Sächsisches Staatsministerium
für Kultus

Schuljahr **2003/04**

Geltungsbereich:
- Allgemein bildendes Gymnasium
- Abendgymnasium und Kolleg
- Schulfremde Prüfungsteilnehmer

Schriftliche Abiturprüfung
Leistungskursfach Mathematik

- E R S T T E R M I N -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A**, **B** und **C** sowie dem **Wahlteil D**.
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	35 BE,
im Teil B	25 BE,
im Teil C	15 BE,
im Teil D	15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:
- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- 1 Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System
- 1 Tabellen- und Formelsammlung (im Unterricht eingeführt, ohne ausführliche Musterbeispiele)
- Zeichengeräte
- Beiliegende “Materialien für Aufgaben zur Stochastik”

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jede reelle Zahl t $(t > 0)$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$y = f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot (x - 2t) \cdot \sqrt{x} \quad \left(x \in D_{f_t}\right).$$

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und die Nullstellen der Funktion f_t an.

Weisen Sie nach, dass für die zweite Ableitung der Funktion f_t gilt:

$$f_t''(x) = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{3x + 2t}{4x\sqrt{x}} \right)$$

Die Funktion f_t besitzt genau einen lokalen Extrempunkt P_t.

Zeigen Sie, dass für diesen Punkt P_t gilt: $P_t\left(\frac{2}{3}t; -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}t} \right)$.

Untersuchen Sie die Art dieses Extremums.

Begründen Sie, dass die Funktion f_t keinen Wendepunkt besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 12

b) Der lokale Extrempunkt jeder Funktion f_t liegt auf dem Graphen ein und derselben Funktion.

Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Funktion.

Es gibt genau einen Wert t, für den der Abstand des lokalen Extrempunktes der Funktion f_t vom Koordinatenursprung $\frac{1}{12} \cdot \sqrt{73}$ beträgt.

Ermitteln Sie diesen Wert t.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Der Graph jeder Funktion f_t begrenzt mit der Abszissenachse eine Fläche vollständig. Durch Rotation dieser Fläche um die Abszissenachse entsteht jeweils ein Körper.

Ermitteln Sie das Volumen dieses Körpers für t = 2.

Berechnen Sie den Wert t, für den das Volumen dieses Körpers 108π beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

d) Die Tangente an den Graphen der Funktion f_t im Punkt $R_t\left(2t; f_t(2t)\right)$ und die Koordinatenachsen bilden ein Dreieck.

Berechnen Sie den Wert t, für den der Flächeninhalt des Dreiecks 1 beträgt.

Berechnen Sie den Wert t, für den das Dreieck gleichschenklig ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

Fortsetzung Seite 3

Fortsetzung Teil A: Analysis

e) Der Graph der Funktion f_2 und die Abszissenachse begrenzen eine Fläche vollständig. Für jedes b $(b \in R;\ 0 < b < 4)$ teilt die Gerade mit der Gleichung $x = b$ diese Fläche in zwei Teilflächen.
Es gibt Werte b, für die der Inhalt einer Teilfläche doppelt so groß ist wie der Inhalt der anderen Teilfläche.

Ermitteln Sie einen Näherungswert (eine Stelle nach dem Komma) für einen solchen Wert b.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil B: Geometrie/Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind

die Gerade g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $(s \in R)$,

für jedes a $(a \in R)$ eine Gerade h_a durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -6 \end{pmatrix}$ $(t \in R)$ sowie

für jedes k $(k \in R)$ eine Ebene E_k durch $(6k-3) \cdot x + 2 \cdot y + (2k-1) \cdot z = 6$ gegeben.

a) Geben Sie eine Gleichung einer Geraden an, die die Gerade g senkrecht schneidet.

Es existiert genau ein Wert k, für den die Gerade g in der Ebene E_k liegt.
Ermitteln Sie diesen Wert k.

Zeigen Sie, dass für jeden anderen Wert k die Ebene E_k parallel zur Geraden g liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen den Geraden g und h_a in Abhängigkeit vom Parameter a.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Ermitteln Sie alle Werte a, für die der Schnittwinkel zwischen der Geraden h_a und der x-y-Ebene $60°$ beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Die Geraden g und h_{-4} verlaufen windschief zueinander.
Es existiert genau eine Gerade, die durch den Punkt $A(2; 3; 16)$ verläuft und die Geraden g und h_{-4} senkrecht schneidet.

Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

e) Die Ebene E_k schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten S_{x_k}, S_{y_k} und S_{z_k}.
Diese drei Punkte und der Koordinatenursprung sind Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.

Ermitteln Sie alle Werte k $\left(k > \frac{1}{2}\right)$, für die das Volumen dieser Pyramide $\frac{3}{2}$ beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

Teil C: Stochastik

Für die Behandlung einer speziellen Krankheit werden Tabletten verwendet, die die Form gerader Kreiszylinder besitzen. Bei jeder Tablette ist auf genau einer der beiden Kreisflächen ein Firmenlogo eingeprägt. Zur Vermeidung von Einnahmefehlern bei der gängigen „Dreiwochentherapie“ erstellt der Produzent jeweils Packungen mit 21 Tabletten.
Bei der Herstellung werden die Tabletten in einen Plaststreifen eingelegt, der Vertiefungen in zwei Reihen enthält. In der ersten Reihe befinden sich 10 solcher Vertiefungen, in der zweiten 11.
Die Bestückung der Vertiefungen mit stets 21 Tabletten erfolgt zufällig. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Tablette das Firmenlogo sichtbar ist, beträgt 0,5.

a) Geben Sie die Anzahl aller verschiedenen Bestückungen an, bei denen das Firmenlogo genau zehnmal sichtbar ist.

Ermitteln Sie, wie viele verschiedene Bestückungen möglich sind, bei denen das Firmenlogo in jeder der beiden Reihen mindestens viermal, insgesamt jedoch genau zehnmal sichtbar ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Berechnen Sie für eine Tablettenpackung die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass das Firmenlogo genau zehnmal sichtbar ist und dafür, dass das Firmenlogo höchstens viermal sichtbar ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

In einer Klinik werden ausschließlich Patienten mit dieser Erkrankung behandelt. Dabei werden nur diese Tabletten eingesetzt. In 90% aller Fälle ist die Behandlung mit diesem Medikament erfolgreich. Die Patientenkartei ist alphabetisch angelegt, unter dem Aspekt „Heilung“ oder „Nichtheilung“ folglich zufällig.

c) Ermitteln Sie die Anzahl der Karteikarten, die der Patientenkartei mindestens entnommen werden müssen, damit sich unter den entnommenen Karten mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens eine von einem Patienten befindet, bei dem das Medikament keine Heilung bewirkte.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Die Zufallsgröße Z gibt die Masse des wirksamen Bestandteils jeder Tablette in Milligramm an. Der Produzent gibt an, dass Z normalverteilt ist mit einem Erwartungswert von 100 mg und einer Standardabweichung von 2 mg.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Masse des wirksamen Bestandteils je Tablette mindestens 95 mg und höchstens 103 mg beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Neuere Studien haben ergeben, dass Nebenwirkungen enorm ansteigen, wenn die Masse des wirksamen Bestandteils je Tablette 101 mg überschreitet. Der Hersteller entschließt sich daher, die Technologie zu ändern. In Abhängigkeit von einem wählbaren Parameter a $(a \in R, a > 0)$ kann man erreichen, dass die wirksame Masse normalverteilt ist mit dem Erwartungswert 100a Milligramm und der Standardabweichung 2a Milligramm.

e) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse des wirksamen Bestandteils 101 mg übersteigt, soll höchstens ein Tausendstel betragen.

Ermitteln Sie, wie groß der Parameter a dabei höchstens sein darf.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D1: Analysis

Betrachtet wird das Wachstum von Maispflanzen, die nach der ersten Woche (vom Aufgehen der Saat gerechnet) eine Höhe von 5,0 cm haben und nach ca. 25 Wochen geerntet werden.

a) Die durchschnittliche Pflanzenhöhe w (in cm) kann durch die Zahlenfolge (w_n) mit der Zuordnungsvorschrift $w_{n+1} = w_n \cdot (1{,}44 - 0{,}002 \cdot w_n)$; $w_1 = 5{,}0$ beschrieben werden. Dabei sei n die Anzahl der Wachstumswochen.
Geben Sie Näherungswerte für die Folgeglieder w_2, w_3 und w_4 an.

