Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2002, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@oskar-reime-gymnasium.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 01.05.07.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 35 BE,
im Teil B 25 BE,
im Teil C 15 BE,
im Teil D 15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“[1]

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
90 BE	90-86	85-82	81-77	76-73	72-68	67-64	63-59	58-55	54-50	49-46	45-41	40-37	36-31	30-25	24-19	18-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jedes a ($a \in \mathbb{R}, a > 0$) ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = -e^{2ax} + 4e^{ax} + 5$ ($x \in \mathbb{R}$).

a) Geben Sie von der Funktion $f_{1/2}$ Näherungswerte für die Nullstelle, die Koordinaten des lokalen Extrempunktes und dessen Art sowie eine Gleichung der Asymptote an. Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Funktion f_a genau eine Nullstelle bei $x_0 = \frac{\ln 5}{a}$ besitzt.
Der Graph der Funktion fa besitzt genau einen Extrem- und genau einen Wendepunkt.
Ermitteln Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes und weisen Sie seine Art nach.

1 Diese werden hier nicht wiedergegeben. Sie enthalten zumeist eine Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Manchmal eine Tabelle zur Summenfunktion der Binomialverteilung. Beides kann durch Verwendung des GTR leicht ersetzt werden. Die Tabellen finden Sie im Inhalt der Online-Ausgabe dieses Textes www.sn.schule.de/~matheabi.

Begründen Sie, dass für jedes a der Graph der Funktion f_a den gleichen Wendepunkt hat.
Erreichbare BE-Anzahl: 12

c) Der Graph der Funktion f_a und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Die Tangente und die Normale an den Graphen der Funktion f_a im Schnittpunkt des Graphen der Funktion f_a mit der Ordinatenachse bilden mit der Abszissenachse ein Dreieck. Es existiert genau ein Wert a, für den dieses Dreieck gleichschenklig ist.
Berechnen Sie diesen Wert a. Erreichbare BE-Anzahl: 6

e) Der Graph der Funktion $f_{½}$ und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig.
Betrachtet werden Kreise, deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist und die diese Fläche vollständig enthalten.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Radius des kleinstmöglichen dieser Kreise zu ermitteln, und geben Sie einen Näherungswert für diesen Radius an. Erreichbare BE-Anzahl: 4

f) Für jedes n ($n \in \mathbb{R}$) ist eine Gerade g_n mit der Gleichung $g_n(x) = (2e - e^2) \cdot x + n$ ($x \in \mathbb{R}$) gegeben.
Ermitteln Sie den Wert n, für den die Gerade gn Tangente an den Graphen der Funktion $f_{½}$ ist.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(6 | 1 | 0), B(6 |6 | 15/4), D(2 |1 | 0) und $S_t\left(4\left|\frac{7}{2}+\frac{3}{5}t\right|\frac{15}{8}-\frac{4}{5}t\right)$ ($t \in \mathbb{R}$, $t > 0$) gegeben.

Für jedes t sind die Punkte A, B, C, D und S_t Eckpunkte einer Pyramide mit der rechteckigen Grundfläche ABCD.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes C.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene E an, in der die Grundfläche jeder dieser Pyramiden liegt.
Treffen Sie eine Aussage zur Lage der Ebene E im Koordinatensystem.
Weisen Sie nach, dass jede dieser Pyramiden gerade ist.
Zeigen Sie, dass t die Höhe jeder dieser Pyramiden ist und geben Sie deren Volumen in Abhängigkeit von t an. Erreichbare BE-Anzahl: 10

b) Es existiert genau eine Pyramide $ABCDS_t$, für die die Seitenfläche ABS_t mit der Grundfläche einen Neigungswinkel von 45° bildet. Ermitteln Sie den zugehörigen Wert t. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Begründen Sie, dass der Flächeninhalt der Seitenfläche ABS_t stets größer als $\frac{24}{5}$ ist.
Berechnen Sie den Wert t, für den der Flächeninhalt der Seitenfläche ABS_t $\frac{65}{4}$ beträgt.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Stellen Sie die Pyramide $ABCDS_5$ in einem kartesischen Koordinatensystem dar.
Eine Ebene F enthalte die Punkte A und D und halbiere die Höhe der Pyramide $ABGDS_5$.
Die Schnittfigur zwischen der Ebene F und der Pyramide $ABCDS_5$ ist ein Viereck.
Geben Sie die Art dieses speziellen Vierecks an und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Ermitteln Sie, in welchem Verhältnis die Ebene F die Seitenkante $\overline{BS_5}$ teilt.
Erreichbare BE-Anzahl: 7

