

Teil A – Analysis

$$y = f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot (x - 2t) \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{t} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \quad (x \in D_{f_t}; t \in \mathbb{R} \wedge t > 0)$$

a) Definitionsbereich:	$D_{f_t} : x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0$	(1) größtm. D_f
Nullstellen:	$x_{01} = 2t$	(2) erste Nullstelle
	$x_{02} = 0$	(3) zweite Nullstelle
Nachweis 2. Ableitung:		(4) Ansatz für 1. Abl.
	$f_t'(x) = \frac{3}{2t} x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$	(5) erste Ableitung
	$f_t''(x) = \frac{3}{4t} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{4t\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3}{4t\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x+2t}{4tx\sqrt{x}} = \frac{1}{t} \left(\frac{3x+2t}{4x\sqrt{x}} \right)$	(6) Ansatz für 2. Abl.
Nachweis Extrempunkt $P_t \left(\frac{2}{3}t; -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}t} \right)$		(7) 2. Ableitung
	$f_t'(x) = \frac{3}{2t} x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$	
	$f_t' \left(\frac{2}{3}t \right) = \frac{3}{2t} \left(\frac{2}{3}t \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2}{3}t \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{9 \cdot 2}{4t^2 \cdot 3} t \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{3}{2t} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{2t} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{3}{2t} \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad q.e.d.$	(8) Nachweis der Extremstelle
	$f_t \left(\frac{2}{3}t \right) = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{2}{3}t - 2t \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}t} = \frac{1}{t} \left(-\frac{4}{3}t \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}t} = -\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}t} \quad q.e.d.$	(9) Nachweis der Ordinate des Extrempunktes
Art des Extremums:		
	$f_t''(x) = \frac{1}{t} \left(\frac{3x+2t}{4x\sqrt{x}} \right) \Rightarrow f_t'' \left(\frac{2}{3}t \right) = \frac{1}{t} \left(\frac{3 \cdot \frac{2}{3}t + 2t}{4 \cdot \frac{2}{3}t \cdot \sqrt{\frac{2}{3}t}} \right)$	
	$= \frac{3}{2t \sqrt{\frac{2}{3}t}} > 0, da \quad t > 0 \Rightarrow Min$	(10) Untersuchung und Art des Extremas
Natürlich könnte man auch argumentieren, dass x und t ohnehin größer 0 sind und demzufolge die zweite Ableitung an jeder Stelle größer 0 sein muss.		
Nachweis, dass keine Wendestelle existiert:		(11) Begründung für Wendepunkt
Angenommen, eine Wendestelle existieren, dann		(12) Begründung für Wendepunkt
	$0 = \frac{1}{t} \left(\frac{3x_w + 2t}{4x_w\sqrt{x_w}} \right) \Leftrightarrow 0 = 3x_w + 2t \Leftrightarrow x_w = -\frac{2}{3}t < 0 \quad \text{Widerspruch zu } D_{f_t}$	
Also ist die Annahme falsch, also existiert keine Wendestelle.		
b) Ortskurve der Extrempunkte:		(13) Ansatz f für Gleichung
	$x = \frac{2}{3}t \Rightarrow t = \frac{3}{2}x$	(14) Ansatz f für Gleichung
	$y = -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x} = -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{x} \quad x \in D_{f_t}$	(15) Gleichung

Abstand vom Ursprung:

$$d(O; Q) = \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^2 + \left(-\frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}t\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}t^2 + \frac{32}{27}t} \quad (16)$$

Ansatz für Abstand

$$\frac{1}{12}\sqrt{73} = \sqrt{\frac{4}{9}t^2 + \frac{32}{27}t} \Rightarrow \frac{73}{144} = \frac{4}{9}t^2 + \frac{32}{27}t \Rightarrow \frac{4}{9}t^2 + \frac{32}{27}t - \frac{73}{144} = 0$$

$$t = 0,375 = \frac{3}{8} \quad (17)$$

Wert t

c)

$$V_t = \pi \cdot \int_0^{2t} \left(\frac{1}{t}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx = \pi \int_0^{2t} \left(\frac{1}{t^2}x^3 - \frac{4}{t}x^2 + 4x\right) dx = \pi \left[\frac{1}{4t^2}x^4 - \frac{4}{3t}x^3 + 2x^2\right]_0^{2t} \quad (18)$$

Ansatz für Volumen für t

$$= \pi \left[\left(4t^2 - \frac{32}{3}t^2 + 8t^2\right) - 0\right] = \pi \cdot \frac{4}{3}t^2 \quad (19)$$

