunterschied, den das straff gespannte Seil zum tatsächlichen Verlauf hätte. Erreichbare BE-Anzahl: 7

1.4 Mit einer Kamera sollen Teile der Canopy-Tour überwacht werden. Der Fußpunkt eines lotrechten Mastes besitzt die Koordinaten F(-220,00 | 0,00) . An diesem Mast wird in 15,00 m Höhe die Kamera angebracht. Von der Kamera aus kann man einen Teil des Stahlseils von unten sehen.
Ein Schenkel des Winkels a. (siehe Abbildung) liegt auf der gedachten Tangente von der Kamera an das Seil.
Zeigen Sie, dass diese Tangente das Seil im Punkt B(-80,60 | 7,14) berührt.
Hinweis: *Die Koordinaten des Punktes B sind als Näherungswerte angegeben.*
Bestimmen Sie die Größe des Winkels a. (siehe Abbildung), unter dem das Stahlseil von der Kamera aus von unten gesehen wird. Erreichbare BE-Anzahl: 6

1.5 Man legt fest, dass die Masse eines Touristen, der an diesem Stahlseil die Canopy-Tour absolvieren möchte, höchstens 100 kg betragen darf.

Bei der Herstellung des Stahlseils wird eine Sicherheitsgröße m_s so berücksichtigt, dass die Belastbarkeit des Stahlseils normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ kg + m_s und der Standardabweichung 20 kg ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Stahlseil bei einer Belastung von weniger als 100 kg reißt, soll höchstens 0,01 % betragen.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen den Mindestwert für m_s. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil B2

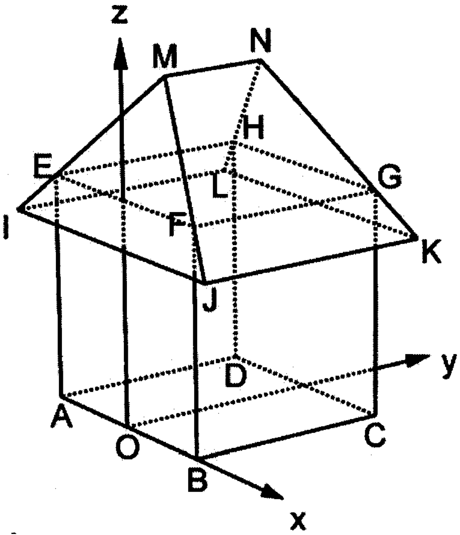


Abbildung 2: nicht maßstäblich

Ein Vereinshaus besteht aus einem quaderförmigen Gebäudekörper und einem darauf aufgesetzten Dach (siehe Abbildung).

Die Grundfläche ABCD des Gebäudekörpers liegt in der x-y-Koordinatenebene eines kartesischen Koordinatensystems (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter). Die Deckfläche des Gebäudekörpers ist EFGH. Das Vereinshaus ist symmetrisch zur y-z-Koordinatenebene.

Der Koordinatenursprung 0 befindet sich im Mittelpunkt der Kante $\overline{AB}$. Der Eckpunkt B befindet sich auf dem positiven Teil der x-Achse.

Es gilt: $\overline{AB} = 5{,}50$ m, $\overline{BC} = 8{,}50$ m, $\overline{AE} = 5{,}00$ m und $\overline{MN} = 4{,}50$ m.
Das Dach wird durch zwei zueinander kongruente Dreiecke und zwei zueinander kongruente Trapeze dargestellt. Die Kanten $\overline{IM}$, $\overline{JM}$, $\overline{KN}$ und $\overline{LN}$ verlaufen durch die Eckpunkte der Fläche EFGH.
Die Kante $\overline{JK}$ ist 1,00 m von der Ebene entfernt, in der die Fläche BCGF liegt.
Die Gesamthöhe des Hauses beträgt 7,50 m .

2.1 Geben Sie die Koordinaten der Punkte A und G an. Erreichbare BE-Anzahl: 2

2.2 Begründen Sie, dass der Punkt M die Koordinaten M(0,00 | 2,00 | 7,50) besitzt.
Ermitteln Sie die Größe des Winkels, unter dem jede Dreieckfläche des Daches zur Fläche EFGH geneigt ist.

