

## Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

**Inhaltsverzeichnis**

Vorwort.....	1
Material für den Prüfungsteilnehmer .....	2
Allgemeine Arbeitshinweise .....	2
Prüfungsinhalt.....	2
Pflichtaufgaben.....	2
Teil A: Analysis.....	2
Teil B: Geometrie / Algebra .....	3
Teil C: Stochastik .....	3
Teil D: Wahlaufgaben .....	4
Aufgabe D 1: Analysis .....	4
Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra .....	5
Lösungsvorschläge.....	6
Teil A.....	6
Teil B.....	6
Teil C.....	9
Teil D1.....	10
Teil D2.....	10

**Vorwort**

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

*Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2009, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver ([www.sachsen-macht-schule.de](http://www.sachsen-macht-schule.de)) veröffentlicht wurden.*

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+ bzw. CAS – hier TI 89) besonders häufig einzusetzen.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter [www.sn.schule.de/~matheabi](http://www.sn.schule.de/~matheabi) dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: [www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf](http://www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf).
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem **Sächsischen Schulserver** veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: **F. Müller** ([mathe@gymnasium-delitzsch.de](mailto:mathe@gymnasium-delitzsch.de)) – Mathe-Lehrer.  
Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 12.02.10.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

## Material für den Prüfungsteilnehmer

### Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten**.

**Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.**

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A, B und C** sowie dem **Wahlteil D**. Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.

Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Wahlaufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

- im Teil A 25 BE,
- im Teil B 15 BE,
- im Teil C 10 BE,
- im Teil D 10 BE.

### Erlaubte Hilfsmittel:

- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner mit oder ohne Computer-Algebra-System (CAS) bzw. ein CAS auf der Grundlage einer anderen Plattform entsprechend der getroffenen Festlegung an der Schule
- Tabellen- und Formelsammlung (im Unterricht eingeführt, ohne ausführliche Musterbeispiele)
- Zeichengeräte

### Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
60 BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

### Prüfungsinhalt

#### Pflichtaufgaben

##### Teil A: Analysis (für Prüfungsteilnehmer, die ein CAS benutzen)

Für jede reelle Zahl  $k$  ( $k > 0$ ) ist eine Funktion  $f_k$  durch  $f_k(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2kx^2 + 2k^2x$   $x \in \mathbb{R}$  definiert.

Der Graph der Funktion  $f_k$  besitzt genau zwei lokale Extrempunkte.

a) Geben Sie die Nullstellen der Funktion  $f_k$  an.

Die lokalen Minimumpunkte aller Graphen der Funktion  $f_k$  liegen auf dem Graphen der Funktion  $g$  und die lokalen Maximumpunkte aller Graphen der Funktion  $f_k$  liegen auf dem Graphen der Funktion  $h$ .

Ermitteln Sie je eine Gleichung der Funktionen  $g$  und  $h$ .

Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Weisen Sie nach, dass die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion  $f_k$  das arithmetische Mittel der entsprechenden Koordinaten der beiden lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion  $f_k$  sind.

Der Graph der Funktion  $v_k$  mit  $v_k(x) = f_k(x+a) + b$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) mit  $a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}$   $a \neq 0$   $b \neq 0$  entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion  $f_k$ .

Geben Sie die Werte für  $a$  und  $b$  so an, dass der Wendepunkt des Graphen von  $v_k$  im