Stammfunktion

Für $t = 2$ gilt:

$$V_2 = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot 2^2 = \frac{16}{3}\pi \approx 16,755 \quad (20)$$

Ansatz für t=2

Ermitteln des Wertes t für $V_t = 108\pi$

$$\pi \cdot \frac{4}{3}t^2 = 108\pi \quad (21)$$

Ansatz für Wert t

$$t^2 = 81$$

$$t = 9 \quad (22)$$

Wert t

d) Tangentengleichung: $y = mx + n \quad R_t(2t; 0)$

$$m = f_t'(2t) = \frac{3}{2t}\sqrt{2t} - \frac{1}{\sqrt{2t}} = \frac{\sqrt{2t}}{t} \quad (23)$$

Anstieg der Tangente

$$0 = \frac{\sqrt{2t}}{t} \cdot 2t + n \Rightarrow n = -2\sqrt{2t} \quad (24)$$

Ansatz für Tangentengleichung

$$y = \frac{\sqrt{2t}}{t}x - 2\sqrt{2t} \quad (25)$$

Ordinate des Schnittpunktes der Tangente mit Ordinateachse

Ordinatenschnittpunkt der Tangente:

$$y_S = \frac{\sqrt{2t}}{t} \cdot 0 - 2\sqrt{2t} = -2\sqrt{2t} \quad (26)$$

Ansatz für Wert t für A=1

$$A_D = \frac{1}{2}|y_S| \cdot x_R = \frac{1}{2}2\sqrt{2t} \cdot 2t = 2t \cdot \sqrt{2t} \quad (27)$$

Ansatz für Wert t für Gleichschenkligkeit

$$1 = 2t \cdot \sqrt{2t} \Rightarrow 1 = 8t^3 \Rightarrow t^3 = \frac{1}{8}$$

$$t = \frac{1}{2} \quad (28)$$

Wert t

Dreieck nur gleichschenklig, wenn $|y_S| = x_R$ (29)

Ansatz für Wert t für Gleichschenkligkeit

$$2\sqrt{2t} = 2t \Rightarrow \sqrt{2t} = t \Rightarrow 2t = t^2 \Rightarrow t = 2 \quad (30)$$

Wert t

$$e) \quad f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-4) \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \quad x_{01} = 0 \quad x_{02} = 4$$

$$A = \left| \int_0^4 \left(\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 \right| = \left| \frac{32}{5} - \frac{32}{3} \right| = \frac{64}{15} \quad (31)$$

Ansatz

Fallunterscheidung:

entweder es ist der erste Flächeninhalt doppelt so groß, wie der zweite, oder umgekehrt. Der Schüler braucht nur eine der beiden Varianten durchrechnen. (32)

$$1. \text{ Fall: } A_1 = 2 \cdot A_2 \quad (A_1 + A_2 = A)$$

Umformung - 1

$$\text{Also: } A_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{64}{15} = \frac{128}{45} \quad A_2 = \frac{64}{45} \quad (33)$$

Umformung - 2

$$\frac{128}{45} = \left| \int_0^b \left(\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^b \right| = \frac{4}{3} b^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} b^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{3} b\sqrt{b} - \frac{1}{5} b^2\sqrt{b} \quad (34)$$

Umformung - 3

Fasst man den Term $\frac{4}{3}b\sqrt{b} - \frac{1}{5}b^2\sqrt{b}$ als Funktion auf, kann man den Grafiksolver

(x-solv) des GTR nutzen.