Teil C: Stochastik

Eine Produktionsstätte zur Herstellung von Hochleistungsakkus für Handys und Laptops wird aufgebaut. Beim Probebetrieb werden der Produktion Stichproben entnommen, um die Qualität der Erzeugnisse zu untersuchen. Dabei wird nach festen Kriterien zwischen Qualität I, Qualität II und Ausschuss unterschieden.

a) Es wurden folgende sechs Stichproben durchgeführt:

Nummer der Stichprobe	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Akkus in der Stichprobe	20	25	20	30	35	25
Anzahl der Akkus mit der Qualität I	16	21	18	24	27	20
Anzahl der Akkus mit der Qualität II	3	4	1	3	4	3

Geben Sie auf der Grundlage dieser Stichproben einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit an, dass ein zufällig ausgewähltes Produkt Ausschuss ist. Erreichbare BE-Anzahl: 1

Nach Anlauf der Produktion beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Produkt die Qualitätsstufe I besitzt, 86% und dafür, dass es die Qualitätsstufe II besitzt, 12%.

b) Jeweils 50 Akkus werden in einer Kiste verpackt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
Ereignis A: Eine zufällig ausgewählte Kiste enthält mehr als 45 Akkus der Qualitätsstufe I.
Ereignis B: Mindestens 8, aber weniger als 12 Akkus einer zufällig ausgewählten Kiste besitzen die Qualitätsstufe II oder sind Ausschuss.
Ereignis C: Unter fünf zufällig ausgewählten Kisten gibt es mehr als zwei, die kein Ausschussstück enthalten. Erreichbare BE-Anzahl: 7

c) Von der Endkontrolle weiß man, dass Akkus der Qualität I zu 95% als solche erkannt und zu 5% fälschlicherweise der Qualität 11 zugeordnet werden.
Akkus der Qualität I1 werden zu 85% als solche erkannt, zu 5% aber fälschlicherweise der Qualitätsstufe I und zu 10% fälschlicherweise dem Ausschuss zugeordnet. Ausschussstücke werden mit 92% als solche erkannt, zu 8% aber fälschlicherweise der Qualitätsstufe 1I zugeordnet.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig herausgegriffener und überprüfter Akku richtig eingestuft wurde.
Ermitteln Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein der Qualität II zugeordneter Akku tatsächlich dieser Qualitätsstufe angehört. Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Betrachtet wird die Zufallsgröße W, die die bei der Produktion auftretenden Ausschussakkus zählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 1000 produzierten Akkus der Wert der Zufallsgröße W um weniger als 3 von dem zu erwartenden Wert abweicht.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Für jedes t ($t \in \mathbb{R}$, $t > 0$) ist eine Funktion f_t gegeben durch $y=f_t(x)=\ln(2t-x)-x^2$ ($x \in \mathbf{D}_{ft}$).

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion ft und eine Gleichung der Asymptote an.
Der Graph der Funktion ft besitzt genau einen lokalen Extrempunkt.
Berechnen Sie die Extremsteile. Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Zeigen Sie durch Integration, dass für alle reelle Zahlen $x > 0$ gilt: $\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x + c$ ($c \in \mathbb{R}$).
Der Graph der Funktion f_t ($t > \frac{1}{2}$), der Graph der Funktion g mit $g(x)= -x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) und die Ordinatenachse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Wert t, für den der Inhalt dieser Fläche ist. Erreichbare BE-Anzahl: 6

c) Es gibt genau einen Wert t, für den die Funktion f_t genau eine Nullstelle besitzt.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für t. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) die Punkte $A_a(a \mid 0 \mid 0)$, $B_a(0 \mid a \mid 0)$ und $C_a(0 \mid 0 \mid a)$ sowie der Punkt $D_a(a \mid a \mid a)$ gegeben. Das Dreieck $A_aB_aC_a$ ist gleichseitig.

