Klausur unter abiturähnlichen Bedingungen
Leistungskursfach Mathematik

- Ersttermin -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt 300 Minuten.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D**.
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabedaten berechnet.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A 35 BE,
im Teil B 25 BE,
im Teil C 15 BE,
im Teil D 15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System
- Tabellen- und Formelsammlung (im Unterricht eingeführt, ohne ausführliche Musterbeispiele)
- Zeichengeräte

A: Analysis

Gegeben ist die Funktionsschar f_a durch

$$y = f_a(x) = \frac{1}{a}(x-a)\sqrt{x} \quad (x, a \in \mathbb{R};\ a>0;\ x \geq 0).$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_a.
Zeigen Sie, dass der Graph jeder Funktion der Schar f_a genau einen Minimumpunkt besitzt und berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion auf der alle Minimumpunkte der Graphen der Funktionenschar f_a liegen. 8 BE

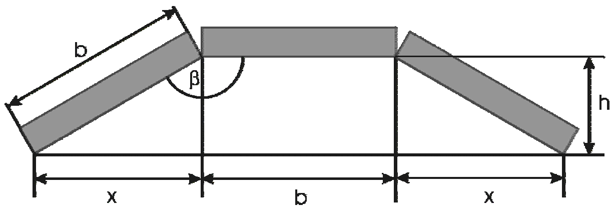
b) Der Graph der Funktion f_4 und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Geben Sie die Flächengröße A_4 an. 2 BE
Für welche Funktion der Schar f_a beträgt die Maßzahl der Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse 6,6? 2 BE
Bei der Rotation einer Fläche A_a um die x-Achse entsteht ein Stromlinienkörper. 4 BE
Ermitteln Sie den Wert des Parameters a für den Fall, dass die Maßzahl des Volumens 3π beträgt. 3 BE

c) Die Tangenten an den Graphen jeder Funktion f_a im Minimumpunkt und in den Schnittpunkten mit der x-Achse begrenzen zusammen mit den Koordinatenachsen ein Trapez.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes der Trapezfläche in Abhängigkeit von a. 4 BE
Für welches a beträgt diese Fläche 27? 1 BE

Gegeben ist eine weitere Funktionenschar g_b

$$y = g_b(x) = (x+b)\cdot\sqrt{b^2-x^2} \quad (-b \leq x \leq b,\ b \in \mathbb{R},\ b>0).$$

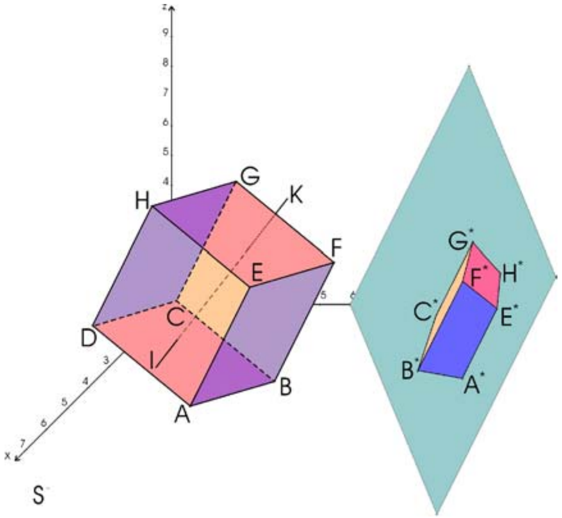
Drei Betonteile mit der Breite b sollen, wie in der Skizze dargestellt, zu einem Kabelschacht mit maximalem Querschnitt montiert werden.



Skizze 1: Skizze nicht maßstäblich

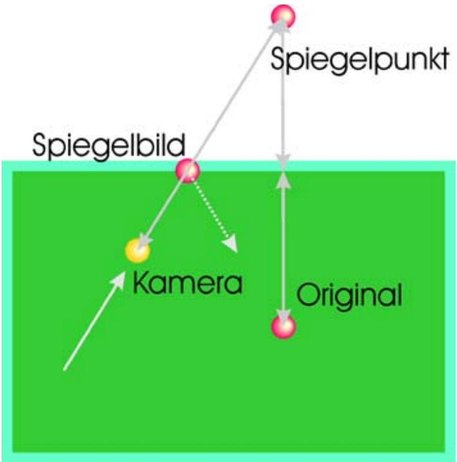
d) Zeigen Sie, dass zur Extremwertberechnung die Funktionenschar g_b als Zielfunktion verwendet werden kann. 2 BE
Betrachtet wird nun $g_1(x)$.
Ermitteln Sie das Gradmaß des Winkels ß für den Fall, dass der