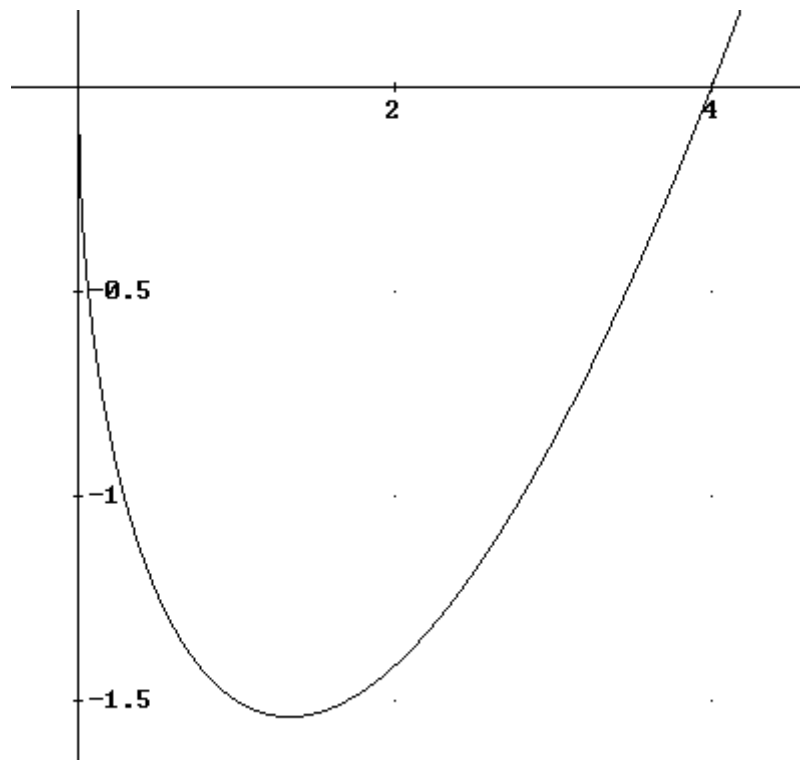
$$b \approx 2,1475$$

Analog verfährt man im 2. Fall: $2A_1 = A_2 \quad (A_1 + A_2 = A)$

$$b \approx 1,1902$$

(35)
Wert b

Skizze



Teil B – Geometrie/Algebra

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad h_a: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$E_k: \quad (6k-3) \cdot x + 2 \cdot y + (2k-1) \cdot z = 6$$

a) Eine (beliebige) Gerade, die g senkrecht schneidet:

Nutze den Aufpunkt von g und einen zu \vec{r}_g senkrecht stehenden Vektor:

Also z.B.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Für welches k liegt g in E_k ?

Setze g in E_k ein:

$$(6k-3) \cdot (2+s) + 2 \cdot 3 + (2k-1) \cdot (-1-3s) = 6$$

$$12k + 6ks - 6 - 3s + 6 - 2k - 6ks + 1 + 3s = 6$$

$$10k + 1 = 6$$

$$10k = 5$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Nachweis, dass $E_k \parallel g \Leftrightarrow \vec{n}_{E_k} \perp g \Leftrightarrow \vec{n}_{E_k} \cdot g = 0$

$$\begin{pmatrix} 6k-3 \\ 2 \\ 2k-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = (6k-3) \cdot 1 + 0 + (2k-1) \cdot (-3) = 6k - 3 - 6k + 3 = 0 \text{ q.e.d.}$$

b) Untersuchung, ob $g \parallel h_a$:

$$r \cdot \vec{r}_g = \vec{r}_{h_a} \Rightarrow r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} r = 2 \\ 0 = a \\ -3r = -6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{für } a=0 \\ \text{für } a \neq 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} g \parallel h_a \\ g \not\parallel h_a \end{matrix}$$

Untersuchung auf gemeinsame Punkte:

$$g = h_a \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I & 2 + s & = & 1 + 2t \\ II & 3 & = & a + at \\ III & -1 - 3s & = & 4 - 6t \end{matrix}$$

Betrachtet man I und III erhält man:

$$I \quad 1 = 2t - s \quad 3 = 6t - 3s$$

$$III \quad -5 = -6t + 3s \Rightarrow -5 = -6t + 3s$$

$$\underline{-2 = 0} \quad \text{Widerspruch}$$

Also: $\begin{matrix} \text{für } a=0 & \text{echt parallel} \\ \text{für } a \neq 0 & \text{windschief} \end{matrix}$

(1)

Stützvektor der schneidenden Geraden

(2)

Richtungsvektor der schneidenden Geraden

(3)

Ansatz für Wert k

(4)

Wert k

(5)

Ansatz für Nachweis der Parallelität

(6)

Nachweis der Parallelität r

(7)

Ansatz für Untersuchung der Lagebeziehung für a=0

(8)

Lagebeziehung für a=0

(9)

Ansatz für Untersuchung der Lagebeziehung für a≠0

(10)

Untersuchung für a≠0

(11)

Lagebeziehung für a≠0

c)

Normalenvektor der xy-Ebene:

$$\vec{n}_{E_{xy}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(12)
Normalenvektor
der xy-EbeneSchnittwinkel zwischen Gerade und Ebene: $\sin \varphi = \frac{|\vec{r}_{h_a} \cdot \vec{n}_{E_{xy}}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}_E|}$

$$\varphi = 60^\circ \Rightarrow \sin(\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Also:

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{40+a^2} \cdot 1} \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{-6}{\sqrt{40+a^2}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{36}{40+a^2} \Rightarrow 40+a^2 = 48$$

(13)
Ansatz für Werte a(14)
Umformungen

$$\Rightarrow a^2 = 8 \quad \Rightarrow a_1 = -\sqrt{8} \quad \wedge \quad a_2 = \sqrt{8}$$