Weisen Sie nach, dass der Punkt J die Koordinaten $J\left(\frac{15}{4}\middle|-\frac{8}{11}\middle|\frac{45}{11}\right)$ besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

2.3 Die Dachfläche JKNM soll mit Sonnenkollektoren bestückt werden.
Berechnen Sie die Größe dieser Dachfläche.
Hinweis: *Nutzen Sie dabei die Koordinaten der Punkte Mund J aus Aufgabenteil 2.2.*

Erreichbare BE-Anzahl: 3

2.4 Für das Anbringen von Sonnenkollektoren ist es erforderlich, den Neigungswinkel α des Daches zur Deckfläche des Gebäudekörpers zu kennen. Die Neigung der Dachfläche JKNM kann durch die Veränderung der Höhe des Dachfirstes MN variiert werden.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes M in Abhängigkeit vom Winkel α.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

2.5 Zum Vereinsfest ist eine Lotterie geplant. Dabei darf ein Mitspieler aus einer von genau drei Lostrommeln, die in den Farben rot, gelb und blau jeweils einfarbig angestrichen wurden, genau ein Los ziehen. Sowohl die Auswahl der Lostrommel als auch das Ziehen des Loses erfolgen jeweils zufällig. Das Los wird nach der Auswertung noch vor dem Ziehen des nächsten Loses wieder in die entsprechende Trommel zurückgelegt. In der roten Lostrommel befinden sich 8 Lose, darunter genau 5 Gewinnlose. In der gelben Lostrommel sind genau 75 % Gewinnlose enthalten. $\frac{3}{5}$ aller Lose in der blauen Trommel sind Gewinnlose.

Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.
Ereignis A: Ein Mitspieler zieht ein Gewinnlos.
Ereignis B: Bei 50 Ziehungen werden mehr Gewinnlose gezogen als zu erwarten sind.
Ereignis C: Ein zur Auswertung vorgelegtes Gewinnlos stammt aus der roten Lostrommel.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Lösungsvorschläge

Aufgabe A

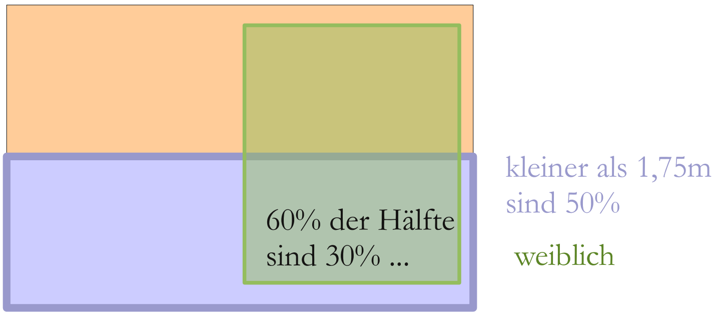
1 Feld 4, Feld 1, Feld 2, Feld 2, Feld 4

2 Skizze (2 BE)
Begründung: z. B. Hochstelle von F ist Nullstelle von f; Hochpunkt wegen Vorzeichenwechsel von + zu -; am Minimum von f liegt Wendepunkt; Auslauf der Kurve achsenparallel, wegen kleinerem Anstieg

3.1 eine Gleichung der Ebene: $3x + 6y + 4z - 12 = 0$ (enthält alle Spurpunkte)

3.2 Nachweis: $3 \cdot 3 + 6 \cdot ½ - 12 = 0 \Rightarrow$ w. A.

4 Ansatz für den Anteil
60% der Hälfte ⇒ 30% des Ganzen
verbleiben 20% kleine Männer
um auf 60% Männer zu kommen,
fehlen noch ...
Anteil: 40 %



5 Ansatz für die Wahrscheinlichkeit:

P({gleiche Augenzahlen}) + P({zwei Primzahlen}) – P({zwei gleiche Primzahlen}

Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$

Aufgabe B 1

1.1 Begründung: da e^z für alle $z \in \mathbb{R}$ stets positiv ist, gilt $f_t(x) > 0$
Nachweis (2 BE): Kettenregel und ausklammern von 1/t
eine beeinflusste Eigenschaft: z. B. die Steilheit in jedem Punkt der Kurve (außer für T(0 | 5))
eine nicht beeinflusste Eigenschaft: die Koordinate des Minimas T(0 | 5)

1.2 Ansatz für Höhenunterschied: $f_{90}(-200)-f_{90}(80) = \Delta h$
Höhenunterschied: 16,2 m
Höhe des tiefsten Punktes: 5,0 m
Ansatz für Gefälle im Punkt A: $f'_{90}(-200)$
Gefälle im Punkt A: z. B. 25,3 %

1.3 Bestimmung der Länge des nicht straff gespannten Stahlseils (2 BE)
$l = \sqrt{(280^2 + \Delta h^2)} \approx 280{,}47$

Bogenlänge: $s=\int_{-200}^{80}\sqrt{1+\left(f'_{90}(x)\right)^2}\,dx$

mit GTR: `fnInt(√(1+nDerive(Y1,X,X)²),X,-200,80)` → 281.351
mit CAS geht das VIEL einfacher: `arcLen(f(x,90),x,-200,80)` → 281.351
Länge des straff gespannten Seils
Differenz: ≈ 0,9 m

Geradengleichung: $g(x)\colon y=-\frac{\Delta h}{280}\cdot(x-80)+f_{90}(80)\approx-.05797x+11.7464$

