Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2007, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.
Mit der Einführung eines neuen Lehrplanes gibt es auch wieder relevante „Abiturähnliche Musteraufgaben" unter http://www.sachsen-macht-schule.de/schule/6247.htm.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@gymnasium-delitzsch.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 10.02.08.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 25 BE,
im Teil B 15 BE,
im Teil C 10 BE,
im Teil D 10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“[1]

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
60 BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jedes t ($t \in \mathbb{R}$, $t > 0$) sind die Funktionen f_t durch $f_t(x) = 10 \cdot e^{-t \cdot x} \cdot \sin(t \cdot x)$ $\left(x \in \mathbb{R}, 0 \le x \le \frac{2\pi}{t}\right)$

und g_t durch $g_t(x) = 10t \cdot e^{-t \cdot x} \cdot (\cos(t \cdot x) - \sin(t \cdot x))$ $\left(x \in \mathbb{R}, 0 \le x \le \frac{2\pi}{t}\right)$ gegeben.

a) Geben Sie die Nullstellen der Funktion f_π an.
Geben Sie die Monotonieintervalle der Funktion f_π und die zugehörige Art der Monotonie an.
Geben Sie Näherungswerte für die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen der Funktion f_π an.
Der Graph der Funktion f_π und die Winkelhalbierende des ersten Quadranten schließen eine Fläche

1 Diese werden hier nicht wiedergegeben. Sie enthalten zumeist eine Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Manchmal eine Tabelle zur Summenfunktion der Binomialverteilung. Beides kann durch Verwendung des GTR leicht ersetzt werden. Die Tabellen finden Sie im Inhalt der Online-Ausgabe dieses Textes www.sn.schule.de/~matheabi.

vollständig ein.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Inhalt dieser Fläche. Erreichbare BE-Anzahl: 8

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion g_t die erste Ableitungsfunktion der Funktion f_t ist.
Der Graph der Funktion f_t besitzt genau zwei Extrempunkte.
Zeigen Sie, dass diese Punkte die Koordinaten $E_1\left(\frac{\pi}{4t}\middle|f_t\left(\frac{\pi}{4t}\right)\right)$ und $E_2\left(\frac{5\pi}{4t}\middle|f_t\left(\frac{5\pi}{4t}\right)\right)$ besitzen.
Weisen Sie nach, dass die Ordinaten beider Extrempunkte unabhängig von t sind.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Geben Sie ohne Integration eine Stammfunktion G_t von g_t an, für die gilt: $G_t(0) = 1$.
Der Graph der Funktion g_t und die Abszissenachse begrenzen eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie ohne Verwendung von Näherungswerten den Inhalt dieser Fläche.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

Im Folgenden wird die Funktion f_π mit dem neuen Definitionsbereich $D_{f_\pi}=\{x|x\in\mathbb{R};\ x\geq 0\}$ betrachtet.

d) Vom Punkt P(0 | 1) wird eine Tangente an den Graphen der Funktion f_π gelegt.
Beschreiben Sie ein Vorgehen zur Ermittlung einer Gleichung einer solchen Tangente.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

e) Für jedes k ($k \in \mathbb{N}$) ist der Punkt $W_k\left(\frac{1}{2}+2k\middle|f_\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)\right)$ ein Wendepunkt des Graphen der Funktion f_π.
Ermitteln Sie diejenige Exponentialfunktion h mit $y = h(x) = a \cdot e^{b\,x}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) auf deren Graphen alle Punkte W_k liegen. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte B(5 | 0 | -1), C(3 | 4 | -5), D(-1 | 6 | -1) und S(-2 | -1 | -3) gegeben.

a) Untersuchen Sie die Vektoren $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{BS}$ auf lineare Unabhängigkeit.
Es gibt genau einen Punkt A, so dass die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ ein und denselben Mittelpunkt haben.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Das Viereck ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S.