d) Da das Refexionsgesetz besagt, dass Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel sein muss, ist es am einfachsten, den Punkt H an der Ebene ε zu spiegeln. So entsteht der Punkt H'(7 | 16 | 6). H' liegt nun hinter dem Spiegel. Die Strecke $\overline{SH'}$ schneidet ε in H^*. Aufgrund einfacher geometrischer Sätze (Kongruenzsätze, Gegenwinkel) sind Ein- und Ausfallswinkel gleich groß.



Zeichnung 3

Da das Thema Spiegelung immer wieder auftaucht: Was hat Billard mit der Abbildung im Spiegel zu tun?
Zur Illustration eine Abbildung:



e) H'(-4 | 17 | 3), H^*(7 | 16 | 6)

f) A^*(7,76 | 15,26 | 3),
B^*(5,25 | 12 | 1,5),
C^*(4,772 | 12,27 | 3), D^*(7 | 15 | 4),
E^*(7,76 | 16,43 | 5,347),
F^*(5,25 | 13,5 | 4,5),
G^*(4,772 | 13,5 | 5,454),
H^*(7 | 16 | 6),
I^*(8,12 | 16,15 | 4,06),
K^*(3,111 | 11,33 | 4,444), S^*(12 | 21 | 6)

Querschnitt maximal wird. 3 BE
Geben Sie den maximalen Querschnitt an. 1 BE

Gegeben ist eine Funktion h(x)

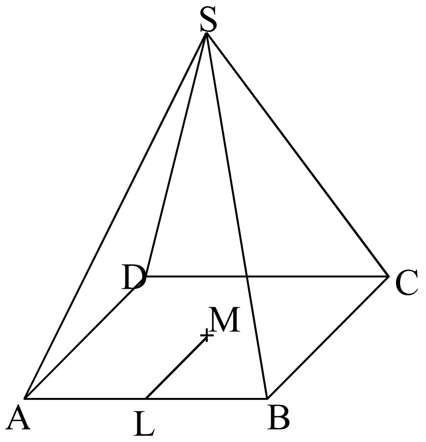
$$y=h(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1} \quad (x\in\mathbb{R}).$$

e) Zeigen Sie, dass gilt: $h(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}$.
Ermitteln Sie eine Stammfunktion h(x).
Überprüfen Sie dieses Resultat rechnerisch.
Weisen Sie nach, dass für h(x) gilt: h(-x) – 1 = -h(x) + 1.
Interpretieren Sie diese Gleichung am Graphen der Funktion. 5 BE

B: Lineare Algebra / Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt M (-2 | 6 | 1) sowie die Ebenen E: z – 1 = 0 (x, y ∈ ℝ) und H: 8x – 4y + 5z – 5 = 0 gegeben.

Es sollen die Eckpunkte einer Pyramide P_{ABCDS} mit quadratischer Grundfläche ABCD (siehe Zeichnung 1) schrittweise bestimmt werden. Das Quadrat ABCD mit Diagonalenschnittpunkt M liegt in der Ebene E, die Seitenfläche ABS in der Ebene H.



Zeichnung 1

a) Die Ebenen E und H schneiden sich in der Geraden g, auf der A und B liegen. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g.
[mögliches Ergebnis: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$] 2 BE

b) Berechnen Sie den Fußpunkt L des Lotes von M auf die Gerade g. 2 BE
[zur Kontrolle: L(2 | 4 | 1)]

c) Berechnen Sie die Eckpunkte A und B des Quadrats ABCD. Derjenige der beiden Punkte mit der kleineren x-Koordinate wird mit A bezeichnet. 3 BE
[zur Kontrolle: A(0 | 0 | 1)]

d) Bestimmen Sie jetzt die Eckpunkte C und D des Quadrats ABCD. 2 BE
[zur Kontrolle: D(-8 | 4 | 1)]

e) Die Spitze S der Pyramide liegt in der Ebene H. Der Fußpunkt des Lotes von S auf die Grundfläche ist der Punkt M. Bestimmen Sie den Punkt S. 1 BE
[zur Kontrolle: S(-2 | 6 | 9)]