(15)
Werte a

d)

$$h_{-4}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A(2;3;16) \in i \text{ mit } i \perp h_{-4} \wedge i \perp g$$

Da $i \perp g \Rightarrow \vec{r}_i = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ möglich.Überprüfe, ob $\vec{r}_i \cdot \vec{r}_{h_{-4}} = 0$ (16)
Ansatz für
Richtungsvektor
der Geraden

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 + 0 - 3 = 0 \Rightarrow i \perp h_{-4} \text{ Also: } i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(17)
Richtungsvektor
der Geraden(18)
Gleichung der
Geraden

e)

$$S_{x_k}(x_k; 0; 0)$$

$$\Rightarrow S_{x_k}\left(\frac{2}{2k-1}; 0; 0\right)$$

$$S_{y_k}(0; y_k; 0) \Rightarrow S_{y_k}(0; 3; 0)$$

$$S_{z_k}(0; 0; z_k) \Rightarrow S_{z_k}\left(0; 0; \frac{6}{2k-1}\right)$$

(19)
Gleichung der(20)
Gleichung der(21)
Gleichung der(22)
Gleichung der

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_G \cdot h = \frac{1}{3} \frac{x_k \cdot y_k}{2} \cdot z_k$$

(23)
Gleichung der

$$= \frac{1}{3} \frac{2}{2k-1} \cdot 3 \cdot \frac{6}{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{6}{2k-1} = \frac{6}{(2k-1)^2}$$

(24)
Gleichung der

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{(2k-1)^2} \Rightarrow (2k-1)^2 = 4 \xrightarrow{k > \frac{1}{2}} 2k-1 = 4 \Rightarrow 2k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

(25)
Gleichung der

zu Aufgabe d) (für die „umständliche“ Berechnung):

Beispiel:

$$h_{-4}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A(2;3;16) \in i \text{ mit } i \perp h_{-4}$$

$$\text{und } S \in h_{-4} \wedge S \in i$$

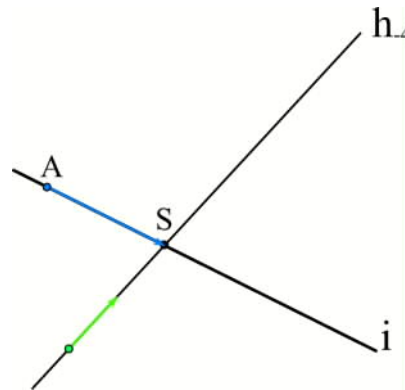
$$\vec{r}_{h_{-4}} \cdot \overrightarrow{AS} = 0 \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t_s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t_s \\ -4-2t_s \\ 4-3t_s \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1+t_s \\ -4-2t_s \\ 4-3t_s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+t_s \\ -7-2t_s \\ -12-3t_s \end{pmatrix}$$

Also:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1+t_s \\ -7-2t_s \\ -12-3t_s \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -1+t_s + 14 + 4t_s + 36 + 9t_s = 14t_s + 49 = 0 \Rightarrow t_s = -\frac{49}{14} = -\frac{7}{2}$$

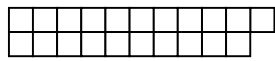
$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -1-\frac{7}{2} \\ -7+2 \cdot \frac{7}{2} \\ -12+3 \cdot \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Teil C – Stochastik

- a) Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge
(Anzahl der k-Mengen aus einer n-Menge)

Anzahl für genau 10 mal sichtbar: $n = 21 \quad k = 10$



$$\Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{21}{10} = 352\,716$$

(1)
Anzahl genau 10
mal sichtbar

Anzahl in Reihe 1:

k_1

Anzahl in Reihe 2:

k_2

$$\binom{11}{4} \cdot \binom{10}{6} + \binom{11}{5} \cdot \binom{10}{5} + \binom{11}{6} \cdot \binom{10}{4}$$

(2)
Ansatz für weitere
Anzahl

Möglichkeiten:

$$= 330 \cdot 210 + 462 \cdot 252 + 462 \cdot 210$$

$$= 282\,744$$

(3)
weitere Anzahl

- b) Bernoullikette:

Logo genau 10 mal sichtbar: $n = 21$

$$p = 0,5$$

$$k = 10$$

(4)
Charakterisierung
der Zufallsgrößen

$$B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$= \binom{21}{10} \cdot 0,5^{10} \cdot 0,5^{11} = \binom{21}{10} \cdot 0,5^{21}$$

$$= 0,1682$$

(5)
erste Wahr-
schein-
lichkeit

Logo höchstens 4 sichtbar:

$$P(Z \leq 4) = P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2) + P(Z = 3) + P(Z = 4)$$

$$= B(21; 0,5; 0) + B(21; 0,5; 1) + B(21; 0,5; 2) + B(21; 0,5; 3) + B(21; 0,5; 4)$$

$$= F_{0,5}^{21}(4)$$

$$= 0,0035987$$

(6)
zweite Wahr-
scheinlichkeit

- c) $H := \text{"Heilung"}$ $P(H) = 0,9$

$$\bar{H} := \text{"keine Heilung"}$$
 $P(\bar{H}) = 0,1$

$E := \text{"mindestens einmal keine Heilung"}$

$$P(E) > 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(\bar{E}) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0,9^n > 0,95 \Leftrightarrow 0,9^n < 0,05 \Leftrightarrow n \ln 0,9 < \ln 0,05$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln 0,05}{\ln 0,9} = 28,43$$

(7)
Charakterisierung
der Zufallsgrößen

(8)
Ansatz für Anzahl

Es müssen mindestens 29 Karten entnommen werden.

(9)
Anzahl

- d) Normalverteilung mit $E(X) = 100 \quad \sigma(X) = 2$

$$P(95 \leq X \leq 103) = F(103) - F(95) \approx \Phi\left(\frac{103-100}{2}\right) - \Phi\left(\frac{95-100}{2}\right)$$

(10)
Ansatz für Wahr-
scheinlichkeit p

$$= \Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{2}\right) = \Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{5}{2}\right)\right)$$

$$= 0,9332 - (1 - 0,9938) = 0,927$$

(11)
Wahrscheinlichkeit
p

e) Normalverteilung mit $E(X) = 100a$ $\sigma(X) = 2a$ $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$

Wir können schlussfolgern, dass $a < 1$ ist, denn die maximale Abweichung nach oben darf ja höchstens 1 mg sein.

Also gilt:

$$P(X > 101) = 1 - P(X \leq 101) < \frac{1}{1000} \quad (12)$$

Ansatz für Wert a

Also:

$$1 - \Phi\left(\frac{101 - 100a}{2a}\right) < \frac{1}{1000} \Rightarrow -\Phi\left(\frac{101 - 100a}{2a}\right) < -0,999 \Rightarrow \Phi\left(\frac{101 - 100a}{2a}\right) > 0,999 \quad (13)$$

Umformung 1

Also:

$$\frac{101 - 100a}{2a} \geq 3,1 \Rightarrow 101 - 100a \geq 6,2a \Rightarrow 101 \geq 106,2a \quad (14)$$

Umformung 1

$$\Rightarrow a \leq 0,951$$

Hinweis:

Arbeitet man mit Korrektur erhält man:

$$\frac{101 - 100a + 0,5}{2a} \geq 3,1 \Rightarrow 101,5 - 100a \geq 6,2a \Rightarrow 101,5 \geq 106,2a \quad (15)$$

Wert a

$$\Rightarrow a \leq 0,9557$$

Teil D1 – Analysis

a) $w_{n+1} = w_n \cdot (1,44 - 0,002 \cdot w_n); w_1 = 5,0$

n	1	2	3	4
w_n	5	7,15	10,913	14,471

(1)
Näherungswerte
für w_1, w_2, w_3

$$w_{n+1} = w_n \cdot (1,44 - 0,002 \cdot w_n)$$

$$= 1,44w_n - 0,002w_n^2$$

$$= w_n + 0,44w_n - 0,002w_n^2$$

$$= w_n + 0,002w_n(220 - w_n)$$

(2)
Nachweis der
Äquivalenz

Allgemein also: $w_n = w_n + q \cdot w_n (G - w_n)$

mit $G = 220$

$$q = 0,002$$

(3)
Wert für G
(4)
Wert für q

b)
$$h(t) = \frac{220}{1 + b \cdot e^{-at}} = \frac{220}{1 + \frac{b}{e^{at}}} = \frac{220e^{at}}{e^{at} + b}$$

$$h'(t) = \frac{220a \cdot e^{at} (e^{at} + b) - 220e^{at} \cdot a \cdot e^{at}}{(e^{at} + b)^2}$$

