Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2005, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@oskar-reime-gymnasium.de) – Mathe-Lehrer.
Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 09.04.06.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
- im Teil A 35 BE,
- im Teil B 25 BE,
- im Teil C 15 BE,
- im Teil D 15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“[1]

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
90 BE	90-86	85-82	81-77	76-73	72-68	67-64	63-59	58-55	54-50	49-46	45-41	40-37	36-31	30-25	24-19	18-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jedes t ($t \in \mathbb{R}$; $t > 0$) ist eine Funktion f_t durch $f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot \ln\left(\frac{1}{t^3} - x^2\right)$ $\left(x \in D_{f_t}\right)$ gegeben.

a) Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_t.
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_t auf Symmetrie.
Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen der Funktion f_t in Abhängigkeit von t.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

1 Diese werden hier nicht wiedergegeben. Sie enthalten zumeist eine Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Manchmal eine Tabelle zur Summenfunktion der Binomialverteilung. Beides kann durch Verwendung des GTR leicht ersetzt werden. Die Tabellen finden Sie im Inhalt der Online-Ausgabe dieses Textes www.sn.schule.de/~matheabi.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art des lokalen Extrempunktes des Graphen der Funktion f_t. Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion ft keine Wendepunkte besitzt. Geben Sie den Wertebereich der Funktion f_t an. Erreichbare BE-Anzahl: 8

Betrachtet wird im Folgenden die Funktion $f_{\frac{1}{e}}$.

c) Der Graph der Funktion $f_{\frac{1}{e}}$ und die Abszissenachse begrenzen eine Fläche vollständig. Durch Rotation dieser Fläche um die Abszissenachse entsteht ein Körper.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für das Volumen dieses Körpers. Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Der Graph einer quadratischen Funktion p hat mit dem Graphen der Funktion $f_{\frac{1}{e}}$ den Extrempunkt und die Schnittpunkte mit der Abszissenachse gemeinsam. Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion p mit der Gleichung $p(x)=-\frac{3e}{e^3-1}x^2+3e$ ($x \in \mathbb{R}$) die beschriebenen Bedingungen erfüllt.
Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten den Inhalt der vom Graphen der Funktion p und der Abszissenachse vollständig eingeschlossenen Fläche. Erreichbare BE-Anzahl: 7

e) Für jedes u ($u \in \mathbb{R}$; $0 < u < \sqrt{e^3-1}$) sind der Koordinatenursprung und die Punkte $P_u\left(u \middle| f_{\frac{1}{e}}(u)\right)$ und $P_{-u}\left(-u \middle| f_{\frac{1}{e}}(-u)\right)$ Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Parameter u, so dass das Verhältnis der Länge der Basis zur Länge eines Schenkels dieses gleichschenkligen Dreiecks 1 : 2 beträgt. Erreichbare BE-Anzahl: 4

f) Auf dem Graphen der Funktion $f_{\frac{1}{e}}$ existiert genau ein Punkt A, für den der Anstieg der Senkrechten zur Tangente an den Graphen der Funktion $f_{\frac{1}{e}}$ im Punkt A den Wert -1 hat.
Ermitteln Sie ohne Verwendung von Näherungswerten die Abszisse des Punktes A.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(0 | 2 | -3) und B(-2 | 6 | 4) sowie für jedes a ($a \in \mathbb{R}$) ein Punkt P_a(2a | -a | a) gegeben.

a) Zeigen Sie, dass alle Punkte Pa auf ein und derselben Geraden g liegen.
Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Punktes P_a' der vom Punkt B den kleinstmöglichen Abstand hat.
Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der x-y-Koordinatenebene.
Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Die Punkte A, B und P_a sind Eckpunkte eines Dreiecks.
Es gibt genau zwei Werte a, für die die Seite $\overline{AB}$ Hypotenuse dieses Dreiecks ist.
Ermitteln Sie die beiden Werte a. Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass für jedes a durch die Punkte A, Bund P_a eindeutig eine Ebene E_a festgelegt wird.
Die Ebene E_a lässt sich durch die Gleichung (11a + 26)x + (16a + 6)y+(-6a + 4)z = 50a beschreiben. Es gibt Werte a, für die die Ebene E_a vom Koordinatenursprung den Abstand $\frac{50}{\sqrt{953}}$ hat.
Ermitteln Sie alle diese Werte a. Erreichbare BE-Anzahl: 8

d) Es existieren genau zwei Werte a, für die der Punkt P_a ein Spiegelpunkt des Punktes B bei Spiegelung an einer durch A verlaufenden Ebene ist.
Berechnen Sie diese Werte a. Erreichbare BE-Anzahl: 6

Teil C: Stochastik

Falk bekommt zum Geburtstag eine Spielesammlung geschenkt, in der sich u. a. genau 6 reguläre, ideale Tetraeder befinden.