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass ABCDS eine gerade quadratische Pyramide ist.
Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide.
Geben Sie die Koordinaten eines Punktes S' an, für den die Pyramide ABCDS' ebenfalls das Volumen V hat. Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Auf der Höhe der Pyramide ABCDS gibt es genau einen Punkt Q, der von allen Eckpunkten dieser Pyramide den gleichen Abstand hat.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Q. Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Der Mittelpunkt der Pyramidengrundfläche sei M. Jeder Punkt P auf der Mantelfläche der Pyramide hat vom Punkt M einen Abstand d_p.
Begründen Sie, dass für die Abstände d_p gilt: $\frac{6}{5}\sqrt{5}\leq d_p\leq 6$. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil C: Stochastik

In der Stadthalle einer sächsischen Großstadt werden regelmäßig Veranstaltungen durchgeführt. Aus Sicherheitsgründen stehen genau 525 Plätze zur Verfügung.

a) Eine Tanzschule veranstaltet in dieser Stadthalle regelmäßig öffentliche Bälle. Für den abendlichen Ball dieser Tanzschule werden genau 525 Karten angeboten. Erfahrungsgemäß wird eine Karte mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % verkauft.
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der tatsächlich verkauften Ballkarten.
Eine Karte hat einen Preis von 15 €. Für den Ball fallen Gesamtkosten von 4650 € an.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens die Gesamtkosten erwirtschaftet werden. Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Für die monatlich durchgeführten Rock-Konzerte in dieser Stadthalle ist bekannt, dass aus verschiedenen Gründen 5% der Kartenbesitzer ihre Karten verfallen lassen.
Ermitteln Sie, wie viele Karten höchstens verkauft werden können, damit jeder Besucher des Rock-Konzertes mit 99%iger Sicherheit einen Platz bekommt. Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Zum Schuljubiläum eines Gymnasiums der Großstadt findet in der Stadthalle eine Festveranstaltung statt. An dieser Festveranstaltung nehmen 40% aller Schüler der Schule teil.
Der Schülerrat des Gymnasiums verkauft anlässlich dieses Jubiläums eine Broschüre, deren Erlös Schülerprojekte finanziell unterstützen soll.
Ein Schüler, der an der Festveranstaltung teilnimmt, kauft mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,75 eine solche Broschüre. Ein Schüler, der diese Festveranstaltung nicht besucht, erwirbt diese Broschüre mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Schüler, der diese Broschüre kauft, an der Festveranstaltung teilnimmt. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D1: Analysis

Die nebenstehende Skizze zeigt den Querschnitt eines Schmelztiegels aus Porzellan (Dichte: $\varrho = 2{,}5\ \frac{g}{cm^3}$) in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 1 Millimeter).
Die Querschnittsfläche wird durch zwei zur Ordinatenachse symmetrische quadratische Parabeln und zwei Strecken begrenzt. Der Schmelztiegel entsteht durch Rotation dieser Fläche um die Ordinatenachse.

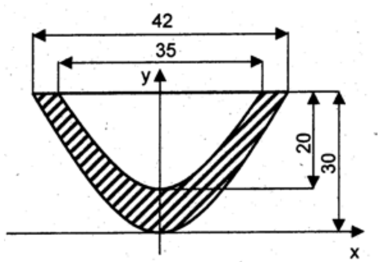

Abbildung 1: Skizze (nicht maßstäblich)

a) Ermitteln Sie den Inhalt der Querschnittsfläche dieses Schmelztiegels. Erreichbare BE- Anzahl: 4

b) Berechnen Sie, bis zu welcher Höhe der Schmelztiegel mit einer geschmolzenen Legierung ($\varrho = 13{,}5\ \frac{g}{cm^3}$) gefüllt ist, wenn seine Gesamtmasse (Schmelztiegel mit Legierung) 50,9 g beträgt.
Erreichbare BE- Anzahl: 6

Aufgabe D2: Geometrie / Algebra

Eine Bundesstraße wird von einer Staatsstraße gekreuzt. Im Zuge des Neubaus der Staatsstraße soll eine Brücke errichtet werden, welche diese über die 20,0 m breite Bundesstraße und zwei jeweils beidseitig angeordnete 10,0 m breite Randstreifen führt.

a) In einer ersten Planungsvariante soll die Fahrbahn auf der Brücke einen parabelförmigen Verlauf haben und tangential in zwei symmetrisch angeordnete und jeweils 3,9 m hohe Rampen konstanter Neigung münden (siehe Abb. 2).