Koordinatenursprung liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

- c) Der Graph der Funktion  $f_3$  schließt mit der Abszissenachse eine Fläche vollständig ein. Durch den lokalen Maximumpunkt des Graphen der Funktion  $f_3$  verläuft eine Gerade  $i$ , die den Inhalt dieser Fläche halbiert.  
Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden  $i$  mit der Abszissenachse.  
Erreichbare BE-Anzahl: 5
- d) Der Graph einer quadratischen Funktion verläuft durch den Koordinatenursprung und wird im Punkt  $Q(2 \mid f_3(2))$  von einer Parallelen zur Abszissenachse berührt.  
Zeigen Sie, dass die Funktion  $q$  mit  $q(x) = -4x^2 + 16x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) diese Bedingungen erfüllt.  
Der Graph von  $q$  schneidet die Abszissenachse in einem Punkt  $A(x \mid 0)$  mit  $x > 0$ .  
Auf dem Graphen der Funktion  $f_3$  existiert genau ein Punkt  $B$ , so dass der Abstand von  $A$  zu  $B$  kleinstmöglich ist.  
Ermitteln Sie grafisch Näherungswerte für die Koordinaten des Punktes  $B$ .  
Erreichbare BE-Anzahl: 6
- e) Weisen Sie nach, dass folgende Aussage wahr ist: „Für jede ganzrationale Funktion dritten Grades gilt: Wenn der Wendepunkt des Graphen dieser Funktion im Koordinatenursprung liegt, dann ist der Graph dieser Funktion punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.“  
Erreichbare BE-Anzahl: 4

**Teil A: (für Prüfungsteilnehmer, die kein CAS benutzen)**

Für jede reelle Zahl  $k$  ( $k > 0$ ) ist eine Funktion  $f_k$  durch  $f_k(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2kx^2 + 2k^2x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) definiert.

Der Graph der Funktion  $f_k$  besitzt genau zwei lokale Extrempunkte.

- a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion  $f_k$ .  
Zeigen Sie, dass die lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion  $f_k$  die Koordinaten  $P_{E_1}(2 \cdot k \mid 0)$  und  $P_{E_2}\left(\frac{2}{3} \cdot k \mid \frac{16}{27} k^3\right)$  besitzen.  
Weisen Sie die Art dieser Extrempunkte nach.  
Erreichbare BE-Anzahl: 6
- b) Die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion  $f_k$  sind das arithmetische Mittel der entsprechenden Koordinaten der beiden lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion  $f_k$ .  
Geben Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von  $f_k$  aufgrund dieser Aussage an.  
Der Graph der Funktion  $v_k$  mit  $v_k(x) = f_k(x+a) + b$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) mit  $a \in \mathbb{R}$ ;  $b \in \mathbb{R}$   $a \neq 0$   $b \neq 0$  entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion  $f_k$ .  
Geben Sie die Werte für  $a$  und  $b$  so an, dass der Wendepunkt des Graphen von  $v_k$  im Koordinatenursprung liegt.  
Erreichbare BE-Anzahl: 3
- c) Der Graph der Funktion  $f_3$  schließt mit der Abszissenachse eine Fläche vollständig ein. Durch den lokalen Maximumpunkt des Graphen der Funktion  $f_3$  verläuft eine Gerade  $i$ , die den Inhalt dieser Fläche halbiert.  
Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden  $i$  mit der Abszissenachse.  
Erreichbare BE-Anzahl: 6
- d) Der Graph einer quadratischen Funktion verläuft durch den Koordinatenursprung und wird im Punkt  $Q(2 \mid f_3(2))$  von einer Parallelen zur Abszissenachse berührt.  
Zeigen Sie, dass die Funktion  $q$  mit  $q(x) = -4x^2 + 16x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) diese Bedingungen erfüllt.  
Der Graph von  $q$  schneidet die Abszissenachse in einem Punkt  $A(x \mid 0)$  mit  $x > 0$ .  
Auf dem Graphen der Funktion  $f_3$  existiert genau ein Punkt  $B$ , so dass der Abstand von  $A$  zu  $B$  kleinstmöglich ist.  
Ermitteln Sie grafisch Näherungswerte für die Koordinaten des Punktes  $B$ .  
Erreichbare BE-Anzahl: 6
- e) Weisen Sie nach, dass folgende Aussage wahr ist: „Für jede ganzrationale Funktion dritten Grades gilt: Wenn der Wendepunkt des Graphen dieser Funktion im Koordinatenursprung liegt, dann ist

der Graph dieser Funktion punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.“

Erreichbare BE-Anzahl: 4

**Teil B: Geometrie / Algebra**

Zeichnung 1: Zeichnung nicht maßstäblich

Die Schüler einer Arbeitsgemeinschaft benötigen für das Bühnenbild ihrer Theateraufführung einen Körper in Form eines Teils einer Hausfassade. Dieser allseitig geschlossene Körper  $ABCDEFGHI_tK_t$  wurde durch die Schüler in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung  $O$  in nebenstehender Abbildung dargestellt (1 Längeneinheit entspricht 1,00 m).