a) Zeigen Sie, dass der Körper $A_aB_aC_aD_a$ ein reguläres Tetraeder (ein Körper, der von genau vier gleichseitigen Dreiecksflächen begrenzt wird) ist.
Außer dem Punkt D_a existiert ein weiterer Punkt, der Eckpunkt eines regulären Tetraeders mit der Seitenfläche $A_aB_aC_a$ ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes. Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Es gibt genau einen Punkt P_a, der von jedem Eckpunkt des regulären Tetraeders $A_aB_aC_aD_a$ den gleichen Abstand hat.
Ermitteln Sie den Wert a, für den der Abstand $3\sqrt{3}$ beträgt. Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Von einem regulären Tetraeder $A_aB_aC_aD_a$ werden durch parallel zu den Seitenflächen führende Schnitte vier zueinander kongruente Tetraeder abgetrennt, deren Kantenlängen $\frac{1}{3}$ der ursprünglichen Tetraederkantenlänge beträgt.
Berechnen Sie den Wert a, für den bei dieser Zerlegung das Volumen des Restkörpers 207 beträgt.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

Lösungsvorschläge

Teil A

a) mit GTR:
Nullstelle: $x_0 \approx 3{,}22$
Koordinaten des Extrempunktes: $P_{Ext}(1{,}39 \mid 9)$
Art des Extremums
Gleichung der Asymptote: $y = 5$

b) Ansatz für Nullstelle: $f_a(x_0) = -e^{2ax_0} + 4e^{ax_0} + 5 = 0$
Substitution: $z = e^{ax_0}$ $\Rightarrow 0 = -z^2 + 4z + 5 \Rightarrow$ $z_{1/2} = 2 \pm 3$
Nachweis der Einzigkeit: für $z_2 = -1$ gibt es keine Lösung aber für $z_1 \Rightarrow x_0$
1. Ableitung: $f'_a(x) = -2a\,e^{2ax} + 4a\,e^{ax}$
2. Ableitung: $f''_a(x) = -4a^2 e^{2ax} + 4a^2 e^{ax}$
Extremstelle: $f'_a(x_E) = 0 \Rightarrow x_E = \dfrac{\ln 2}{a}$
Ansatz für Nachweis des lokalen Maximums: $f''_a(x_E) = -8a^2$
Nachweis des lokalen Maximums
Koordinaten des Extrempunktes: $P_{MAX}\left(\dfrac{\ln 2}{a} \middle| 9\right)$
Begründung für Wendepunkt (3 BE)
Betrachtet man den Graphen, hat man schnell die richtige Vermutung und argumentiert zum Beispiel: wegen $f''_a(0) = -4a^2 e^0 + 4a^2 e^0 = 0$ ist der Wendepunkt unabhängig von a bei W(0 | 8). (Die Einzigkeit des Extrema wurde bereits nachgewiesen, somit braucht keine weitere Ableitung betrachtet zu werden.)

c) Ansatz für Fläche: $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\ln 5}{a}} f_a(x)\,dx$
Stammfunktion: $A = \left[-\dfrac{1}{2a} e^{2ax} + \dfrac{4}{a} e^{ax} + 5x\right]_0^{\frac{\ln 5}{a}}$
Umformungen: insbesondere ist $e^{\frac{a \cdot \ln 5}{a}} = 5$ und $e^{2 \cdot \frac{a \cdot \ln 5}{a}} = 5^2$
Inhalt der Fläche: $A = \dfrac{1}{a}(4 + 5\ln 5) \approx \dfrac{12{,}047}{a}$

d) Variante I: Das Dreieck (siehe Abbildung 1) muss rechtwinklig sein und ist nach Voraussetzung gleichschenklig. Somit ergibt sich für α: $\alpha = 45°$. Damit ist auch der Anstieg der Tangente $m_t = \tan 45° = 1$. Aus $1 = f'_a(0)$ folgt $1 = 2a$ und $a = ½$
Variante II – wie unten beschrieben – ist viel komplizierter:
t: $y = 2a \cdot x + 8$ und n: $y = \dfrac{1}{2a} \cdot x + 8$ mit
$x_{0_1} = -\dfrac{8}{2a}$ und $x_{0_2} = 16a \Rightarrow$
$|-\dfrac{4}{a}| = 16a$ und a = ½