Der Punkt P ist Mittelpunkt der Pyramidenkante $\overline{CS}$, der Punkt Q Mittelpunkt der Kante $\overline{DS}$.

f) Ermitteln Sie rechnerisch die Innenwinkel des Trapezes ABPQ. 4 BE

c) Da der Gewinn von 3,50 € dem Verlust von 1,50 € gegenübersteht, ist
$(50 – \text{Anzahl}_{max}) \cdot 3{,}5 – \text{Anzahl}_{max} \cdot 1{,}5 = 0$ bzw.
$50 \cdot 3{,}50$ € - $\text{Anzahl}_{max} \cdot 5{,}00$ € = 0,00 €.
Somit darf die Anzahl defekter Schläuche maximal 35 sein.
Im Durchschnitt werden:
$(50 – \mu)\cdot 3{,}5$ € – $\mu \cdot 1{,}5$ € = $50 \cdot 3{,}50$ € – $\mu \cdot 5{,}00$ € = $\underline{\underline{155\text{ €}}}$ eingenommen.

d) 50·(Preis – 8,50 €) - µ·5,00 € = 100 € => Preis = 10,90 €
Ein anderer Weg: der Gewinn von 100 € und die durchschnittliche Aufwendung für Arbeit an 4 Rädern von 20 € muss auf 50 Reifen verteilt werden. Damit ist der Betrag von 8,50 € um 2,40 € zu erhöhen.

Teil D1

a) Vereinfachen von $f'_a(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{x^2}$ oder Integration mittels Substitution:
v = x² ist $f_a(x) = a \cdot \ln x + \frac{1}{x} + C$ und mit $P_a \in G_{f_a}(x)$ folgt C = 1
$f_a'(x_e) = 0 \Rightarrow x_e = 1/a$ und $y_e = -a \cdot \ln a + a + 1$
$f_a''(x_e) = a^3 \Rightarrow$ lokales Minimum $P_{min}(1/a \mid a+1-a\cdot\ln a)$
$f_a''(x_W) = 0 \Rightarrow x_W = 2/a$ und $y_W = a \cdot \ln 2/a + a/2 + 1$
$f_a'''(x_W) = -a^4/8 \neq 0$

b) $x_e = ½ \Rightarrow a = 2$

c) $f_a(x) = f_b(x)$ mit $a \neq b$ ergibt sich z. B.:
$a \cdot \ln x = b \cdot \ln x \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow P\,(1 \mid 2)$

d) I: 1/a = 2/b
II: $f_a(1/a) = f_b(2/b)$
Lösen des Gleichungssystems ergibt: a = 1 und b = 2

Teil D2:

a) A(9 | 7 | 3), B(5 | 7 | 1), C(4 | 3 | 3), D(8 | 3 | 5), E(9 | 9 | 7), F(5 | 9 | 5), G(4 | 5 | 7), H(8 | 5 | 9)

b) $P_1(13/3 \mid 17/3 \mid 5)$, $P_2(26/3 \mid 19/3 \mid 5)$

c)

g) Das Volumen einer Pyramide ergibt sich aus 1/3 der Grundfläche mal der Höhe. Die Eckpunkte der Grundfläche und damit deren Maßzahl sind bekannt. Die Höhe der Pyramide ist der Abstand von S über der Ebene E_{ABP}.

h) Bei Verwendung der Trapezformel $F_{ABPQ} = \frac{1}{2}(|\vec{AB}| + |\vec{PQ}|) \cdot h$ kann die Höhe z. B. mit einem der berechneten Winkel im Trapez bestimmt werden.
Wer mit GTR-Programmen rechnen will, zerlegt die Grundfläche in zwei Dreiecke: $F_{ABPQ} = \frac{1}{2}|\vec{QP} \times \vec{QA}| + \frac{1}{2}|\vec{BP} \times \vec{BA}| = \frac{3}{2}\sqrt{1220} = 3\sqrt{305}$.
Die Höhe ergibt sich unter Verwendung des GTR: prgmGeometri Abstand | Punkt-Gerade oder auch aus der Hesseschen Normalenform von