`2(fnInt(Y3,X,0,30)-fnInt(Y4,X,10,30))`
Inhalt der Querschnittsfläche: A ≈ 370 mm²

b) Ansatz für Volumen des Schmelztiegels: $V=\pi\cdot\left(\int_0^{30}\left(p_1^{-1}(x)\right)^2dx-\int_{10}^{30}\left(p_2^{-1}(x)\right)^2dx\right)$

GTR: `π(fnInt(Y3²,X,0,30)-fnInt(Y4²,X,10,30))`

Volumen des Schmelztiegels: $V=\frac{7105}{2}\pi$ in mm³

Masse des Schmelztiegels: m = 27,9g

Ansatz für Höhe (2 BE): restliche Masse m ≈ 23 g ≙ V ≈ 1704 mm³ ⇒ $542=\int_{10}^{H}\left(p_2^{-1}(x)\right)^2dx$

GTR: `solve(fnInt(Y4²,X,10,H)-542,H,20)` → 18,4
Höhe: h ≈ 8 mm (bezogen auf die Höhe der Flüssigkeit im Tiegel)

Teil D2

a) Vorbetrachtungen:
die Rampenlänge e entspicht einem Anstieg von $m_e = 0{,}06$
Koordinatenursprung in Fahrbahnmitte
Fixpunkte $P_1(20 \mid 3{,}9)$, $P_2(10 \mid y_{min} \geq 4{,}5)$
Ansatz für quadratische Funktion: y = ax² + b
eine Gleichung einer quadratischen Funktion:
y = p(x) = -0.002x² + 4.7, wobei das die am flachsten verlaufende Fahrbahn ist.
Nachweis: p'(20) ≥ 0,08

Ansatz für maximale Länge einer Rampe (2 BE): $\tan(.08)=\frac{3.9}{e_{max}}$

`solve(tan(.08)-3.9/X,X,50)`
maximale Lange einer Rampe: e_{max} ≈ 48,7 m

b) Ansatz für eine Gleichung des Kreises:
Kreismittelpunkt auf y-Achse, Radius 29 ⇒ k: $x^2 + (y - y_M)^2 = 29^2$
muss Punkt (20|4.5) enthalten ⇒ $y_M = -16.5$
eine Gleichung des Kreises
Ansatz für Länge der kürzesten Verbindungsstücke:

Berechne Höhe des Kreises über der Fahrbahn für $x=\frac{2}{3}\cdot 20$ ⇒ y = 9.253

Länge der kürzesten Verbindungsstücke: l ≈ 4,8 m

c) Ansatz für Koordinaten des Punktes Q (2 BE): Da die Grundfläche ein Quadrat ist, reicht es einen Punkt zu suchen für den gilt: $\vec{OQ}=\vec{OS}+t\cdot\vec{n}_E$ und z. B. $|\vec{BQ}|=|\vec{SQ}| \Rightarrow t=\frac{3}{2}$
Koordinaten des Punktes Q: Q(1 | 2 | -3/2)

d) Begründung für obere Grenze: die Spitze hat eine Entfernung von 6 und die Eckpunkte $3\sqrt{2}$
Begründung für untere Grenze (2 BE): Der Abstand zu einer Mantelfläche ist z. B. mit GTR: prgmGeometri - Abstände Punkt-Ebene → $d(M,E_{BCS}) \approx 2.6833$ (Lotfußpunkt L(2.8 | 1.4 | -3)) zu berechnen. Dieser Abstand entspricht dem angegebenen, aufgrund der Symmetrie ist es der Minimale.

Teil C

a) Verteilung der Zufallsgröße: Binomialverteilung mit $X \sim b_{525;0,6}(X=k)$
Ansatz für Wahrscheinlichkeit: Es müssen mindestens 310 Karten verkauft werden.
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses P: $P(X \geq 310) \approx 0{,}6887 = 1 - B_{525;0,6}(309)$ (B - kumulierte BV)
(Genauigkeit des Ergebnisses hilfsmittelabhängig:
z. B. GTR TI-83 `1-binomcdf(525,.6,309)` → 0.68870)

b) Charakterisierung der Zufallsgröße:
p = .95 – Wahrscheinlichkeit, dass Karte in Anspruch genommen wird;
n – Anzahl der verkauften Karten;
Z – Anzahl der „Kommenden"; $P(Z=k) = b_{n,p}(k)$
Ansatz für Anzahl n der Karten, die verkauft werden können (2 BE):
$P(Z \leq 525) < 99\%$ bzw. $B_{n,.95}(525) < .99$
weiter mit GTR: ab TI-83
`binomcdf(540,.95,525)` → 0.9961359566
`binomcdf(541,.95,525)` → 0.9925766866
`binomcdf(542,.95,525)` → 0.9865592957
oder näherungsweise mit Standardnormalverteilung:
$\Phi\left(\frac{525{,}5-0{,}95n}{\sqrt{0{,}95\cdot 0{,}05n}}\right)\leq 0{,}99$ und nun gibt es verschiedene Varianten, mit GTR
`solve(fnInt(1/(2π√(.95*.05*n))*e^-.5((X-.95n)^2/(.95*.05*n)),X,0,525.5)-.99,n,530)` → n = 540.7472
Ergebnis: $n \leq 541$ (Genauigkeit des Ergebnisses hilfsmittelabhängig)