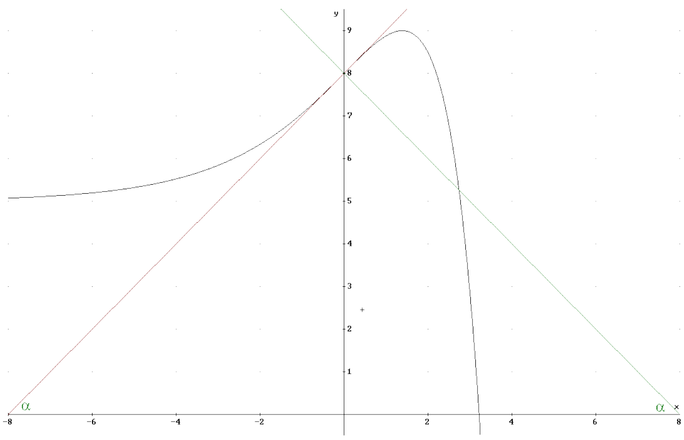
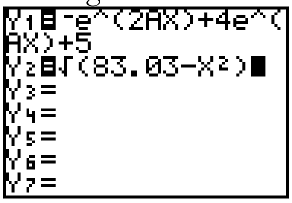
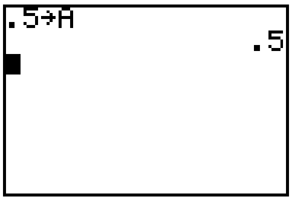


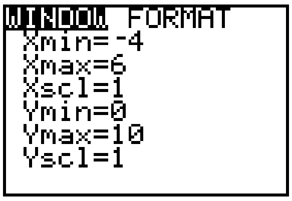
Abbildung 1: Lösungsidee

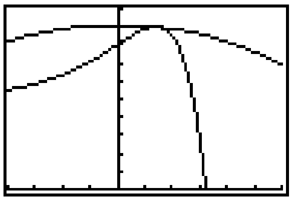
Anstieg der Tangente
Gleichung der Tangente
Gleichung der Normale
Nullstellen
Ansatz für Gleichschenkligkeit
Wert a: $a = \frac{1}{2}$

e) vollständige Beschreibung (3 BE):
Der Radius ergibt sich aus: Maximum für Abstand der Kurvenpunkte $P(x \mid f_a(x))$ zum Koordinatenursprung im Intervall $[0, x_0]$ suchen.
$r^2 = d^2(x) = x^2 + y^2$
mit GTR: `fMax(X²+f½²(X),X,0,3.22)` $\rightarrow x_{Max} = 1.463$ und $r^2 = d^2(x_{Max}) = 83.03$
Probe grafisch mit GTR:







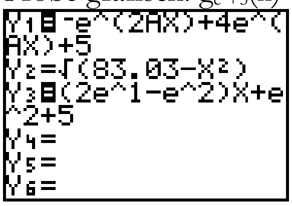


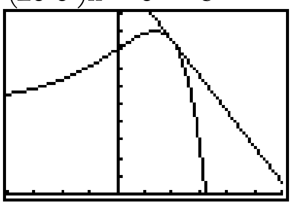
Radius: $r \approx 9{,}11$

f) Ansatz für die Abszisse mit dem gesuchten Anstieg:

$$f'_{\frac{1}{2}}(x_S) = -e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} = 2e - e^2 \quad \Rightarrow \text{offensichtlich ist } x = 2$$

Wer das nicht sieht muss die Ersetzung $e^x = z^2$ anwenden oder den GTR einsetzen {Probe}:
`solve(nDerive(Y1,X,X)-(2e-e^2),x,2)` $\rightarrow 2$
Abszisse mit dem gesuchten Anstieg: $x = 2$
Ordinate mit dem gesuchten Anstieg
Ansatz für Wert n:
gemeinsamer Punkt: $x_S = 2$ und $y_S = f_{\frac{1}{2}}(2) = g_n(2) \Rightarrow n = f_{\frac{1}{2}}(2) - 4e + 2e^2$
Probe grafisch: $g_{e^2+5}(x) = (2e-e^2)x + e^2 + 5$





