

Teil A Analysis

gegeben $f_a(x) = (2x - 1)e^{ax}$ ($x \in D_{f_a}; a \in \mathbb{R}, a > 0$)

- a) - Angabe des größtmöglichen Definitionsbereiches
 Beschränkungen durch enthaltene elementare Fktn: keine
 Beschränkungen durch Art der Zusammensetzung: keine
 $D_{f_a} : x \in \mathbb{R}$

Ermittlung

- Schnittpunkt mit y-Achse

$$f_a(0) = (0 - 1)e^0 = -1 \Rightarrow S_{f_a, y}(0; -1)$$

- Schnittpunkt mit x-Achse

$$f_a(x_N) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1. 0 = 2x_N - 1 \Leftrightarrow x_N = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{f_a, x}\left(\frac{1}{2}; 0\right) \\ 2. 0 = e^{ax} \text{ keine Lösung} \end{cases}$$

- Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte

I. mögliche Extremstellen (notwendige Bedingung für Existenz von Extrema $f'_a(x_E) = 0$)

$$f'_a(x) = 2e^{ax} + (2x - 1)ae^{ax} = (2ax - a + 2)e^{ax}$$

$$f'_a(x_E) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1. 0 = 2ax_E - a + 2 \Leftrightarrow x_E = \frac{a - 2}{2a} \\ 2. 0 = e^{ax} \text{ keine Lösung} \end{cases}$$

II. Nachweis und Art der Extrema

$$f''_a(x) = 2ae^{ax} + (2ax - a + 2)ae^{ax} = (2ax - a + 4)ae^{ax}$$

$$f''_a(x_E) = \left(2a \frac{a - 2}{2a} - a + 4\right)ae^{\frac{a(a-2)}{2a}} = (a - 2 - a + 4)ae^{\frac{a}{2} - 1} = 2ae^{\frac{a}{2} - 1} > 0 \Rightarrow \text{lok. Minimum}$$

III. Berechnung der y-Koordinate

$$f_a(x_E) = \left(2 \frac{a - 2}{2a} - 1\right)e^{\frac{a}{2} - 1} = \left(1 - \frac{2}{a} - 1\right)e^{\frac{a}{2} - 1} = -\frac{2}{a}e^{\frac{a}{2} - 1} \Rightarrow T\left(\frac{a - 2}{2a}; -\frac{2}{a}e^{\frac{a}{2} - 1}\right)$$

- Nachweis, dass alle Funktionen der Schar genau 2 gemeinsame Pkte besitzen

$$f_{a_1}(x_S) = f_{a_2}(x_S) \Leftrightarrow$$

$$(2x_S - 1)e^{a_1 x_S} = (2x_S - 1)e^{a_2 x_S} \stackrel{2x_S - 1 \neq 0}{\Leftrightarrow} e^{a_1 x_S} = e^{a_2 x_S} \Leftrightarrow a_1 x_S = a_2 x_S \Leftrightarrow x_{S1} = 0$$

$$\Updownarrow 2x_S - 1 = 0$$

$$x_{S2} = x_N = \frac{1}{2}$$

Die beiden gemeinsamen Punkte sind die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen!

Angabe der Achsenparallelen Asymptote: $y = 0$ (aus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x)$)

- Angabe des Wertebereiches: $W_{f_a} : y \in \mathbb{R}, y \geq y_T = -\frac{2}{a}e^{\frac{a}{2} - 1}$ (stetige Fkt mit lok. Min.)

b) - Nachweis, dass alle f_a genau einen Wendepunkt haben

I. notwendige Bedingung für die Existenz von WP:

$$f''_a(x_W) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1. 2ax_W - a + 4 = 0 \Leftrightarrow x_W = \frac{a - 4}{2a} \\ 2. ae^{ax_W} = 0 \text{ keine Lösung} \end{cases}$$

II. Nachweis der Existenz

$$f'''_a(x) = 2aae^{ax} + (2ax - a + 4)a^2e^{ax} = (2ax - a + 6)a^2e^{ax}$$

$$f'''_a(x_W) = \left(2a \frac{a - 4}{2a} - a + 6\right)a^2e^{\frac{a(a-4)}{2a}} = 2a^2e^{\frac{a-4}{2}} \neq 0 \Rightarrow \text{WP existiert an der Stelle } x_W$$

aus I. und II. folgt, dass jede f_a genau einen WP besitzt

Aufstellung der Ortskurve der WP

$$x_W = \frac{a-4}{2a} \Leftrightarrow 2ax_W = a-4 \Leftrightarrow 4 = a - 2ax_W = a(1-2x_W) \Leftrightarrow a = \frac{4}{1-2x_W}$$

$$f_a(x_W) = (2x_W - 1)e^{\frac{4}{1-2x_W}x_W} \Rightarrow g(x) = (2x - 1)e^{\frac{4x}{1-2x}}$$

Untersuchung des Definitionsbereiches von g

Beschränkungen durch enthaltene elementare Fktn: $t(x) = \frac{4x}{1-2x} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} 1-2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$