Fünf Tetraeder sind vom Typ A (Die vier Begrenzungsflächen sind mit den Zahlen 1,2, 3 bzw. 4 bedruckt.) und ein Tetraeder ist vom Typ B (Genau 2 Begrenzungsflächen sind mit der Zahl 1, genau eine mit der Zahl 2 und genau eine mit der Zahl 3 bedruckt). Es gilt die Zahl als "gewürfelt", die auf der Begrenzungsfläche gedruckt ist, auf der das Tetraeder liegt.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Falk beim achtmaligen "Würfeln" mit einem Tetraeder vom Typ A mindestens viermal die Zahl 1 "würfelt". Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Falk wählt aus den sechs Tetraedern zufällig eines aus und "würfelt" damit zweimal nacheinander die Zahl 1.
Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieses Ereignis eintritt.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit das dabei verwendete Tetraeder vom Typ B ist.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) In seiner Spielesammlung findet Falk eine Anleitung zum Spiel „Hin und Her" für ein Tetraeder vom Typ A. Bei diesem Spiel werden auf einem Blatt Papier die Ziffern 1 bis 4 untereinander geschrieben. Die geworfene Zahl wird durchgestrichen. Ist die Zahl bereits gestrichen, muss sie wieder neu aufgeschrieben werden. Das Spiel ist beendet, wenn alle Zahlen durchgestrichen sind.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel bereits nach viermaligem "Würfeln" beendet ist.
Falk hat nur noch die Augenzahl 2 auf seinem Blatt stehen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er bis zum Spielende nur noch maximal dreimal "würfeln" muss. Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Falk vereinbart mit seiner Schwester Carola folgendes Spiel:
Je ein Tetraeder vom Typ A und B wird geworfen und die jeweilige Zahl festgestellt. Carola gewinnt, wenn beide Zahlen verschieden sind. Sie erhält den Betrag der Differenz dieser Zahlen als Punkte gut geschrieben. Sind dagegen die Zahlen gleich, so erhält Falk n Punkte ($n \in \mathbb{N}$).
Ermitteln Sie den Wert für n, für den das Spiel fair ist. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Wahlaufgabe 1

Max und seine Schwester Maria spielen am Hang hinter dem Haus mit einem Ball. Der Hang kann in einem kartesischen Koordinatensystem näherungsweise durch eine Ebene E mit der Gleichung $10x - 2y + 13z = 10$ beschrieben werden. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

Hinter dem Haus befindet sich in der x-y-Ebene ein kreisförmiger Gartenteich mit einem Durchmesser von 5 Metern und dem Mittelpunkt $M(8 \mid 1 \mid 0)$.

a) Ermitteln Sie die prozentuale Steigung des Hanges bzgl. der x-y-Ebene. Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Maria lässt den Ball vom Punkt $P(-3 \mid 6 \mid z_p)$ ($z_p \in \mathbb{R}$) des Hanges aus der Ruhe losrollen. Der Ball rollt den Hang geradlinig hinab. Es wird angenommen, dass er anschließend mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig in der x-y-Ebene weiter rollt. Untersuchen Sie, ob der Ball bezüglich seiner Bewegungsrichtung in den Gartenteich rollen kann. Erreichbare BE-Anzahl: 6

c) Auf dem Hang befindet sich lotrecht zur x-y-Ebene ein 7,50 m hoher Baum mit dem Fußpunkt $F(-3{,}6 \mid 16 \mid 6)$. Sonnenstrahlen mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ -25 \end{pmatrix}$ erzeugen von diesem Baum auf dem Hang einen Schatten.

Untersuchen Sie, ob der Schatten des Baumes vollständig auf dem Hang liegt.
Der 1,50 m große Max möchte lotrecht vollständig in diesem Schatten stehen.
Ermitteln Sie die Menge aller Punkte des Hanges, in denen er sich dafür aufstellen kann, wenn man sowohl Max als auch den Baum als Strecken betrachtet. Erreichbare BE-Anzahl: 6

Wahlaufgabe 2

In der y-z-Koordinatenebene eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems sind für jedes a ($a \in \mathbb{R}$; $a > 0$) und jedes b ($b \in \mathbb{R}$; $b > 0$) eine Funktion $f_{a;b}$ durch $z = f_{a;b}(y) = -ay^2 + b$ und für jedes c ($c \in \mathbb{R}$; $c > 0$) eine Funktion g_c durch $z = g_c(y) = cy^{-2}$ gegeben.