(5)
Ableitung

$$= \frac{220a(e^{at}(e^{at} + b) - e^{at} \cdot e^{at})}{(e^{at} + b)^2} = \frac{220abe^{at}}{(e^{at} + b)^2} = \frac{ae^{at}}{(e^{at} + b)} \cdot \frac{220b}{(e^{at} + b)}$$

$$= \frac{ae^{at}}{(e^{at} + b)} \cdot \frac{220e^{at} + 220b - 220e^{at}}{(e^{at} + b)} = \frac{220ae^{at}}{220(e^{at} + b)} \cdot \frac{220(e^{at} + 220b) - 220e^{at}}{(e^{at} + b)}$$

(6)
Ansatz für
Nachweis

$$= \frac{a}{220} h(t) \cdot \left(220 - \frac{220e^{at}}{(e^{at} + b)} \right) = \frac{a}{220} h(t) \cdot (220 - h(t))$$

(7)
Nachweis

c) $h(t) = \frac{220}{1 + b \cdot e^{-at}} \Rightarrow (1) \quad 20,4 = \frac{220}{1 + b \cdot e^{-5a}} \wedge (2) \quad 92,9 = \frac{220}{1 + b \cdot e^{-10a}}$

Umstellen von (1):

$$20,4 = \frac{220}{1 + b \cdot e^{-5a}} \Rightarrow 20,4 \cdot (1 + b \cdot e^{-5a}) = 220 \Rightarrow 1 + b \cdot e^{-5a} = \frac{220}{20,4}$$

$$\Rightarrow b \cdot e^{-5a} = \frac{220}{20,4} - 1 \Rightarrow e^{-5a} = \frac{\frac{220}{20,4} - 1}{b}$$

Einsetzen in (2):

$$92,9 = \frac{220}{1 + b \cdot e^{-10a}} = \frac{220}{1 + b \cdot (e^{-5a})^2} = \frac{220}{1 + b \cdot \left(\frac{\frac{220}{20,4} - 1}{b} \right)^2}$$

(8)
Gleichungssystem

(9)
Ansatz zur
Ermittlung der
Werte a und b

$$\Rightarrow 92,9 \cdot \left(1 + b \cdot \left(\frac{\frac{220}{20,4} - 1}{b} \right)^2 \right) = 220 \Rightarrow 92,9 \cdot \left(1 + \frac{\left(\frac{220}{20,4} - 1 \right)^2}{b} \right) = 220$$

$$\Rightarrow 92,9 \cdot \left(\frac{b + \left(\frac{220}{20,4} - 1 \right)^2}{b} \right) = 220 \Rightarrow 92,9 \cdot b + 92,9 \cdot \left(\frac{220}{20,4} - 1 \right)^2 = 220b$$

$$\Rightarrow 127,1b = 92,9 \cdot \left(\frac{220}{20,4} - 1 \right)^2 \Rightarrow b = \frac{92,9 \cdot \left(\frac{220}{20,4} - 1 \right)^2}{127,1} \approx 69,9730658 \approx 69,973 \quad (10)$$

Näherungswert b

$$e^{-5a} = \frac{\frac{220}{20,4} - 1}{69,973} \Rightarrow -5a = \ln \left(\frac{\frac{220}{20,4} - 1}{69,973} \right) \Rightarrow a = \frac{\ln \left(\frac{\frac{220}{20,4} - 1}{69,973} \right)}{-5} \approx 0,3934659861 \approx 0,393 \quad (11)$$

Näherungswert a

$$h(25) = \frac{220}{1 + 69,973 \cdot e^{-0,393 \cdot 25}} [cm] \approx 219,1705896 \text{ cm} \approx 219,2 \text{ cm} \quad (12)$$

Wachstumshöhe

d) Zunächst ermittelt man, wann die Wachstumsgeschwindigkeit und damit die 1. Ableitung den Maximalwert hat.

Das kann man über das Grafikmenü des GTR bestimmen.

$$h'(t) = \frac{220abe^{at}}{(e^{at} + b)^2} \xrightarrow{a=0,4 \wedge b=70} h'(t) = \frac{220 \cdot 0,4 \cdot 70 \cdot e^{0,4t}}{(e^{0,4t} + 70)^2} = \frac{6160 \cdot e^{0,4t}}{(e^{0,4t} + 70)^2}$$