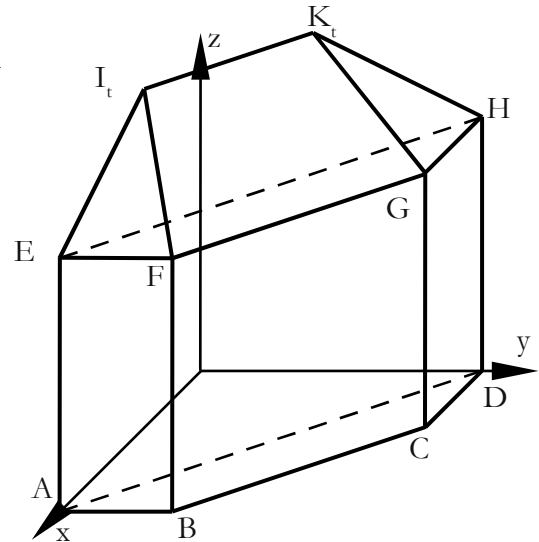
Für die Koordinaten der Eckpunkte gilt:

$A(3 \mid 0 \mid 0)$ ,  $B(3 \mid 1 \mid 0)$ ,  $C(1 \mid 3 \mid 0)$ ,  $D(0 \mid 3 \mid 0)$ ,

$I_t(1 \mid 0 \mid t)$ ,  $K_t(0 \mid 1 \mid t)$ .

Der Wert  $t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ,  $t > 3$ ) variiert dabei die Neigungen der Dachsträgen.

Die Eckpunkte  $E, F, G$  und  $H$  liegen bezüglich der  $x$ - $y$ -Koordinatenebene 3,00 m senkrecht über den Punkten  $A, B, C$  und  $D$ .



a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene  $\epsilon_1$ , in der die Fläche  $ADHE$  liegt.

Zeigen Sie, dass für keinen Wert für  $t$  der Punkt  $I_t$  in der Ebene  $\epsilon_1$  liegt.

Der Körper  $ABCDEFGHI_tK_t$  ist symmetrisch bezüglich einer Ebene  $\epsilon_2$ .

Geben Sie eine Gleichung von  $\epsilon_2$  an.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Begründen Sie, dass das Dreieck  $EFI_t$  für jeden Wert von  $t$  rechtwinklig ist.

Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von  $t$ .

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Die Dachfläche  $EFK_tI_t$  liegt in der Ebene mit der Gleichung  $(t - 3)x + (t + 3)y + 3z = 4t - 3$  ( $t \in \mathbb{R}$ ,  $t > 3$ ).

Berechnen Sie die Höhe des Körpers  $ABCDEFGHI_tK_t$ , wenn die Dachfläche  $EFK_tI_t$  im Winkel von  $45^\circ$  zur Fläche  $EFGH$  geneigt ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Auf der Kante  $\overline{GK_t}$  liegt ein Punkt  $Q$ , in dem eine Kabelbefestigung angebracht werden soll.

Vom Punkt  $H$  aus soll jeweils linear ein Kabel an der Dachinnenseite über den Punkt  $Q$  zum

Diagonalschnittpunkt  $L\left(1 \mid 1 \mid \frac{13}{3}\right)$  der Dachfläche  $FGK_tI_t$  geführt werden.

Bestimmen Sie Näherungswerte für die Koordinaten des Punktes  $Q$ , so dass die Länge des Kabels minimal ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

**Teil C: Stochastik**

Steckspiele bieten eine gute Möglichkeit, die Feinmotorik von Kleinkindern zu entwickeln.

a) Steckspiele werden überwiegend importiert. Der Transport erfolgt mit Containerschiffen. In einem Container mit 1 000 Steckspielen erwartet man aus Erfahrung genau zwei Spiele mit Transportschaden.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Spiele eines zufällig ausgewählten Containers ohne Transportschaden sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Die Steckspiele eines Spielwarengroßhändlers stammen entweder aus inländischer Produktion oder werden importiert.