Ebene G: $(\vec{x} - \vec{OA}) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 15 \end{pmatrix} = 0$ mit

$$d = \left(\vec{OS} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 15 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 15 \end{pmatrix}\right|} = \frac{80}{\sqrt{305}}$$ folgt $V_0 = 80$

i) $V_U = V - V_0 = 400/3$ und $V_0/V_U = 3/5$

Teil C

a) Für A und C liegt eine Binomialverteilung $B_{n;p}(k)$ mit den Parametern p = 8% und n = 15 vor.
$P(A) = B_{15;\,0,08}(0) = 0,92^{15} = 0,2863$
$P(B) = 0,08^2 \cdot 0,92^{13} = 0,0022$
$P(C) = B_{15;\,0,08}(2) = 0,2273$

b) Binomialverteilung $B_{n;p}(k)$ mit den Parametern p = 8% und n = 50
$\mu = n \cdot p = 4$

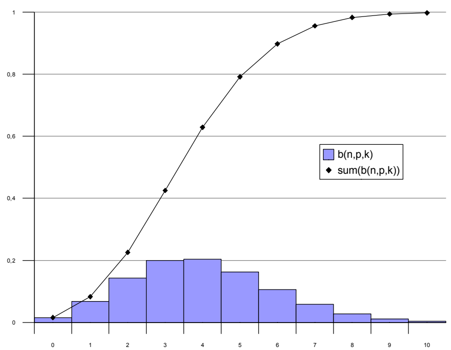


Abbildung 3: Diagramm zu b)

Das Trapez ABPQ zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper. Es wird der Teilkörper betrachtet, der die Spitze S enthält.

g) Der Flächeninhalt des Trapezes ABPQ soll als bekannt vorausgesetzt werden.
Beschreiben Sie mit Worten, welche Schritte auszuführen sind, um das Volumen des betrachteten Teilkörpers zu berechnen. Der konkrete Wert des Volumens soll dabei nicht ermittelt werden. 2 BE

h) Berechnen Sie das Volumen dieses Teilkörpers. 6 BE

i) In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Teilkörper? 3 BE

C: Stochastik

Eine Firma für Fahrradzubehör stellt unter anderem Fahrradschläuche her. Es ist davon auszugehen, dass ein Anteil von 8% der Produktion wegen gewisser Defekte unbrauchbar ist.

a) Der laufenden Produktion werden zufällig 15 Schläuche entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: "Alle entnommenen Schläuche sind in Ordnung."
B: "Nur der zweite und der fünfte entnommene Schlauch sind defekt."
C: "Genau zwei der entnommenen Schläuche sind defekt." 3 BE

b) Ein Versandkarton enthält jeweils 50 Schläuche. Die Zufallsgröße X ordne jeder möglichen Bestückung des Kartons die Anzahl der defekten Schläuche zu.
Welche Verteilungsfunktion liegt dem Zufallsexperiment zugrunde? 1 BE

Berechnen Sie den Erwartungswert $\mu(X)$. 1 BE
Erklären Sie den Begriff Erwartungswert an diesem Beispiel. 1 BE
Zeichnen Sie das Säulendiagramm der Wahrscheinlichkeitsfunktion P der Zufallsgröße X über [0; 10] in ein geeignetes Koordinatensystem. 2 BE

c) In einem Fahrradladen werden pro Schlauch Arbeitskosten von 5,00 € und Materialkosten von 3,50 € fällig. Der Kunde bezahlt für Reparatur 12 €. Wird ein defekter Schlauch unter Garantiebedingungen[1] erneut im Laden repariert, werden nochmals die Arbeitskosten fällig. Die zusätzlichen Materialkosten trägt der Zulieferer.
Wieviele defekte Schläuche dürfen pro Versandkarton höchstens auftreten, damit der Laden keinen Verlust macht? 3 BE
Welchen Gewinn hat der Laden pro Karton zu erwarten? 2 BE

d) Da der Laden in hartem Konkurenzkampf liegt, soll der Preis für den Kunden optimiert werden. Pro Karton sollen durchschnittlich 100 € Gewinn eingestrichen werden.
Welchen Preis sollte der Ladenbesitzer pro Schlauchtausch verlangen? 2 BE