a) Berechnen Sie alle Werte für a, b und c so, dass sich die zugehörigen Funktionen $f_{a;b}$ und g_c im Schnittpunkt der Geraden $z = y$ und $z = 2$ berühren. Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Die Graphen der Funktionen $f_{½;4}$ und g_8 sowie die Gerade $z = 20$ begrenzen eine Fläche vollständig. Bei Rotation dieser Fläche um die z-Achse entsteht ein Rotationskörper.
Dieser Körper wird durch eine zur x-y-Koordinatenebene parallele Ebene geschnitten. Ein entstehender Teilkörper hat das Volumen von 12π.
Bestimmen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten eine Gleichung einer solchen Ebene in allgemeiner Form. Erreichbare BE-Anzahl: 6

c) Es existieren Ebenen, in denen die beiden gemeinsamen Punkte der Graphen der Funktionen $f_{½;4}$ und g_8 liegen.
Es gibt genau zwei Ebenen dieser Art, die vom Punkt A $(0 \mid 0 \mid 1)$ den Abstand $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ besitzen.
Ermitteln Sie, unter welchem Winkel sich diese beiden Ebenen schneiden.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

Lösungsvorschläge

Teil A

a) Ansatz für Definitionsbereich: $t^{-3} - x^2 > 0$

Definitionsbereich: $D_{f_t} = \left\{ x \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \wedge -\sqrt{\frac{1}{t^3}} < x < \sqrt{\frac{1}{t^3}} \right\}$

Ansatz für Symmetrie: f(-x)=f(x)

Aussage zur Symmetrie: axialsymmetrisch zur Ordinatenachse

$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow t^{-3} - x_0^2 = 1$

Nullstellen in Abhängigkeit von t: $x_{0½} = \pm\, (t^{-3} - 1)^{½}$

t = 1 ⇒ genau eine NST

t < 1 ⇒ genau zwei NST

sonst keine

Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von t (3 BE) 8 BE

b) 1. Ableitung: $f_t'(x) = \frac{2 \cdot t^2 \cdot x}{t^3 \cdot x^2 - 1}$

Extremstelle

Ansatz für 2. Ableitung

2. Ableitung: $f_t'(x) = -\frac{2 \cdot t^2 \cdot (t^3 \cdot x^2 + 1)}{(t^3 \cdot x^2 - 1)^2}$

Nachweis der Art der Extremstelle

Koordinaten des lokalen Extrempunktes: $P_{MAX_t}\left(0 \,\middle|\, -\frac{3}{t} \ln t\right)$

Nachweis der Nichtexistenz von Wendepunkten

Wertebereich: $W_{f_t} = \left\{ y \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \wedge x \leq -\frac{3}{t} \ln t \right\}$ 8 BE

c) Nullstellen

Ansatz für Volumen: $V = \pi \int_{-\sqrt{e^3-1}}^{\sqrt{e^3-1}} \left(e \cdot \ln(e^3 - x^2)\right)^2 dx$

Volumen V: V ≈ 1320 3 BE

a) Nachweis für Parabel (3 BE)

$p(0)=f(0)$ außerdem ist $p((e^3-1)^{½}) = 0$ und aufgrund der Achsensymmetrie von p ist auch die zweite NST auf dem Graphen von p

Ansatz für Fläche: $A = \int_{-\sqrt{e^3-1}}^{\sqrt{e^3-1}} p(x)\,dx$

Stammfunktion: $P(x) = \frac{e \cdot x^3}{1 - e^3} + 3 \cdot e \cdot x$

Umformungen

Flächeninhalt: $A = 4e \cdot \sqrt{e^3 - 1}$ 7 BE

b) Aufgrund der Symmetrie des Graphen, rechne ich im I. Quadranten und verwende das Teilverhältnis 1 : 4. Es ergibt sich der Ansatz: $(4u)^2 = u^2 + f(u)^2 \Leftrightarrow \sqrt{15}\,u = f(u)$.