Kontrollen ergaben, dass 75 % der importierten Spiele nicht den geforderten Standards entsprechen, bei den inländischen sind es nur 1 %.

- b) Der Importanteil beträgt 95 %.  
 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Steckspiel, das nicht den geforderten Standards entspricht, importiert wurde. Erreichbare BE-Anzahl: 2
- c) Der Großhändler will den Importanteil bei den Steckspielen so verändern, dass höchstens noch 10 % der Steckspiele nicht den geforderten Standards entsprechen.  
 Berechnen Sie den maximalen Importanteil der Spiele für diese Bedingung. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Ein bestimmtes Steckspiel für Kleinkinder besteht aus einem Behälter mit sechs verschiedenen Öffnungen und aus sechs verschiedenen geometrischen Körpern, wobei sich jeder dieser Körper durch genau eine der Öffnungen in den Behälter stecken lässt.

Für die sechs einfarbigen geometrischen Körper werden fünf Farben so verwendet, dass genau zwei Körper gleichfarbig sind und alle anderen unterschiedliche Farben haben.

- d) Ein Kleinkind nimmt zufällig aus einem solchen Steckspiel nacheinander alle Körper und steckt sie in die entsprechenden Öffnungen.  
 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Kind die beiden gleichfarbigen Körper unmittelbar nacheinander einsteckt. Erreichbare BE-Anzahl: 2
- e) Geben Sie die Anzahl der möglichen Farbgestaltungen der geometrischen Körper für ein solches Spiel an. Erreichbare BE-Anzahl: 1

### Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

#### **Aufgabe D 1: Analysis**

An einem Sommertag entnimmt Sophia dem Kühlschrank einen Krug mit Orangensaft.

- a) Der Erwärmungsvorgang des Saftes kann durch die Gleichung  $\vartheta(t) = a - b e^{-ct}$  beschrieben werden.

Dabei bedeuten:

$\vartheta$  ... Temperatur des Orangensaftes in °C,

$t$  ... Erwärmungszeit in Minuten,

$e$  ... Euler'sche Zahl,

$a, b, c$  ... physikalische Konstanten in den jeweils erforderlichen Einheiten.

Der Saft erwärmt sich bei einer Zimmertemperatur von 25,0 °C innerhalb der ersten 20 Minuten von 10,0 °C auf 16,0 °C. Während des Erwärmungsprozesses kommt die Temperatur des Saftes nach genügend langer Zeit der Zimmertemperatur beliebig nahe.

Ermitteln Sie unter den gegebenen Bedingungen, nach wie vielen Minuten der Saft eine Temperatur von 23,0 °C erreicht hat. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Der 18,0 cm hohe Krug hat die Form eines Rotationskörpers. Die Wandstärke des Kruges sei vernachlässigbar.

Sophia ermittelt beginnend vom Boden mit einem Faden in bestimmten Höhen den Umfang des Kruges. Sie erhält folgende Werte:

Höhe in mm	0	60	120	180
Umfang in mm	302	346	195	302

- b) Die Randkurve des Kruges wird durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades beschrieben.  
 Bestimmen Sie, wie viele Liter Flüssigkeit näherungsweise in den Krug passen.  
 Wird der Krug mit einem Liter Flüssigkeit gefüllt, soll der Flüssigkeitsstand einen Eichstrich erreichen.  
 Ermitteln Sie, in welcher Höhe Sophia diesen Eichstrich anbringen muss. Erreichbare BE-Anzahl: 6

**Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra**

Für ein Schulfest wird eine Zielscheibe hergestellt.

Auf eine quadratische Grundplatte mit dem Flächeninhalt  $1 \text{ m}^2$  wird dazu ein Blumenmotiv folgendermaßen aufgezeichnet: Auf die Grundplatte wird ein Koordinatensystem so gelegt, dass der Koordinatenursprung im Mittelpunkt der Platte liegt und die Koordinatenachsen parallel zu den Quadratseiten verlaufen (1 Einheit entspricht 1 dm).

In diesem Koordinatensystem sind die Funktionen  $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{1+x^2}}$  und  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$  mit

$(x \in \mathbb{R}, -5 < x < 5)$  gegeben.