1 Jeder Kunde mit defektem Rad bemerkt den Fehler, geht zurück und lässt den Schaden reparieren. Er bezahlt dann nichts.

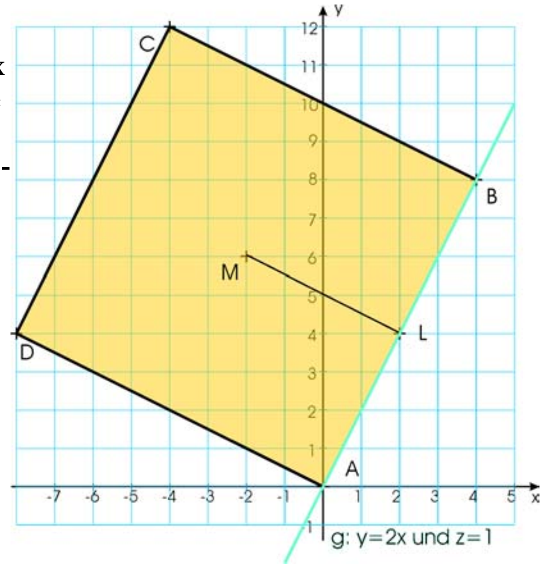
e) $h(x)=1-\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1}\underset{\text{Binom}}{=}\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

$H(x)=\int 1\,dx-\int\dfrac{2x}{x^2+1}dx=x-\ln(x^2+1)+C$

Punktsymmetrie von h(x) zum Punkt (0 | 1)

Teil B:

a) $E\cap H=g_{AB}$: z=1 und y = 2x
Wegen der besonderen Lage von E lässt sich leicht eine Skizze zur Kontrolle der Koordinaten der Punkte L, A, B, C und D erstellen.



b) Normale n_{AB}: y = -½x + n
mit $(-2 \mid 6)\in n_{AB}\Rightarrow n=5$
$n_{AB}\cap g_{AB}=L$: x = 2, y = 4

c) $\overline{AB}=2\overline{ML}=4\sqrt{5}$ ergibt
A(0 | 0 | 1), B(4 | 8 | 1)
z. B. mit Kreis k:

$k_{L,2\sqrt{5}}$: $20=(x-2)^2+(y-4)^2$

$k_{L,2\sqrt{5}}\cap g_{AB}$: $0=x^2-4x$

d) $\vec{OC}=\vec{OB}+2\cdot\vec{LM}$, $\vec{OD}=\vec{OA}+2\cdot\vec{LM}$, C(-4 | 12 | 1), D(-8 | 4 | 1) oder auch Verwendung der Diagonalen: $\vec{OC}=\vec{OA}+2\cdot\vec{AM}$ usw.

e) Weil S direkt über M liegt (Normale von E nur in z-Richtung), bleiben die x- und y- Koordinaten gleich. $x_S=-2$ und $y_S=6$
H: 8·(-2) – 4·6 + 5z = 5 ⇒ z = 9

f) P(-3 | 9 | 5), Q(-5 | 5 | 5), Symmetrie

$\sphericalangle PBA=\sphericalangle BAQ=\sphericalangle(\vec{BP},\vec{BA})=\sphericalangle\left(\begin{pmatrix}5\\-5\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\-8\\0\end{pmatrix}\right)\underset{\text{GTR}}{=}1{,}2920=74{,}02°$