c) Ansatz für Wahrscheinlichkeit (2 BE):
t – Wahrscheinlichkeit, dass Schüler teilnimmt; k – Wahrscheinlichkeit, dass Schüler kauft
Gegeben ist: $P(t)=.4$; $P_t(k)=.75$; $P_{\bar{t}}(k)=.6$.
Gesucht ist: $P_k(t)$
P(k) = .66
Wahrscheinlichkeit: $p \approx 0{,}4545 = \frac{P(t)\cdot P_t(k)}{P(k)}$

Teil D1

a) Gleichungen der Parabeln (2 BE): $p_1(x)=\frac{10}{147}x^2$ und $p_2(x)=\frac{16}{245}x^2+10$

Ansatz für Inhalt der Querschnittsfläche: z. B. Berechne inverse Parabeln $p_1^{-1}(x)=\pm\sqrt{\frac{147}{10}x}$,
$p_2^{-1}(x)=\pm\sqrt{\frac{245}{16}(x-10)}$ und $\frac{A}{2}=\int_0^{30} p_1^{-1}(x)\,dx-\int_{10}^{30} p_2^{-1}(x)\,dx \Rightarrow A=\frac{1120}{3}$
z. B. mit GTR: `Y3` = p_1^{-1} und `Y4` = p_2^{-1}

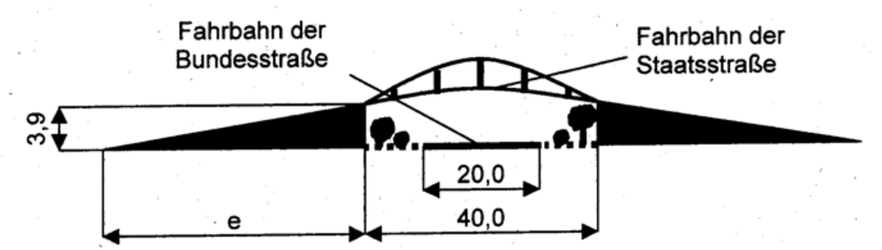

Abbildung 2: (nicht maßstäblich, alle Angaben in Meter)

An jeder Stelle der Bundesstraße muss eine Mindestdurchfahrtshöhe von 4,5 m unter der Brücke gewährleistet sein.
Zeigen Sie, dass unter den gegebenen Bedingungen bei einer geforderten Rampenlänge von e = 65,0 m die Beschreibung der Fahrbahn der Staatsstraße durch eine quadratische Funktion nicht möglich ist.
Ermitteln Sie, wie lang eine Rampe unter den gegebenen Forderungen höchstens sein kann, um die Brückenfahrbahn mit einer quadratischen Funktion zu beschreiben. Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Eine zweite Planungsvariante sieht vor, dass die Konstruktion der Brücke aus einem waagerechten Träger mit der Fahrbahn, der auf 4,5 m hohen Rampen aufliegt, und einem Kreisbogen mit einem Radius von 29,0 m als Stützelement besteht. Zwischen dem Träger und dem Stützelement sind in regelmäßigen Abständen fünf senkrechte Verbindungsstücke eingebaut (siehe Abb. 3).

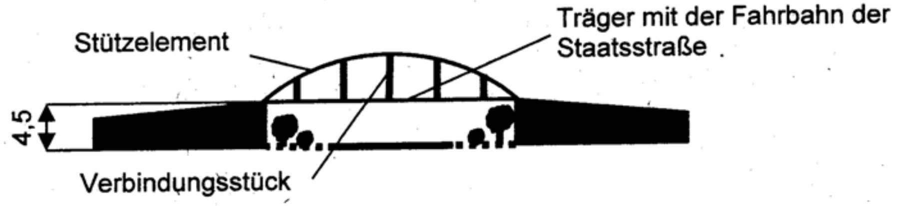

Abbildung 3: (nicht maßstäblich, alle Angaben in Meter)

Berechnen Sie die Länge der kürzesten Verbindungsstücke. Erreichbare BE - Anzahl: 4