GTR: `solve(√15 u = f(u),u,2)` → 1.9570

Länge der Basis

Länge des Schenkels

Ansatz für Näherungswert u
Näherungswert u: u ≈ 1,96 4 BE

c) Anstieg der Senkrechten: $f'(x_A)=1$
quadratische Gleichung: $0 = x^2 - 2ex - e^3$
Lösungen der quadratischen Gleichung
Ausschluss einer Lösung
Abszisse des Punktes A: $x_A = e - \sqrt{e^3 + e^2}$

Teil B

a) Nachweis (2 BE): $g \equiv P_a$: $\vec{x} = \vec{OP}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Ansatz für Abstand: GTR prgmGEOMETRI | Punkt-Gerade → Lotfußpunkt (-2 | 1 | -1)
Koordinaten des Punktes mit kleinstmöglichen Abstand: P_{-1}(-2 | 1 | -1)
Ansatz für Winkel
Größe des Winkels: a ≈ 24,1° 6 BE

b) Ansatz für Werte a (2 BE)
$\vec{AB}^2 = \vec{AP}_a^{\,2} + \vec{BP}_a^{\,2} \Leftrightarrow 69 = 12 \cdot t^2 + 22 \cdot t + 69$
Umformungen
quadratische Gleichung
Werte a: $a_1 = 0$; $a_2 = -11/6$ BE 5

c) Gleichung der Geraden durch A und B
Nachweis (2 BE)
zu zeigen: $g_{AB} \cap g = \emptyset \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{OA} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat keine Lösung
Normaleneinheitsvektor der Ebene E_a
Mit der Länge[2] des Normalenvektors: $n = \sqrt{(413 \cdot a^2 + 716 \cdot a + 728)}$ erhält man den Abstand zum Koordinatenursprung: 50a / n. Somit die Gleichung $a \cdot \sqrt{953} = n$ und $- 540 \cdot a^2 + 716 \cdot a + 728 = 0$
Ansatz für Abstand (2 BE)
quadratische Gleichung
Werte a: $a_1 = -91/135$; $a_2 = 2$ BE 8

d) Wenn P_a Spiegelpunkt von B ist, muss $\vec{BP}_a = \begin{pmatrix} 2 \cdot a + 2 \\ -a - 6 \\ a - 4 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E sein.

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OB} + \vec{OP}_a}{2} = \begin{pmatrix} a-1 \\ \frac{6-a}{2} \\ \frac{a+4}{2} \end{pmatrix}$$ ist ein Punkt auf E, die Spiegelebene hat folglich die Gleichung

$(\vec{OM} - \vec{x}) \cdot \vec{BP}_a = 0$. Liegt A auf dieser Ebene gilt $(\vec{OM} - \vec{OA}) \cdot \vec{BP}_a = \vec{AM} \cdot \vec{BP}_a = 0$.
Das führt zu $3a^2 + 5a - 28 = 0$.
Ansatz für Spiegelebene
Gleichung der Spiegelebene
Koordinaten des Lotfußpunktes
Ansatz für Wert a

2 Hessesche Normalenform

quadratische Gleichung
Werte a: $a_1 = -4$; $a_2 = 7/3$

Teil C

a) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $b_{8;.25}(k > 3)$
Wahrscheinlichkeit: $p \approx 0{,}1138$ 2 BE

b) X – Zufallsgröße (ZG) die den Typ beschreibt;
Y – ZG, die beschreibt, welche Zahlen gewürfelt werden
Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $P(x=A) \cdot P_{x=A}(y=(1,1)) + P(x=B) \cdot P_{x=B}(y=(1,1)) = P(y=(1,1))$
Wahrscheinlichkeit: $p = 3/32 \approx 0{,}0938$
Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $P(x=B) \cdot P_{x=B}(y=(1,1))/P(y=(1,1))$
Wahrscheinlichkeit: $p = 4/9$ 4 BE

c) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $1 \cdot 3/4 \cdot 2/4 \cdot 1/4$
Wahrscheinlichkeit: $p = 3/32$
Analyse der Aufgabe (z.B. Baumdiagramm)
Ansatz für Wahrscheinlichkeit:
y_e sei die gewürfelte Zahl, wenn nicht 2 beim ersten Mal fiel
$P_{x=A}(y=2) + P_{x=A}(y=\bar{2}) \cdot 2 \cdot P_{x=A}(y=y_e) \cdot P_{x=A}(y=2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$
Wahrscheinlichkeit: $p = 11/32 \approx 0{,}3438$ 5 BE

d) Erwartungswert für Punktzahl von Falk
$E_{Falk} = n \cdot [P_{x=A}(y=1) \cdot P_{x=B}(y=1) + 2 \cdot P_{x=A}(y=2) \cdot P_{x=B}(y=2)] = \frac{1}{4}n$
Wahrscheinlichkeitsverteilung für Punktzahl von Carola
Erwartungswert für Punktzahl von Carola: $E_{Carola} = 5/4$
Wert für n: $n = 5$

e	*P(z=e)*	*Punkte*
(1,2)	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	1
(1,3)	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	2
(2,1)	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$	1
(2,3)	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	1
(3,1)	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$	2
(3,2)	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	1
(4,1)	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$	3
(4,2)	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	2
(4,3)	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	1