Beschränkungen durch Art der Zusammensetzung: keine

$$D_g : x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{2}$$

c) - Berechnung der unbestimmten Integrals $\int f_a(x) dx$

Analyse des Funktionsterms:

$$f_a(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = f_1(x) \cdot a(i(x))$$

Funktionsterm ist ein Produkt aus 2 Faktoren, wobei der 2. Faktor eine verkettete Funktion mit linearer innere Funktion ist

Bereitstellung der zu verwendenden Integrationsregeln

$$\text{partielle Integration: } \int (f_1(x)f_2(x))dx = f_1(x)F_2(x) - \int (f_1'(x)F_2(x))dx$$

zur Bestimm. der Stammfkt. $F_2: F_2(x) = \frac{1}{m} A(i(x))$

$$f_1(x) = 2x - 1: f_1'(x) = 2$$

$$f_2(x) = e^{ax} : \left\{ \begin{array}{l} a(i) = e^i : A(i) = e^i \\ i(x) = ax : m = a \end{array} \right\} F_2(x) = \frac{1}{a} e^{ax}$$

Berechnung des Integrals

$$\begin{aligned} I &= (2x-1) \frac{1}{a} e^{ax} - \int \left(2 \frac{1}{a} e^{ax} \right) dx = (2x-1) \frac{1}{a} e^{ax} - \frac{2}{a} \int e^{ax} dx = \\ &= (2x-1) \frac{1}{a} e^{ax} - \frac{2}{a} \frac{1}{a} e^{ax} + c = \frac{1}{a} \left(2x-1 - \frac{2}{a} \right) e^{ax} + c \end{aligned}$$

Berechnung derjenigen Funktion für die $F_{a_0}(0) = 0$

$$F_{a_0}(0) = \frac{1}{a_0} \left(2 \cdot 0 - 1 - \frac{2}{a_0} \right) e^{a_0 \cdot 0} + c = \frac{1}{a_0} \left(-1 - \frac{2}{a_0} \right) \cdot 1 + c = c - \frac{1}{a_0} - \frac{2}{a_0^2} = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{a_0} + \frac{2}{a_0^2}$$

$$F_{a_0}(x) = \frac{1}{a_0} \left(2 \cdot x - 1 - \frac{2}{a_0} \right) e^{a_0 \cdot x} + \frac{1}{a_0} + \frac{2}{a_0^2}$$

d) - Berechnung der Fläche

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_b^0 f_2(x) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{2} (2x-1-1) e^{2x} \right]_b^0 \right| = \left| \left[(x-1) e^{2x} \right]_b^0 \right| = \left| (b-1) e^{2b} - (0-1) e^0 \right| = \\ &= \left| (b-1) e^{2b} + 1 \right| = A(b) \end{aligned}$$

b	-2	-10	-100
A(b)	0,945	0,9999	1

Vermutung für den Grenzwert: $\lim_{b \rightarrow -\infty} A(b) = 1$

e) - Berechnung eines Rotationsvolumens um die x-Achse

$$V_{rx} = \left| \pi \int_{-1}^0 (f_2(x))^2 dx \right| \stackrel{GTR}{\approx} 1,78$$

f) - Extremwertproblem

Aufstellung der Zielfunktion

Extremgröße: Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks $A_D = \frac{1}{2}ab$

Nebenbedingungen: $a = |u|$
 $b = |f_2(u)| = |(2u-1)e^{2u}|$

Zielfunktion: $A_D = \frac{1}{2}|u|(2u-1)e^{2u} = A_D(u) \quad (u \in \mathbb{R}, u < 0)$

Berechnung des lok. Maximums der Zielfunktion (GTR): $H(-0,81; 0,21)$

Für $u = -0,81$ hat das zugehörige Dreieck den maximalen Flächeninhalt von 0,21FE.

Teil B Geometrie/Algebra

geg.: Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R});$ Geraden $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}; t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$

a) - Extremwertproblem

- Aufstellung der Zielfunktion

Extremgröße: Abst. eines Pkts $P(x_P; y_P; z_P)$ vom Koordinatenursprung: $d = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}$

Nebenbedingung P sind die Durchstoßpunkte der Geraden g_t durch die x-y-Ebene

Ermittlung der Durchstoßpunkte der Geraden g_t durch die x-y-Ebene

Bedingung: $z = 0 = 4 + s_{xy}t \Leftrightarrow s_{xy} = -\frac{4}{t}$

Berechnung der x- und y-Koordinate: $x_{xy} = 0,5 + \frac{8}{t}; y_{xy} = 4 + \frac{4}{t}$

Koordinaten der Durchstoßpunkte: $D_t\left(\frac{1}{2} + \frac{8}{t}; 4 + \frac{4}{t}; 0\right)$

Einsetzen in die Ausgangsbeziehung:

Zielfunktion: $d = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{8}{t}\right)^2 + \left(4 + \frac{4}{t}\right)^2 + 0^2} = d(t) \quad (t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$

- Berechnung der lokalen Extrema der Zielfunktion

GTR: $T(-4; 3,35)$

Für $t = -4$ hat der Durchstoßpunkt der zugehörigen Geraden den minimalen Abstand von 3,35LE vom Koordinatenursprung.