Über das Grafikmenü des GTR, in dem man die erste Ableitung eingegeben hat, kann man mittels des Grafiksolvers die Extremstelle (Maximum) der ersten Ableitung ermitteln:

$$x_{max} \approx 10,62123773$$

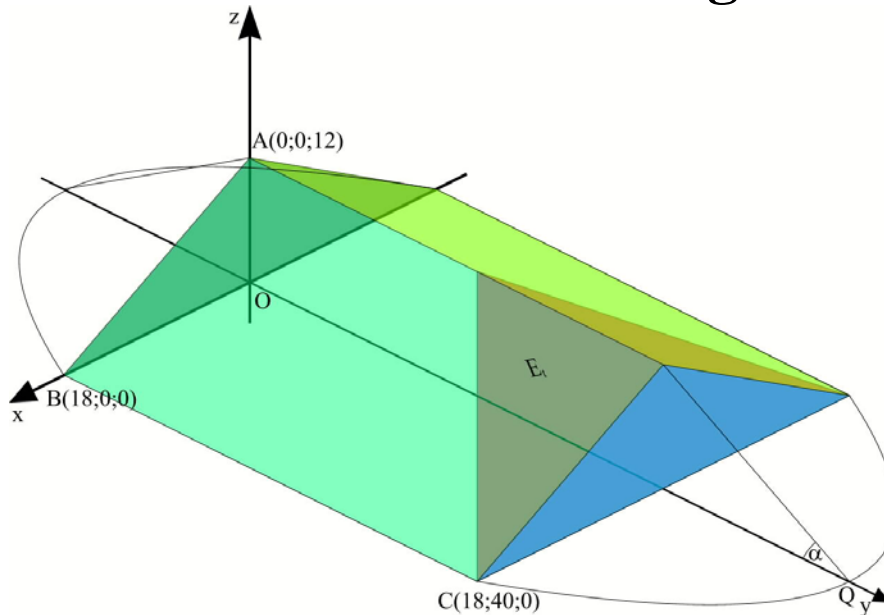
Da man eine Woche vorher düngen soll, ergibt sich, dass nach ca. 9.6 Wochen die Düngung erfolgen muss.

(13)
Lösungsidee

(14)
Ansatz für Zeit

(15)
Ergebnis

Teil D2 – Geometrie / Algebra



a)

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\right) = \arctan\left(\frac{12}{17}\right)$$

$$= 33,69^\circ$$

Volumenberechnung:

$$V_{Halde} = V_{Kegel} + V_{Prisma} = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{OB}^2 \cdot \overline{OA} + \overline{OB} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{BC}$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot 18^2 \cdot 12 + 18 \cdot 12 \cdot 40 \quad [m^3]$$

$$= 12711,5 m^3$$

Oberflächeninhalt:

Berechne \overline{AB} $\overline{AB} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{OA}^2} = \sqrt{12^2 + 18^2} [m] = \sqrt{468} m$

$$A_o = 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} + A_{Kegelmantel} = 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \pi \cdot \overline{OB} \cdot \overline{AB}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{468} \cdot 40 + \pi \cdot 18 \cdot \sqrt{468} [m^2]$$

$$= 2954 m^2$$

b) $E_t: 2y + 3z = 116 - 2t \quad (t \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq t \leq 40) \quad C(18;40;0)$

$$2 \cdot 40 + 3 \cdot 0 = 116 - 2t \Rightarrow t = \frac{80 - 116}{-2} = 18$$

Also: $E_{18}: 2y + 3z - 80 = 0 \quad HNF: \frac{2y + 3z - 80}{\sqrt{13}} = 0$

Schnittpunkt S der Parallelen g zu OQ durch A mit der Ebene E_{18} :

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \cdot (0 + r) + 3 \cdot 12 - 80 = 0 \Rightarrow r = 22 \quad \Rightarrow S(0;22;12)$$

Höhe der Pyramide: $h_{Pyramide} = 40 - 22 [m] = 18 m$

(1)

Ansatz für Böschungswinkel

(2)

Ansatz für Böschungswinkel

(3)

Ansatz für Volumen

(4)

Volumen

(5)

Ansatz für Oberflächeninhalt

(6)

Oberflächeninhalt

(7)

Ansatz für Wert t

(8)

Wert t

(9)

Ansatz für Höhe der Pyramide

(10)