Spiegelt man die Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  an der Abszissenachse erhält man die Graphen der Funktionen  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$ .

Die Graphen der Funktionen  $f, g, \tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  schließen ein Blumenmotiv mit vier zueinander kongruenten Blütenblättern ein.

a) Geben Sie eine Gleichung der Funktion  $\tilde{f}$  an.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

Es wird davon ausgegangen, dass bei jedem Schuss die Zielscheibe getroffen wird und alle Punkte der Zielscheibe mit gleicher Wahrscheinlichkeit getroffen werden.

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Teilfläche getroffen wird, ist gleich dem Quotienten aus dem Inhalt dieser Teilfläche und dem Inhalt der Gesamtfläche.

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Schießen auf die Zielscheibe das Blumenmotiv getroffen wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Eines der Blütenblätter bekommt einen roten Farbanstrich, die anderen einen gelben. Der Hintergrund wird blau gefärbt.

c) Bei einem Spiel wird für einen Einsatz von 1 € höchstens zweimal auf die Zielscheibe geschossen, wobei wieder davon ausgegangen wird, dass diese bei jedem Schuss getroffen wird.

Trifft der Spieler den roten Bereich, erhält er 2 € ausgezahlt und das Spiel endet.

Trifft der Spieler den gelben Bereich, verliert er seinen Einsatz und das Spiel endet.

Trifft der Spieler im ersten Schuss den blauen Bereich, kann er das Spiel unter Rückzahlung des Einsatzes beenden oder ein zweites Mal kostenlos schießen. Trifft er dann erneut den blauen

Bereich, dann erhält er seinen Einsatz von 1 € zurückgezahlt. Trifft er im zweiten Schuss den gelben

oder roten Bereich, dann gelten die oben stehenden Regeln des Spiels.

Geben Sie an, welche Entscheidung beim Treffen des blauen Bereichs im ersten Schuss günstiger

für den Spieler ist.

Begründen Sie Ihre Aussage.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Für das Schulfest im kommenden Jahr soll die Zielscheibe so verändert werden, dass ins Innere der ursprünglichen Scheibe ein Quadrat einbeschrieben wird, dessen Eckpunkte die Seitenmitten des Ausgangsquadrates sind. Die Ecken des Ausgangsquadrates werden abgeschnitten.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei genau einem Schuss die rot gefärbte Fläche der neuen Zielscheibe getroffen wird.

Bei einem neuen Spiel wird bei einem Einsatz von 1 € nur genau ein Schuss auf die neue Zielscheibe abgegeben.

Legen Sie für dieses Spiel Auszahlungsregeln so fest, dass das Spiel fair ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

# Lösungsvorschläge

## Teil A

- a) Nullstellen:  $x_{N1} = 0$ ;  $x_{N2} = 2k$   
 lokale Extremstellen: CAS:  $\text{solve}(\text{dif}(f(x, k), x) = 0, x)$   
 Art der Extrema: z. B. CAS:  $\text{dif}(f(x, k), x, 2) |_{x=2k/3} \rightarrow -2k \Rightarrow \text{Maximum}$   
 Koordinaten der lokalen Extrempunkte:  $P_{\text{Max}}\left(\frac{2}{3}k \left| \frac{16}{27}k^3 \right.\right)$ ;  $P_{\text{Min}}(2 \cdot k | 0)$   
 je eine Gleichung der Funktionen g und h:  $y_{\text{Min}} = 0$ ;  $y_{\text{Max}} = 2x^3$  (2 BE)

- b) Nachweis (2 BE)  
 z. B.:  $x_{aM} = 4k/3$  und  $\text{dif}(f(x, k), x, 2) |_{x=4k/3} \rightarrow 0$  und  $\text{dif}(f(x, k), x, 3) \rightarrow 3 \Rightarrow \text{Wendestelle}$   
 Wert für a:  $a = 4k/3$   
 Wert für b:  $b = -8k^3/27 = -f_k(4k/3)$