Ansatz für maximalen Abstand: `fMax(g(x)-f90(x),x,-200,80)` → 9.2771 m
maximaler Abstand: ≈ 9,3 m

1.4 Anstieg der Tangente: ≈ −0,056
Nachweis des Berührungspunktes (2 BE)
die etwas ungenaue Variante:

Tangentenberechnung mit $x = 80.6 \Rightarrow t(x) = -.56675x + 2.57465 \Rightarrow t(-220) = 15.0432 \approx 15$
oder die genaue Variante: Tangente an den Graphen vom Punkt K(-220 | 15) außerhalb, an eine Stelle s, die wir noch nicht kennen

$y = mx + n$

I: $15 = f'_{90}(s) \cdot (-220) + n \Rightarrow n = ...$

II: $f_{90}(s) = f'_{90}(s) \cdot s + n$

I in II: $f_{90}(s) = f'_{90}(s) \cdot (s + 220) + 15$

und weiter mit GTR oder CAS:

`solve( f₉₀(s) = f'₉₀(s)·(s + 220) + 15, s, 80.6)` → $s \approx -80.2482$

$\Rightarrow t(x) = -.56366\, x + 2.59957$

Ansatz für Anstieg der Geraden von der Kamera zum Punkt A

$\tan(\alpha_1) = -.056366 \Rightarrow \alpha_1 \approx -3.2261°$

$\tan(\alpha_2) = (23.3405-15)/20 \Rightarrow \alpha_2 \approx 22.6372°$

Anstieg der Geraden von der Kamera zum Punkt A: ≈ 0,417

Größe des Winkels α : $\alpha \approx 26°$

1.5 Ansatz für den Mindestwert für m_S

`invNorm(.0001)` → -3.71902 und $-3.71902 = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{100-(100+m_s)}{20} \Rightarrow m_S = 74.38$

Mindestwert für m_S: $m_S \approx 74$ kg (Wert kann geringfügig abweichen)

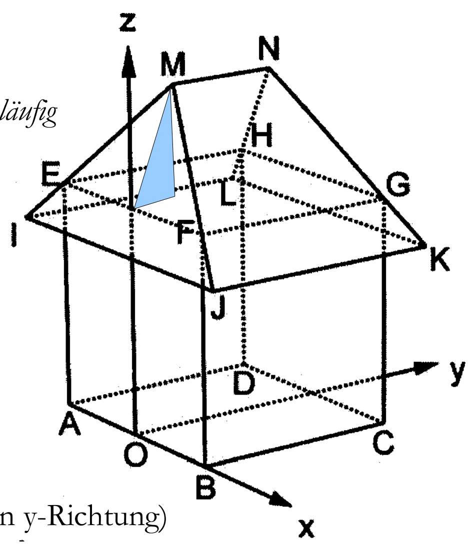
Aufgabe B 2

2.1 Koordinaten des Punktes A: A(-2,75 | 0,00 | 0,00)
Koordinaten des Punktes G: G(2,75 | 8,50 | 5,00)

2.2 Begründung für eine Koordinate des Punktes M
Begründung für die restlichen Koordinaten des Punktes M
Anmerkung des Autors: ich konnte keine Bedingung finden, die zwangsläufig zu y = 2 = (8.5 – 4.5)/2 führt, aber natürlich ist das naheliegend.
Ansatz für Größe des Neigungswinkels: $\tan\alpha = 2.5/2$
Größe des Neigungswinkels: ≈ 51,3 °
Nachweis der Koordinaten von J (2 BE):

$\vec{OJ} = \vec{OF} \cdot \lambda \cdot \vec{MF} \Rightarrow \lambda = \frac{4}{11}$ und E: $x = 2.75 \Rightarrow x_J = 3.75$ w.A.

z. B. Lage von J auf der Geraden durch M und F;
Abstand von J zur Ebene durch B, C, G und F



2.3 Ansatz für Inhalt der Trapezfläche (2 BE)
$h = \sqrt{3.75^2 + (z_J - 7.5)^2}$
$F_T = \frac{1}{2}(2 \cdot 8/11 + 8.5 + 4.5) \cdot h$ ($2 \cdot 8/11$ sind der Überstand in y-Richtung)
Inhalt der Trapezfläche: ≈ 36,6 m²

2.4 Ansatz für Koordinaten des Punktes M_α (2 BE): siehe Abb.
$\tan\alpha = h_M/2.75$
Koordinaten des Punktes M_α: M_α (0 | 2 | 5 + 2,75 · tan α)

2.5 Ansatz für Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right)$$

Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: P(A) = 79/120
Ansatz für Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B
$\mu = 32.91$ und $P(B) = 1 - B(50,.6585,32)$
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B: P (B) ≈ 0,5555
Ansatz für Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C

$\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{24} = \frac{79}{120} \cdot P(C)$

Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C: P (C) = 25/79