Wert n: $n = e^2 + 5$

Teil B

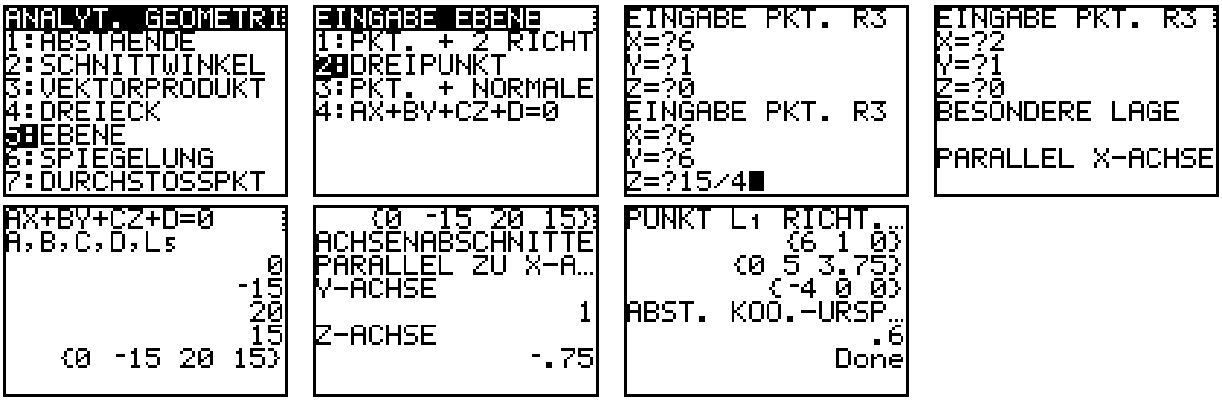
Hinweis: offensichtlich ist mit S_t eine Halbgerade ($t > 0$) gegeben:

$$S_t\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix} + t \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{(Gleichung 1)}$$

a) Ansatz für die Koordinaten des Punktes C: $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{AD}$

Koordinaten des Punktes C: $C\left(2 \middle| 6 \middle| \frac{15}{4}\right)$

Gleichung der Ebene E: mit GTR prgmGeometri



E: 3y – 4z = 3 | x ∈ IR oder

E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\5\\3{,}75\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}\ (r,s\in\mathbb{R})$ bzw. $\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}+r^*\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}+s^*\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ (r^*,\ s^*\in\mathbb{R})$

Aussage zur Lage der Ebene E: parallel zur x-Achse

Koordinaten des Mittelpunktes der Grundfläche: $\vec{OM}=\frac{\vec{oB}+\vec{CD}}{2}$

Ansatz für Nachweis für die gerade Pyramide:

z. B.: S_0 = M und Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}$ von E ist parallel zur Richtung S_t (Gleichung 1)

Nachweis für die gerade Pyramide

Nachweis für Höhe (2 BE): z. B.: der Richtungsvektor von S_t hat die Länge 1 ⇒

$$\left|\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}\right|=1$$ damit ist t die Höhe in Längeneinheiten

$V_t=\frac{1}{3}A_G\cdot h=\frac{1}{3}|\vec{AB}||\vec{AD}|\cdot t \Rightarrow$ Volumen: $V=\frac{25}{3}t$

b) Lösungsidee: (Abbildung 2 und 3)

$a=\frac{|\vec{AD}|}{2}=2$ und $\tan 45°=\frac{t}{a}=\frac{t}{2}=1 \Rightarrow t=2$

Probe mit GTR prgmGeometri: Schnittwinkel | 2 Ebenen | Eingabe 3 Punkte (ABC) | Eingabe 3 Punkte (ABS_2) ⟶ 45°

Ansatz für Wert t

Wert t: t = 2

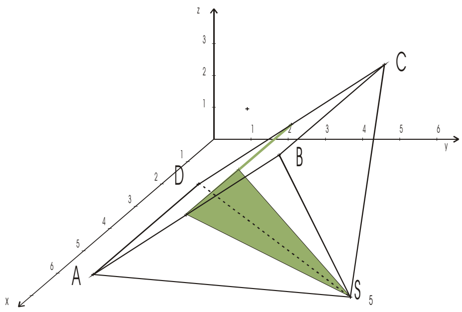


Abbildung 2

c) für t ⟶ 0 wird die Fläche ABS_t minimal:

ABS_0 mit GTR prgmGeometri: Dreieck | Fläche ⟶ 6.25 ⇒

$\frac{24}{5}<6{,}25<F_{ABS_t}$

Begründung

Ansatz für Flächeninhalt:

Höhe im Dreieck: $h^2 = t^2 + a^2 = t^2 + 4$

$|\vec{AB}|=\frac{25}{4}$

$F_{ABS_t}=\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{4}\cdot\sqrt{t^2+4}\ (t>0) \Rightarrow \frac{65}{4}=\frac{25}{8}\sqrt{t^2+4}$

Flächeninhalt

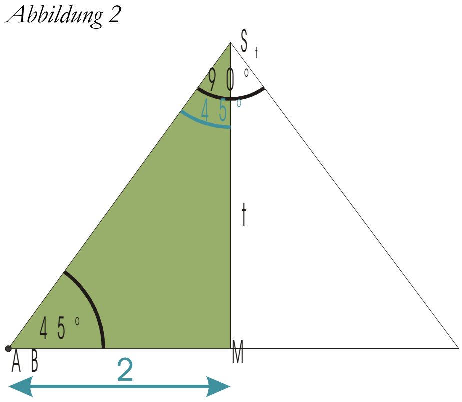


Abbildung 3

Ansatz für Wert t

Wert t: $t=\frac{24}{5}$

d) Zeichnerische Darstellung (2 BE - Abbildung 4)
Art des speziellen Vierecks: Trapez
Begründung für Art des speziellen Vierecks:
$\vec{AD}\|\vec{BC}\|\overrightarrow{B'C'}$ und $|\vec{AD}|\neq|\overrightarrow{B'C'}|$ mit $B'=E_{BCS_5}\cap g_{BS_5}$
und $C'=E_{BCS_5}\cap g_{CS_5}$ (siehe Abbildung 5)
Gleichung der Ebene F: $F_{ADS_{2,5}}$: $y+32z=1$
Koordinaten des Teilungspunktes für $\overline{BS_5}$:

$$F_{ADS_{2,5}}\cap g_{BS_5}\underset{GTR}{=}\begin{pmatrix}14/3\\19/3\\-1/6\end{pmatrix}$$

Teilungsverhältnis für $\overline{BS_5}$: z. B. 2:1

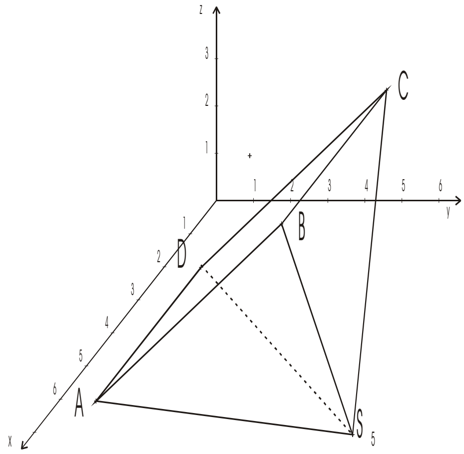


Abbildung 4

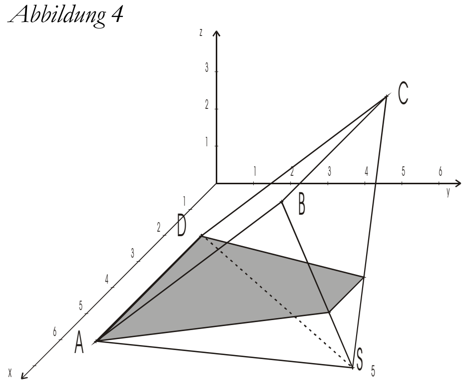


Abbildung 5

Teil C

a) Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit: p ≈ 0,071

							Σ
Anzahl in der Stichprobe	20	25	20	30	35	25	**155**
Anzahl Qualität I	16	21	18	24	27	20	
Anzahl Qualität II	3	4	1	3	4	3	
Anzahl Ausschuss	1	0	1	3	4	2	**11**