- c) Ansatz für Gesamtfläche:  $\int_0^6 f_3(x) dx = 54$  CAS:  $\text{int}(f(x, 3), x, 0, 2 \cdot 3)$   
 Inhalt der Gesamtfläche:  $A = 54$   
 Inhalt einer Teilfläche: CAS:  $\text{int}(f(x, 3), x, 0, 2) \rightarrow 22$   
 $\Rightarrow$  bleiben noch 5 FE für das markierte Dreieck

Ansatz für Koordinaten des Schnittpunktes:  $5 = \frac{b \cdot 16}{2}$ ;  $x = 2 + b$

Koordinaten des Schnittpunktes:  $P(21/8 | 0)$

- d) Nachweis (3 BE):  $q(0) = 0$ ;  $q(2) = f_3(2)$ ;  $q'(2) = 0$   
 Zielfunktion (2 BE):  $A(4 | 0) \Rightarrow d^2(x) = (x - 4)^2 + (f_3(x) - 0)^2$   
 GTR:  $f_{\text{Min}}((x - 4)^2 + y_1^2, x, 4, 6) \rightarrow 5.5290$ ;  $f_3(5.5290) \rightarrow .6133$   
 Koordinaten von B:  $B(5.53 | .61)$

- e) vollständiger Nachweis (4 BE)  
 z. B. notwendige Bedingung für Wendestelle  
 Schlussfolgerung zum Koeffizienten des quadratischen Gliedes  
 begründete Aussage zum Absolutglied  
 Schlussfolgerung zur Symmetrie

z. B.:  
 Vor.:  $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  mit I:  $h''(0) = 0$ ; I\*:  $h'''(0) \neq 0$  und II:  $h(0) = 0$

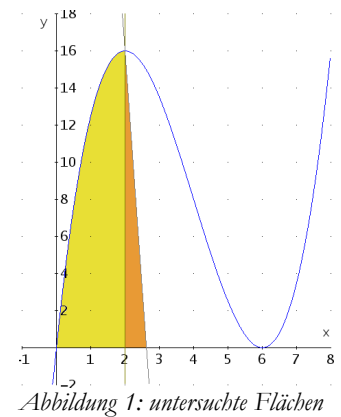
Beh.:  $h(-x) = -h(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$

Beweis:

$h''(x) = 6ax + 2b$  und aus I folgt  $b = 0$ ;

aus II folgt  $d = 0$ , folglich ist  $h(-x) = a(-x)^3 + c(-x) = -h(x)$

w.z.B.w.



## Teil A – ohne CAS

- a) Ansatz für Nullstellen:  $f_k(x_0) = x_0 \left( \frac{1}{2} x_0^2 - 2k x_0 + 2k^2 \right) = 0$

Nullstellen: wie oben

erste Ableitungsfunktion:  $f'_k(x) = \frac{3}{2} x^2 - 4k x + 2k^2$ ;  $f''_k(x) = 3x - 4k$

Nachweis der lokalen Extremstellen:  $f'_k(x_E) = 0$

Nachweis für Ordinaten der lokalen Extrempunkte:  $y_E = f_k(x_E)$

Nachweis der Art der Extreme:  $f''_k(x_E) \neq 0$

- b) Koordinaten des Wendepunktes: siehe oben

**Teil B**

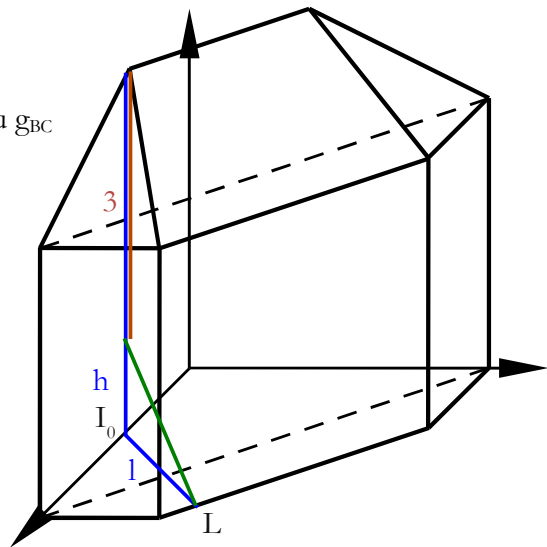
- a) Ansatz für eine Gleichung der Ebene  $\epsilon_1$ :  
 eine Gleichung der Ebene  $\epsilon_1$ :  $x + y = 3$  ( $z \in \mathbb{R}$ )  
 Nachweis:  $1 + 0 \neq 3$   
 eine Gleichung von  $\epsilon_2$ : z. B.  $x - y = 0$  ( $z \in \mathbb{R}$ )