Teil W1

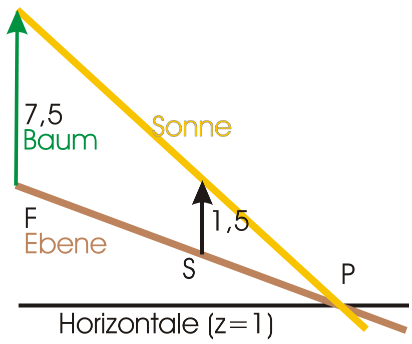
a) Schnittwinkel zwischen E und der x-y-Ebene: 38.1°
Ansatz für prozentuale Steigung: $p = 100\% \cdot \tan 38{,}1°$
prozentuale Steigung: $p \approx 78\%$ 3 BE

b) Ansatz für Schnittgerade g zwischen E und der x-y-Ebene:
$E \mid z=0 \Rightarrow g\colon 10x - 2y = 10 \Rightarrow 5x - y = 5$
Projektion von P in die x-y-Ebene: $P'(-3 \mid 6)$
Senkrechte s zu g durch P': s: $x + 5y = (-3) + 5 \cdot 6 = 27$
Schnittpunkte von s mit Kreis k: $(x - 8)^2 + (y - 1)^2 = 25/4$
$(27 - 5y - 8)^2 + (y - 1)^2 = 25/4 \Rightarrow 104 \cdot y^2 - 768 \cdot y + 1423 = 0 \rightarrow$ hat keine Lösungen
Richtungsvektor der Schnittgeraden g
Koordinaten von P
Gleichung der Hilfsebene durch P senkrecht zu g
Abstand der Hilfsebene vom Punkt M
Schlussfolgerung: Der Ball kann nicht in den Teich rollen. 6 BE

c) Gleichung der Geraden s der Sonnenstrahlen durch Baumspitze:

$$g\colon\ \vec{x} = \vec{OF} + 7.5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ -25 \end{pmatrix}$$

Koordinaten des Schnittpunktes von s und E: $P(1.9 \mid 11 \mid 1)$
Schlussfolgerung: Der Schatten liegt vollständig auf dem Hang.
(sonst wäre die Höhe 0)
Analyse: siehe Skizze
Ansatz: z. B. Verwendung des Strahlensatz



Die Strecke $\overline{PF}$ wird im Verhältnis 1:5 geteilt. Daraus ergibt sich der Ansatz $\vec{OS} = \vec{OP} + \frac{1}{5} \cdot \vec{PF}$

Ergebnis: Menge aller Punkte der Strecke $\overline{SF}$ mit S(0,8 | 12 | 2)

Teil W2

a) Erkenntnis zu Koordinaten des Berührungspunktes: $y_B = 2$, $z_B = 2$
Wert für c: c = 8
Wert für a: a = ½
Wert für b: b = 4 4 BE

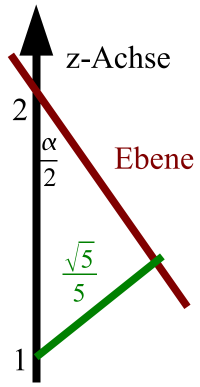
b) Ansatz für Volumen (2 BE): z. B.

Umkehrfunktionen bezogen auf eine x-y-Ebene: $f^{-1}_{\frac{1}{2};4}(x) = \sqrt{8-2x}$ $g_8^{-1}(x) = \sqrt{\frac{8}{x}}$

Rotationskörper: $V = \pi \int_2^u \left(g_8^{-1}(x)\right)^2 dx - \int_2^4 \left(f^{-1}_{\frac{1}{2};4}(x)\right)^2 dx = \pi \cdot \left([8 \ln x]_2^u - 4 \right) = 12\,\pi$ $\rightarrow 2e^2$

Stammfunktionen
Ansatz für Ebenengleichung
Umformungen
eine Ebenengleichung: z.B. z = 2 e² oder z = 20 e^(-3/2) 6 BE

c) Aufgrund der besonderen Lage von A und da die Ebene die Gerade y = 2 enthält, kann aus der Skizze ein Ansatz abgeleitet werden: $\frac{\alpha}{2} = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.



Ansatz für Ebenen
Term für Abstand der Ebenen zum Punkt A
Ansatz für Gleichungen der Ebenen
Gleichungen der Ebenen
Schnittwinkel: α ≈ 53,1°