b) Ansatz für Wahrscheinlichkeit P(A): P(A) = $B_{50;0.86}(k>45) = 1 - B_{50;0.86}(k\leq45)$
GTR: `1-binomcdf(50,.86,45)` → .1528
Wahrscheinlichkeit P(A): P(A) ≈ 0,1528
Ansatz für Wahrscheinlichkeit P(B): P(B) = $B_{50;0.14}(8\leq k\leq11)$
GTR: `binomcdf(50,.14,11)-binomcdf(50,.14,7)` → .36078
oder: sum(`binompdf(50,.14,{8,9,10,11}))`
Wahrscheinlichkeit P(B): P(B) ≈ 0,3608
Wahrscheinlichkeit, dass eine Kiste kein Ausschussstück enthält: p = $.98^{50}$ ≈ .3642
Ansatz für Wahrscheinlichkeit P(C): P(C) = $B_{5;p}(k>2) = 1 - B_{5;p}(k\leq2)$
GTR: sum(`binompdf(5,Ans,{3,4,5}))` → .25757
Wahrscheinlichkeit P(C): P(C) ≈ 0,2576

c) Analyse der Aufgabe (z. B.: Baumdiagramm)
Die Zufallsgröße X beschreibe die tatsächliche Qualität mit den Werten I, II und A. Die Zufallsgröße Y beschreibe die Zuordnung des Akkus zur Qualitätsstufe I, II und A.
Die gegebenen Werte in der Notation P(X) bzw. $P_X(Y)$:
P(I) = .86; P(II) = .12; P(A) = .02
$P_I(I) = .95$; $P_I(II,A) = .05$; $P_{II}(I) = .05$; $P_{II}(II) = .85$; $P_{II}(A) = .1$; $P_A(A) = .92$; $P_A(II) = .08$
Ansatz für Wahrscheinlichkeit, dass ein Akku richtig eingestuft wurde:
Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit: $P(I)\cdot P_I(I) + P(II)\cdot P_{II}(II) + P(A)\cdot P_A(A) = P(X=Y)$
Wahrscheinlichkeit, dass ein Akku richtig eingestuft wurde: p ≈ 0,9374
Ansatz für Wahrscheinlichkeit, dass ein Akku dieser Qualitätsstufe angehört:

bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_{Y=II}(X=II)=\frac{P_{X=II}(Y=II)}{P(X=Y)}$

Wahrscheinlichkeit: p ≈ 0,6958

d) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $B_{1000,.02}(18 \leq k \leq 22)$
Wahrscheinlichkeit: z. B.:

p ≈ 0,4275 (unter Verwendung der Binomialverteilung)
GTR: `sum(binompdf(1000,.02,{18,19,20,21,22})` → .4275
p ≈ 0,4277 (unter Verwendung der Normalverteilung mit Korrekturglied)
GTR: `normalcdf(17.5,22.5,20,4.42)` → .4277
p ≈ 0,3486 (unter Verwendung der Normalverteilung ohne Korrekturglied)
GTR: `normalcdf(18,22,20,4.42)` → .3486

Teil D1

a) größtmöglicher Definitionsbereich: $D_{f_t} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 2t\}$
Gleichung der Asymptote, z. B. x = 2t
erste Ableitung: $f_t'(x) = -\frac{1}{2t - x} - 2x$
Ansatz für Extremstelle: $f_t'(x_e) = 0$
Lösungen der quadratischen Gleichung: $0 = 2x_e \cdot 2t - 2x_e^2 + 1 \Rightarrow 0 = x_e^2 - 2tx_e - \frac{1}{2}$
Ausschluss einer Lösung und Angabe der lokalen Extremstelle: $x_e = t - \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}$

b) Ansatz für Nachweis: $\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx$ und Produktregel für Integration mit u' = 1; v = ln x
Nachweis
Ansatz für Fläche: $\int_0^{x_S} f_t(x) - g(x)\, dx = 1$ mit x_S: $f_t(x_S) = g(x_S) \Rightarrow x_S = 2t-1$
weiter mit GTR: `solve(fnInt(ln(2T-X),X,0,2T-1)-1,T,2)` → 1.3591 ≈ e/2
oder Stammfunktion durch Substitution: $\int \ln(2t - x)\, dx = (x - 2t)\ln(2t - x) - x$
Ansatz für Wert t: $2t \cdot \ln(2t) - 2t + 1 = 1$
Wert t: $t = \frac{1}{2}e$