- b) vollständige Begründung (2 BE):  $\vec{EF} \cdot \vec{FI}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ t-3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$  Behauptung

Ansatz für Flächeninhalt:  $A(t) = \frac{1}{2} |\vec{EF}| \cdot |\vec{FI}_t|$

Flächeninhalt:  $A = \frac{1}{2} \sqrt{t^2 - 6t + 13}$

- c) Ansatz für Höhe h (2 BE): z. B. vgl. mit Zeichnung  
 Lotfußpunkt mit GTR – prgmGeometri | Abstand  $I_0$  zu  $g_{BC}$   
 $\rightarrow L(2.5 \mid 1.5)$ ,  $\frac{I_0 L}{L} = 1 = 1.5 \cdot \sqrt{2}$  und  $h = 1 \approx 2.1213$   
 (gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck;  $45^\circ$ )  
 Höhe h:  $h \approx 5.12$  m



- d) Ansatz für Gleichung zur Berechnung der Kabellänge:

$d(s) = |\vec{HQ}| + |\vec{QL}|$  mit

I:  $\vec{OQ} = \vec{OG} + s \cdot \vec{GK}_5$  und  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < s < 1$  folgt

$d(s) = |\vec{HG} + s \cdot \vec{GK}_5| + |\vec{GL} - s \cdot \vec{GK}_5|$ ,

$d(s) = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4/3 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$  und

$d(s) = \sqrt{9s^2 - 2s + 1} + \sqrt{81s^2 - 120s + 52} / 3$

GTR: fMin(...  $s = 0.4304$  und  $s$  in I: Q(0.5696 | 2.1392 | 3.8608)

Gleichung zur Berechnung der Kabellänge

Ansatz für Koordinaten des Punktes Q

Koordinaten des Punktes Q: Q(.57 | 2.14 | 3.86)

**Teil C**

- a) Ansatz für Wahrscheinlichkeit:  $p_{\text{defekt}} = 1/500$   
 Wahrscheinlichkeit:  $P(X=0) \approx .1351 = (499/500)^{1000}$
- b) Ansatz für die Wahrscheinlichkeit:  
 Satz von Bayes mit Zufallsgrößen: X – entspricht Standard und Y – Produktion inländisch  
 geg.:  $P_{Y=I}(X=\bar{I}) = .75$  ;  $P_{Y=I}(X=I) = .01$  ;  $P(Y=I) = .95$   
 ges.:  $P_{X=\bar{I}}(Y=I)$   
 Wahrscheinlichkeit: 0,9993
- c) Ansatz:  $p \cdot .75 + (1 - p) \cdot .01 \leq .1 \Rightarrow p \leq 9/74$  und p ist der Anteil importierter Wahre  
 funktionaler Zusammenhang  
 maximaler Anteil der importierten Spiele: 12,16 %
- d) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: Anordnung von 6 Elementen auf 6 Positionen: 6! Möglichkeiten;  
 gleichfarbige Kugeln können auf Position 1,2 oder 2,3 usw. liegen  $\rightarrow$  10 Möglichkeiten  
 (Vertauschung beachten); 4! Möglichkeiten die restlichen Kugeln anzuordnen  $\Rightarrow (2 \cdot 5 \cdot 4!)/6!$   
 Wahrscheinlichkeit:  $p = 1/3$
- e) Anzahl der Farbgestaltungen:  $1\ 800 = 5$  Farben  $\cdot 6!/2$