Wechselwinkel und Symmetrie: $\sphericalangle QPB=\sphericalangle PQA=105{,}98°$

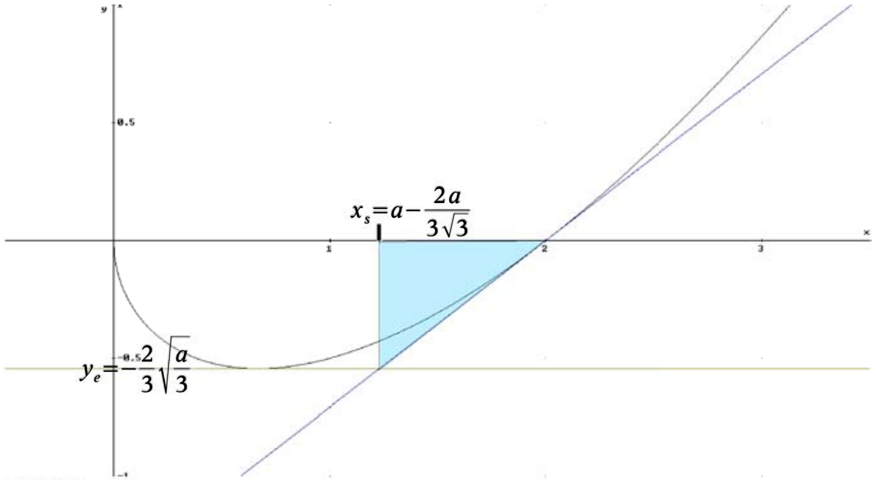


Abbildung 2

Tangenten:

$$P_{min}\left(\frac{a}{3}\middle|-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\in t_1:\quad y=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

$$P_0(0|0)\in t_2:\quad x=0\quad (y\in\mathbb{R})$$

$$P_1(a|0)\in t_3:\quad y=\frac{1}{\sqrt{a}}x-\sqrt{a}$$

Schnittpunkt $S(x_s|y_s)=t_1\cap t_2\Rightarrow x_s=a-\frac{2a}{3\sqrt{3}}$

$A_T=\left|\frac{1}{2}(a+x_s)\cdot y_e\right|$ und nach Vereinfachung

$$A_T(a)=\frac{2}{27}(3\sqrt{3}-1)a^{\frac{3}{2}}$$

$A_T(19{,}6139) \approx 27$

d) $A_Q(x,b) = (b + x)\, h$ mit $h^2 = b^2 - x^2$ folgt $g_b(x)$

$g_1(x)=(x+1)\sqrt{1-x^2}$, $g_1'(x)=\frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ $\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$ und x_2 entfällt

$h=\sqrt{\frac{7}{16}}$, $\beta=90°+\sin^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)=120°$

$A_Q(x_1,1) = \frac{3}{4}\sqrt{3}$

D: Wahlaufgaben

Wählen Sie eine der Aufgaben D1 oder D2 zur Bearbeitung aus.

D1: Analysis

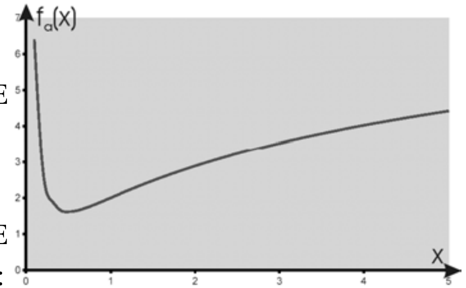
Die Funktion f_a mit dem Definitionsbereich $D_f: x\in\mathbb{R}, x>0$ und $a\in\mathbb{N}, a>0$, haben die Ableitungen f_a' mit $f_a'(x)=\frac{ax-1}{x^2}$.

Jeder Graph von f_a verläuft jeweils durch den Punkt $P_a\left(e\middle|1+a+\frac{1}{e}\right)$.

a) Stellen Sie eine Gleichung für die Funktion f_a auf.

[Ergebnis zur Kontrolle: $f_a(x)=a\cdot\ln x+\frac{1}{x}+1$]

Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte sowie die Koordinaten der Wendepunkte der Funktion f_a (mit Nachweis). 8 BE



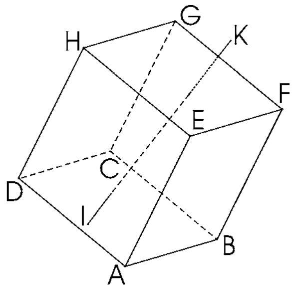
b) Gesucht ist der Wert des Parameters a der Funktion f_a, die in der Abbildung dargestellt ist. 1 BE

c) Weisen Sie nach, dass alle Graphen f_a genau einen Punkt gemeinsam haben und geben Sie diesen an. 3 BE

d) Für genau zwei der Graphen f_a gilt: Die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des einen Graphen stimmen mit den Koordinaten des Wendepunktes des anderen Graphen überein. Berechnen Sie dafür die beiden Werte des Parameters. 3 BE