Die allgemeine Zuordnungsvorschrift für derartige Wachstumsprozesse hat die Form
$$w_{n+1} = w_n + q \cdot w_n \cdot (G - w_n); \quad w_1 \quad (G, q \in \mathbb{R}, q > 0).$$
(G und q sind die Maßzahlen wachstumsbestimmender Parameter.)

Zeigen Sie, dass sich die Zuordnungsvorschrift der Zahlenfolge (w_n) in dieser Form schreiben lässt.

Geben Sie die Werte G und q für den speziellen Wachstumsprozess an.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Für jeden Wert der Parameter a bzw. b soll dieser Wachstumsprozess nun durch die stetige Wachstumsfunktion h mit $w = h(t) = \dfrac{220}{1 + b \cdot e^{-at}}$ $(t \in \mathbb{R}, 1 \le t \le 25)$ beschrieben werden, wobei h(t) der Pflanzenhöhe der Maispflanze zur Zeit t (in Wochen) entspricht.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion h folgender Gleichung genügt:
$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{a}{220} \cdot h(t) \cdot (220 - h(t)).$$
(Dabei ist $\frac{d}{dt}h(t)$ die erste Ableitung der Funktion h(t) nach t. Sie beschreibt die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze.)

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Für einen Wachstumsprozess gelte h(5) = 20,4 und h(10) = 92,9.

Berechnen Sie Näherungswerte für die Parameter a und b (drei Stellen nach dem Komma).

Berechnen Sie für diesen Prozess die Wachstumshöhe nach 25 Wochen.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

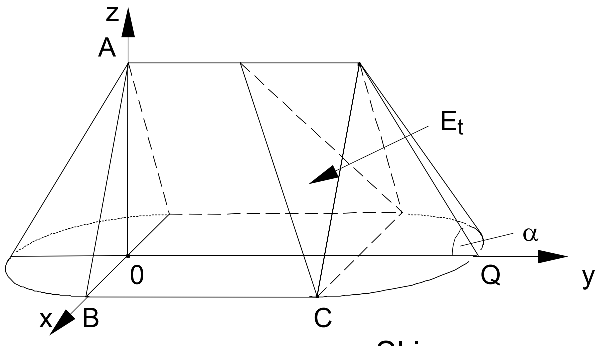
d) Für einen Wachstumsprozess werden die Parameter a=0,4 und b=70 angenommen. Eine Woche vor dem Zeitpunkt, bei dem die Pflanze die größte Wachstumsgeschwindigkeit hat, soll sie gedüngt werden.

Ermitteln Sie, nach wie vielen Wochen etwa die Düngung erfolgen muss.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Aufgabe D2: Geometrie/Algebra

Eine Halde hat die geometrische Form eines dreiseitigen geraden Prismas mit zwei angesetzten geraden halben Kreiskegeln. Ihre Lage in einem kartesischen Koordinatensystem wird durch die Punkte $A(0;0;12)$, $B(18;0;0)$ und $C(18;40;0)$ beschrieben (siehe nicht maßstäbliche Skizze).
1 Einheit entspricht 1 Meter.



Skizze

a) Ermitteln Sie die Größe des Böschungswinkels α.

Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der gesamten Halde. (Die Fläche in der x-y-Koordinatenebene gehört nicht zur Haldenoberfläche.)

Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Ein Bagger trägt die Halde schichtweise vom Punkt Q aus ab.
Dabei liegt nach dem Abtragen einer vollständigen Schicht der neu entstandene Teil der Oberfläche in einer Ebene E_t mit der Gleichung

$$2y + 3z = 116 - 2t \quad (t \in R;\ 0 \leq t \leq 40).$$

Berechnen Sie das Volumen des abgebaggerten Materials, wenn der Punkt C in einer dieser Ebenen E_t liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

c) Vom Punkt $P(48;20;0)$ aus war ein Teil der Oberfläche der ursprünglichen Halde einsehbar.

Ermitteln Sie den Inhalt dieses Teils der Oberfläche.

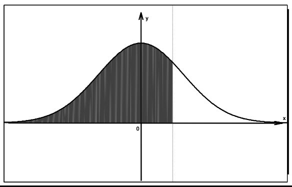
Erreichbare BE-Anzahl: 3

Materialien für Aufgaben zur Stochastik

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

$$\Phi(-z)=1-\Phi(z)$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000