Lösungsvorschläge

Teil A

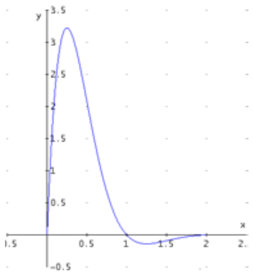

Abbildung 4: $f_\pi(x)$

a) Nullstellen: $x_{N1} = 0$, $x_{N2} = 1$, $x_{N3} = 2$
wegen $e^{-\pi x} \neq 0 \Rightarrow \sin(\pi x) = 0 \Leftrightarrow \pi x = k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq x \leq 2$)
Monotonieintervalle und Art der Monotonie (2 BE)
die Extremstellen sind bei ¼ und 1¼ (siehe Teilaufgabe b) oder
GTR: z. B. `fMax(Y1,X,0,1)` bzw. `fMin(Y1,X,1,2)`
mit `Y1` = $f_\pi(x)$
Monotonieintervalle:
streng monoton steigend für $0 \leq x \leq ¼$ und $1¼ \leq x \leq 2$
streng monoton fallend für $¼ \leq x \leq 1¼$
Wendestellen: z. B. GTR (zweimaliges Ableiten und Nullstellen)
`solve(nDerive(nDerive(Y1,X,X),X,X),.25,1.25)`
→ .5
oder `fMax(nDerive(Y1,X,X),1.25,2)` → 1.5
Anmerkung: die Kombination `fMax` bzw. `fMin` führt nur dann zum Ziel, wenn man sich gemerkt hat, das der Wechsel von Links- zur Rechtskurve ein Maximum in der ersten Ableitung bedingt. Vergleiche mit Abbildung 5.

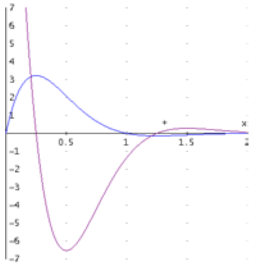

Abbildung 5: $f_\pi(x)$ und $f_\pi'(x) = g_\pi(x)$

Koordinaten der Wendepunkte: $W_1(0{,}50 \mid 2{,}08)$, $W_2(1{,}50 \mid -0{,}09)$
Ansatz für Flächeninhalt:
Schnittstelle: z. B. `solve(Y1-X,X,.5,1)` → 0.73497
Fläche: `fnInt(Y1-X,X,0,Ans)` → 1.3109
Flächeninhalt: $A \approx 1{,}31$

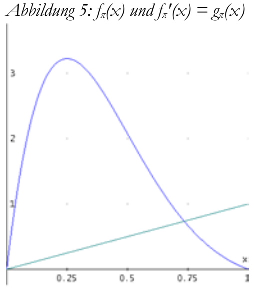

Abbildung 6: $f_\pi(x)$ und $y = x$

b) Ansatz für erste Ableitung: Produktregel
Nachweis für Ableitungsfunktion
Nachweis für Extremstellen (2 BE):
$g_t\left(\frac{\pi}{4t}\right)=0$ bzw. $g_t\left(\frac{5\pi}{4t}\right)=0$
Anmerkung: Entsprechend der Aufgabenstellung *„besitzt genau zwei Extrema“* wird es wohl ausreichen, die notwendige Bedingung für lokale Extrema, die ja in unserem Fall auch die globalen Extrema sind, nachzuweisen. Über Extremstellen am Rand des Definitionsbereichs scheint man sich keine Gedanken machen zu müssen. Wer trotzdem die zweite Ableitung ins Spiel bringen möchte
$g_t'(x)=-20t^2e^{-tx}\cos(tx)$ wird an diesen Stellen nicht Null.
Nachweis der Unabhängigkeit von t (2 BE):
$f_t\left(\frac{\pi}{4t}\right)=5\cdot\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}}$ bzw. $f_t\left(\frac{5\pi}{4t}\right)=-5\cdot\sqrt{2}\,e^{-\frac{5\pi}{4}}$ ist, wie man leicht sieht, unabhängig von t

c) eine Gleichung der Stammfunktion: z. B. $G_t(x) = f_t(x) + 1$
Ansatz für Flächeninhalt (2 BE): siehe Abbildung 5 - wegen $f_t(x) = G_t(x)$ gilt: $A=-f_t(x)\Big|_{\frac{\pi}{4t}}^{\frac{5\pi}{4t}}$
Flächeninhalt: $A=5\cdot\sqrt{2}\left(e^{-\frac{5}{4}\pi}+e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$

d) vollständige Beschreibung (4 BE)
Variante I: unabhängig von der Funktion und dem gegebenen Punkt
Es sei x_S eine Stelle des Definitionsbereiches der Funktion. Eine beliebige Tangente t hat dann die