D2: Analytische Geometrie und lineare Algebra

In einer Werbeagentur entwirft ein Mitarbeiter ein neues Motiv. Darauf sieht man einen Glasstein (Quader), einen Schriftzug (Strecke) und einen Spiegel (Ebene ε). Er konnte sich nicht vorstellen, wie das Spiegelbild für einen Betrachter aussehen würde. Vielleicht weil der Mitarbeiter ein besonders großer Perfektionist war, hatte er vor, eine Skizze mit den tatsächlichen Maßen zu erstellen. Er geht von mathematischen Objekten aus.



Zeichnung 2

Bekannt sind:

- vom Quader die Punkte A(9 | 7 | 3), B(5 | 7 | 1), D(8 | 3 | 5) und E(9 | 9 | 7),
- die Endpunkte der Strecke sind K(2 | $\frac{69}{13}$ | 5) und I(10 | $\frac{85}{13}$ | 5),
- die Ebenengleichung lautet ε: $-2x + 2y - z = 12$.

Nun beauftragt er Sie, als seinen Praktikanten, damit:

a) Die restlichen Eckpunkte des Quaders auszurechnen. 2 BE

b) Herauszubekommen, in welchen Punkten P_1 und P_2 die Strecke den Quader schneidet. 2 BE

c) Den Quader mit der Strecke in einem kartesischen Koordinatensystem darzustellen. Verdeckte Kanten sollen als solche erkennbar sein. 2 BE
Der Spiegel wird durch die Spurgeraden von ε im 1. Oktanten gezeigt.
Hinweis: Verwenden Sie das vorbereitete Koordinatensystem. 1 BE

Um das Spiegelbild zu zeichnen, muss der Standort S(18 | 15 | 9) des Beobachters (der Kamera) bekannt sein.

d) Erklären Sie am Beispiel des Punktes H, wie Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes H' und des Spiegelbildes H^* berechnen können. 4 BE

e) Berechnen Sie die Koordinaten von H' und H^*. 2 BE

Die restlichen Spiegelbildpunkte lauten:
A^*(7,76 | 15,26 | 3), B^*(5,25 | 12 | 1,5), C^*(4,77 | 12,27 | 3), D^*(7 | 15 | 4), E^*(7,76 | 16,43 | 5,35), F^*(5,25 | 13,5 | 4,5), G^*(4,77 | 13,5 | 5,45).

f) Zeichnen Sie das Spiegelbild des Würfels. 1 BE

g) Färben Sie die Quaderflächen ABFE und BCGF des Würfels mit zwei Farben und dazu entsprechend die des Spiegelbildes ein. 1 BE

Lösungsvorschläge

Teil A:

a) NST: $f_a(x_0) = 0 \Rightarrow x_{01} = 0$ und $x_{02} = a$

$$f_a'(x) = \frac{3}{2a}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ ;\ f_a''(x) = \frac{3}{4a\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{x}^3}$$

$f_a'(x_e) = 0 \Rightarrow\ x_e = \frac{a}{3}$ und $y_e = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$

$f_a''(x_e) = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{a}^3} > 0 \Rightarrow$ Minimum

Ansatz für Ortskurve

Ortskurve: $y_e = -\frac{2}{3}\sqrt{x_e}$

b) $$|A| = \left|\int_0^4 f_4(x)\,dx\right| \underset{\text{GTR}}{=} \frac{32}{15}$$

$$\int_0^{x_0} f_a(x)\,dx = 6{,}6 \underset{\text{GTR}}{\Rightarrow} a = \frac{3}{4}\sqrt[3]{1452} \approx 8{,}4928$$

GTR:
`Y1 = √X∗(X-A)/A` und
`solve(fnInt(Y1,X,Ø,A)-6.6,A,8)` → 8,4928

$$V = \pi\int_0^a f_a^2(x)\,dx = 3\pi \Rightarrow \int_0^a f_a^2(x)\,dx = 3 \underset{\text{GTR}}{\Rightarrow} a = 6$$

GTR:
`Y1 = √X∗(X-A)/A` und
`solve(fnInt(Y1Ç,X,Ø,A)-3,A,8)` → 6

c)