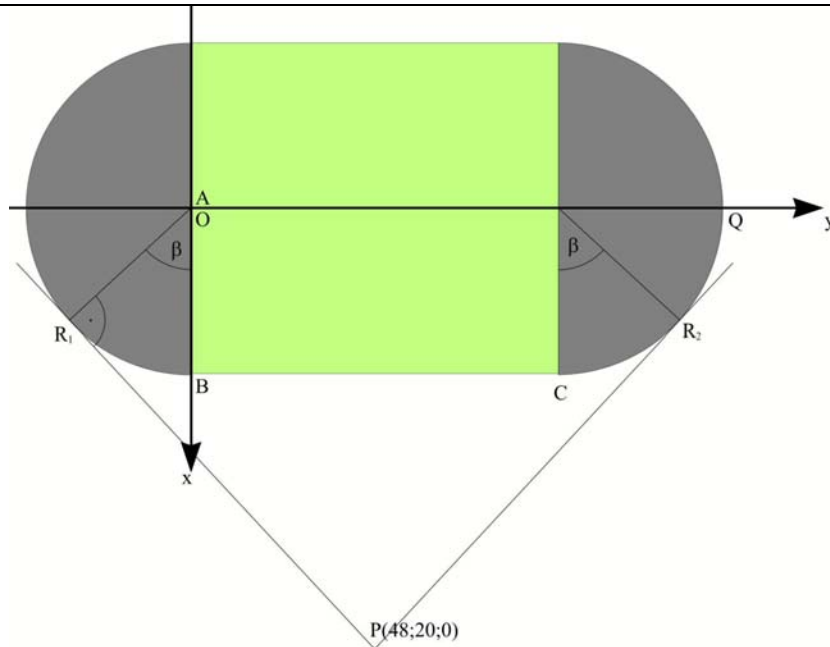
Höhe der Pyramide

$$\begin{aligned}
 V_{\text{Abraum}} &= V_{\text{Pyramide}} + \frac{1}{2}V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OA} \cdot h_{\text{Pyramide}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot \overline{OB}^2 \cdot \overline{OA} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 12 \cdot 18 + \frac{1}{6} \pi \cdot 18^2 \cdot 12 \quad [\text{m}^3] \\
 &= 3331,75 \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

(11)
Ansatz für Volumen

(12)
Volumen

c)



Da der Punkt P in der xy-Ebene liegt können wir uns auf diese Ebenen beschränken. Da der Beobachtungspunkt zudem symmetrisch zum Körper liegt, genügt zunächst die Betrachtung einer Seite. Ich wähle die linke Seite, da dort der Kreis ein Ursprungskreis ist.

Gegeben sind der Kreis mit $M(0;0) \wedge r = 18$ sowie der Punkt $P(48;20)$.

Gesucht

Tangentengleichung an einem Kreis von einem Punkt P aus:

$$(x_P - x_M)(x - x_M) + (y_P - y_M)(y - y_M) = r^2$$

$$P(48;20) \wedge M(0;0) \wedge r = 18 \Rightarrow 48x + 20y = 324$$

$$\Rightarrow y = -2,4x + 16,2$$

Man hat nun die Gleichung der Polaren, also der Geraden, auf der die beiden Berührungspunkte der Tangenten von P an den Ursprungskreis liegen. Einer dieser Berührungspunkte ist der interessierende Punkt R_1 .

Nun ist R_1 sowohl Element der Polaren, als auch Element des Ursprungskreises. Der Skizze entnehmen wir, dass die x-Koordinate des Punktes R_1 positiv ist:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{mit} \quad y = -2,4x + 16,2 \quad \text{und} \quad r = 18$$

$$\Rightarrow x^2 + (-2,4x + 16,2)^2 = 324$$

$$\Rightarrow x^2 + 5,76x^2 - 77,76x + 262,44 = 324$$

$$\Rightarrow 6,76x^2 - 77,76x - 61,56 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 12,247 \quad x_2 = -0,743$$

$$\text{Also } x_{R_1} \approx 12,247 \quad \Rightarrow y_{R_1} \approx -13,193$$

(13)
Ansatz für Zentralkreiswinkel des Kreisbogens

Berechnung des Winkels β :

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{\overline{OR} \cdot \overline{OB}}{|\overline{OR}| \cdot |\overline{OB}|} \\ &\approx \frac{\begin{pmatrix} 12,247 \\ -13,193 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \end{pmatrix}}{18 \cdot 18} = \frac{12,247 \cdot 18}{18 \cdot 18} = \frac{12,247}{18} \\ &\approx 0,6804 \Rightarrow \beta \approx 47,126^\circ\end{aligned}$$

(14)
Größe des Zentri-
winkels

Berechnung des sichtbaren Kreisbogens:

$$b = 2\pi r \cdot \frac{\beta}{360} = 2 \cdot \pi \cdot 18 \cdot \frac{47,126^\circ}{360^\circ} [m] \approx 14,8m$$

Berechnung der sichtbaren Fläche eines Kegels:

$$A_{KS} = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{b \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{14,8 \cdot \sqrt{468}}{2} [m^2] = 160,14 m^2$$

Berechnung der sichtbaren Fläche:

$$A_S = 2 \cdot A_{KS} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 2 \cdot 160,14 + \sqrt{468} \cdot 40 [m^2] = 1185,61 m^2$$

(15)
sichtbarer Teil der
Haldenoberfläche