c) Lösungsidee: P_{Max} muss auf der x-Achse liegen
Ansatz für Wert t: $f_t(x_e) = 0$
GTR:
`Y1=ln(2T-X)-X²`
Solver: `eqn=Y1(T-√(T²+.5))`
Näherungswert für t: t ≈ 0,386

Teil D2

a) Ansatz für Nachweis des Tetraeders: Das gleichseitige Dreieck $\Delta A_aB_aC_a = \Delta_1$ hat die Kantenlänge $a \cdot \sqrt{2}$. Zu zeigen ist nun $\overline{A_a D_a} = \overline{B_a D_a} = \overline{C_a D_a} = \sqrt{2} \cdot a$.
Nachweis des Tetraeders (2 BE)
D'_a entsteht z. B. durch Spieglung an Δ_1.
Normale von Δ_1: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch D_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} + u \cdot \vec{n}_1$ und Ebene Δ_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
führt zu $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es folgt: $s = t = \frac{a}{3}$; $u = -\frac{2a}{3}$ und $L\left(\frac{a}{3} \middle| \frac{a}{3} \middle| \frac{a}{3}\right)$.
Koordinaten des Schwerpunktes des Dreiecks $A_aB_aC_a$

$\overrightarrow{OD_a'} = \vec{OL} + \overrightarrow{D_a L}$ bzw. $\overrightarrow{OD_a'} = \overrightarrow{OD_a} + 2 \cdot \overrightarrow{D_a L}$ oder $\overrightarrow{OD_a'} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} + 2u \cdot \vec{n}_1$.

Ansatz für die Ermittlung der Koordinaten des Punktes

Koordinaten des Punktes: $\left(-\frac{a}{3} \middle| -\frac{a}{3} \middle| -\frac{a}{3}\right)$

b) Lösungsidee zur Lage des Punktes P_a:
Mittelpunkt M(x | y | z) der Umkugel der vier Punkte.

I: $\overline{MA_a} = \overline{MB_a}$ ⇒ $\sqrt{(a-x)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (a-y)^2 + z^2}$
II: $\overline{MA_a} = \overline{MC_a}$ ⇒ $\sqrt{(a-x)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (a-z)^2}$
III: $\overline{MA_a} = \overline{MD_a}$ ⇒ $\sqrt{(a-x)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2 + (a-z)^2}$
IV: $\overline{MA_a} = 3\sqrt{3}$ ⇒ $\sqrt{(a-x)^2 + y^2 + z^2} = 3\sqrt{3}$

I': $(a-x)^2 + y^2 = x^2 + (a-y)^2$ ⇒ a = 0 oder **x = y**
II': $(a-x)^2 + z^2 = x^2 + (a-z)^2$ ⇒ a = 0 oder **x = z**
III': I', II' in III $x^2 = (a-x)^2$ ⇒ 2x = a für a ≠ 0

IV': I', II', III' in IV $\sqrt{3x^2} = 3\sqrt{3}$ ⇒ x = 3 ⇒ a = 6

Einfacher wird es mit einem Tafelwerk[2], dass den Umkreisradius zum Tetraeder angibt: $r = \frac{k}{4}\sqrt{6}$.

Mit der Kantenlänge k = √2 a folgt nach Voraussetzung $3\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{12}$.

Koordinaten des Punktes P_a
Ansatz für Wert a Wert a: a = 6

c) Volumen eines abgetrennten Tetraeders: $V_{klein} = a^3/81$
Ansatz für Volumen des Restkörpers: $V_{rest} = V_{gesamt} - 4 \cdot V_{klein}$

Volumen des Restkörpers: $V_{rest} = \frac{23a^3}{81}$

Ansatz für Wert a: $V_{rest} = 207$
Wert a: a = 9

2 Zum Beispiel von Paetec: Formeln und Tabellen für die Sek II – Mathematik und Informatik.