**Teil D1**

a) Ansätze für Werte der Konstanten a, b und c

I:  $\vartheta(0) = a - b e^0 = 10$

II:  $\vartheta(20) = a - b e^{-c \cdot 20} = 16$

III:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta(t) = a = 25$

Werte der Konstanten a, b und c:  $a = 25.0^\circ\text{C}$ ,  $b = 15^\circ\text{C}$ ,  $c = -\ln(.6)/20 \text{ min}$

Ansatz für Zeit t:  $23 = 25 - 15 e^{\frac{\ln .6}{20} t}$

Zeit t:  $t \approx 79 \text{ min}$

**Hinweis:** In Abhängigkeit von der gewählten Modellierung können die Ergebnisse im Aufgabenteil b) von den angegebenen Werten geringfügig abweichen.

b) Ansatz für Gleichung der Randkurve:

Höhe in mm	0	60	120	180	x bzw. L <sub>1</sub>
Umfang in mm	302	346	195	302	
Radius in mm	48,06	55,07	31,04	48,06	y bzw. L <sub>2</sub>

eine Gleichung der Randkurve: GTR/CAS

QuadReg  $\rightarrow 5.562499590 \cdot 10^{(-5)} x^3 - 0.01432399963 x^2 + 0.776 x + 48.06 := f(x)$

Ansatz für Füllvolumen V:  $\pi \cdot \int_0^{180} f^2(x) dx \approx 1.18234 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$

Füllvolumen V:  $V \approx 1.18 \text{ l}$

Ansatz für Höhe h des Eichstrichs:  $\pi \cdot \int_0^h f^2(x) dx = 10^6 \rightarrow h = 130.6402$

c) Höhe h des Eichstrichs:  $h \approx 131 \text{ mm}$

**Teil D2**

a) eine Gleichung von  $\tilde{f} = -f(x)$

b) Ansatz für den Flächeninhalt (z. B. Schnittstelle im I. Quadranten:  $x_s = \sqrt{24}$ )

GTR/CAS:  $\int (\text{ABS}(f(x) - g(x)), x, 0, 2\sqrt{6}) \rightarrow 4 \cdot \text{Ans}(1)/100 \approx 0.64^1$

Flächeninhalt eines Blütenblattes:  $A_1 = 16 \text{ dm}^2$

Wahrscheinlichkeit für Treffer: .64

c) Entscheidung: Er sollte nach dem ersten Schuss das Spiel beenden.

Begründung (2 BE): Erwartungswert beim 2. Schuss:

$E(X) = p(X=\text{blau}) \cdot 0\text{€} + p(X=\text{rot}) \cdot 1\text{€} + p(X=\text{gelb}) \cdot (-1\text{€}) < 0,$

d. h. erwartungsgemäß Verlust beim zweiten Schuss, denn 3 gelbe Blätter stehen nur einem Roten gegenüber.

d) Inhalt der rot gefärbten Restfläche:  $A \approx 7.56 \text{ dm}^2$

z. B.:  $y = -x + 5$ ; Schnittpunkte mit Graphen von f und g

$A = \int (f(x) - g(x), x, 0, 1.18235) + \int (5 - x - g(x), x, 1.18235, 3.8176)$

Wahrscheinlichkeit:  $P(\text{rot}) \approx .1512$ ;  $P(\text{gelb}) \approx .4536$ ;  $P(\text{blau}) \approx .3952$

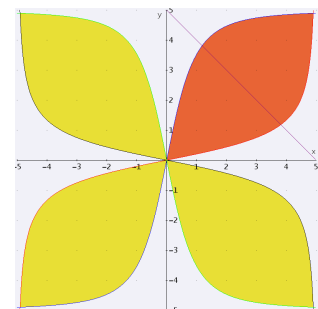
$6\text{€} \cdot .1512 + 0\text{€} \cdot .4536 + \frac{1}{4}\text{€} \cdot .3952 \approx 1\text{€}$

Auszahlungsregeln für ein faires Spiel:

z. B. beim Treffen des roten Bereichs: Auszahlung von 4 €

beim Treffen des gelben Bereichs: keine Auszahlung

beim Treffen des blauen Bereichs: Auszahlung von 1 €



1 Für die Annahme, dass das Blütenblatt ein Ausläufer hat (jenseits von  $2\sqrt{6}$ ), ergibt sich .6404