Form $y = mx + n$ mit $m = f_\pi'(x_S)$ und $n = f_\pi(x_S) - f_\pi'(x_S) \cdot x_S$. Somit ergibt sich für eine beliebige Tangente an den Graphen der Funktion: $y = f_\pi'(x_S) \cdot x + f_\pi(x_S) - f_\pi'(x_S) \cdot x_S$ oder ein wenig umgeformt t: $y = t(x_S) = f_\pi'(x_S) \cdot (x - x_S) + f_\pi(x_S)$. Da die gesuchte(n) Tangente(n) durch P verlaufen sollen, muss außerdem $1 = f_\pi'(x_S) \cdot (0 - x_S) + f_\pi(x_S)$ erfüllt sein. Diese Gleichung hängt nur noch von x_S ab. Findet man die i ($i \in \mathbb{N}$) Lösungen x_{Si} der Gleichungen, erhält man alle Tangenten $t(x_{Si})$.
Variante II:
Aufgrund der besonderen Lage des Punktes P gilt für die Tangente $y = f_\pi'(x_S) \cdot x + 1$. Somit ist die Gleichung $f_\pi(x_S) = f_\pi'(x_S) \cdot x_S + 1$ nach x_S zu lösen.
Es gibt zwei Lösungen[2]:
$x_{S1} \approx 0.11514$ und t_1: $12.7213 \cdot x + 1$
$x_{S2} \approx 1.04408$ und t_2: $-1.0075 \cdot x + 1$

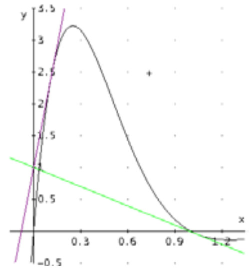

Abbildung 7: $f_\pi(x)$ mit zwei der gesuchten Tangenten

e) Funktionswert des Wendepunktes: $W_k\left(\underbrace{\frac{1}{2}+2k}_{x}\,\middle|\,\underbrace{10\cdot e^{-\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)}}_{y}\right)$
Ansatz für Gleichung der Funktion h (2 BE[3])
eine[4] Gleichung der Funktion h: $h(x) = 10 \cdot e^{-\pi x}$

Teil B

a) Untersuchung: z. B. $S \notin E_{BCD}$ mit GTR: prgmGeometri - Abstände Punkt-Ebene → $d(S,E_{BCD}) = 6$
mit E_{BCD}: $2 \cdot x + 2 \cdot y + z = 9$ und Ebenennormale $\vec{n}_E=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$
Schlussfolgerung: linear unabhängig[5]
Mittelpunkt der Strecke $\overline{BD}$: $\overrightarrow{M_{BD}}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ oder
Es liegt ein Parallelogramm vor: $\vec{OA}=\vec{OB}+\vec{CD}$
Koordinaten des Punktes A: $A(1 \mid 2 \mid 3)$

b) Nachweis für quadratische Pyramide: Da ABCD als Parallelogramm berechnet wurde, reicht es nun zu zeigen, dass die Diagonalen senkrecht stehen: $\vec{AC}\cdot\vec{BD}=0$
Nachweis für gerade Pyramide: genau dann gerade, wenn gilt: $\overrightarrow{M_{BD}S}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\-2\end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=k\cdot\vec{n}_E$
Ansatz für Volumen der Pyramide: $A_{Quadrat} = 36$; $h_{Pyramide} = 6$ (siehe Teilaufgabe a))
Volumen der Pyramide: $V = 72$
Koordinaten eines Punktes S': z. B. $S'(6 \mid 7 \mid 1)$
Alle Punkte müssen der Form $\frac{2x+2y+z}{3}=\frac{9}{3}\pm 6=3\pm 6$ genügen (normierte Normalenform der beiden Ebenen, die zur Ebene E_{BCD} den Abstand 6 haben).
Einen Punkt erhält man z. B. durch $\vec{OB}+\overrightarrow{M_{BD}S}$.

2 Später wird die Kurve zu flach oder anders formuliert: das Absolutglied der Tangente nähert sich immer mehr Null und erreicht die gewünschte Höhe 1 nicht mehr.
3 Ich persönlich kann nicht erkennen, warum es hier 2 BE geben sollte.
4 Die Formulierung klingt so, als könnte es mehrere Gleichungen geben – vielleicht kann mir ja jemand helfen.
5 Muss auch so sein. Denn schon im folgenden Absatz ergeben die Punkte (A)BCD und S eine Pyramide, also müssen die vier Punkte BCDS den $\mathbb{R}^3$ aufspannen.