- Angabe der Koordinaten dieses Punktes: $D_{t_{\min}}(-1,5; 3; 0)$

b) - Ermittlung der Gleichung derjenigen Ebene, die alle Geraden g_t enthält

Aufstellung der Ebenengleichung

Stützvektor: $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix};$ Richtungsvektor 1 für $t=0$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$ RV2 für $t=1$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

GTR: $E: 2x - 4y = -15$

Die Ebene E ist eine zur x-y-Ebene senkrechte Ebene (bzw. zur z-Achse parallele Ebene). D.h., die Grundfläche des gesuchten Prismas liegt in der x-y-Ebene ($z=0$), die Deckfläche liegt in einer zur x-y-Ebene parallelen Ebene ($z=k$) und die x-z-Ebene, y-z-Ebene und die Ebene E bilden die Seitenflächen.

Gesucht ist die Oberfläche desjenigen Prismas, für das das zugehörige Volumen 112,5VE beträgt

Oberfläche des Prismas: $A_{\text{OPr}} = 2A_G + U_G \cdot h \quad (1)$

Volumen des Prismas: $V_{\text{Pr}} = A_G \cdot h = 112,5 \quad (2)$

Die Grundfläche ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten

a ... Betrag der x-Koordinate des Durchstoßpunktes der y-z-Achse durch die Ebene E

$$y = 0; z = 0: 2x_N = -15 \Leftrightarrow x_N = -\frac{15}{2} \Rightarrow a = 7,5$$

b ... Betrag der y-Koordinate des Durchstoßpunktes der x-z-Achse durch die Ebene E

$$x = 0; z = 0: -4y_N = -15 \Leftrightarrow y_N = \frac{15}{4} \Rightarrow b = 3,75 \Rightarrow a = 2b$$

damit gilt:

$$A_G = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}2bb = b^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2 \quad (3)$$

$$U_G = a + b + c = 2b + b + \sqrt{(2b)^2 + b^2} = 3b + \sqrt{5}b = (3 + \sqrt{5})b = (3 + \sqrt{5})\frac{15}{4} \quad (4)$$

Umstellung von (2) nach h und Einsetzung in (2) ergibt: $A_{OPr} = 2A_G + U_G \cdot \frac{V_{Pr}}{A_{Gr}}$

Einsetzen von (2), (3), (4) in (1): $A_{OPr} \stackrel{GTR}{\approx} 185,2$

c) - Ermittlung der Parameter t_1, t_2 für die gilt: $\angle(g_t; E_{xy}) = 60^\circ$

Als Winkel zwischen einer Gerade und einer Ebene bezeichnet man den Ergänzungswinkel zu 90° zwischen dem Richtungsvektor der Gerade und dem Normalenvektor der Ebene.

$$\angle(g, E) = \alpha: |\vec{n} \cdot \vec{a}| = |\vec{n}| |\vec{a}| \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\text{Normalenvektor der x-y-Ebene: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; |\vec{n}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\text{Richtungsvektor der Geraden: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}; |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + t^2} = \sqrt{5 + t^2}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \right| = 1 \cdot \sqrt{5 + t^2} \cdot \cos(90^\circ - 60^\circ)$$

$$|0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot t| = \sqrt{5 + t^2} \cos 30^\circ$$

$$|t| = \sqrt{5 + t^2} \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{2|t|}{\sqrt{3}} = \sqrt{5 + t^2} \Leftrightarrow \frac{4t^2}{3} = 5 + t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 = 15 + 3t^2 \Leftrightarrow t^2 = 15 \Leftrightarrow |t| = \sqrt{15} \Rightarrow t_1 = -\sqrt{15}; t_2 = \sqrt{15}$$

Angabe der Geradengleichungen:

$$g_{t_1}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\sqrt{15} \end{pmatrix}; g_{t_2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \sqrt{15} \end{pmatrix}$$

d) - Berechnung desjenigen t_s für das sich die Geraden h und g_{t_s} schneiden

$$1,5 = 0,5 + 2s \Rightarrow s = 0,5$$

$$0,5 + 4u = 4 + 2 \stackrel{s=0,5}{\Rightarrow} u = 1$$

$$1 + u = 4 + t_s s \Rightarrow 2 = 4 + 0,5t_s \Leftrightarrow t_s = -4$$

Nachweis, dass auf den Geraden h und g_{t_s} Diagonalen von Quadraten liegen können

Ansatz: Diagonalen in Quadraten stehen senkrecht aufeinander, d.h. das Skalarprodukt der Richtungsvektoren muss 0 ergeben

$$\text{RV } h: \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{RV } g_{t_s}: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}; \text{Skalarprod.: } 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = 0 \Rightarrow \text{Beh.}$$

Bestimmung der Eckpunkte desjenigen Quadrates, das einen Flächeninhalt von 8,5FE hat

Ansatz: Alle Eckpunkte liegen auf einer Kugel um den Diagonalschnittpunkt mit der Hälfte der Diagonalenlänge als Radius. Die Schnittpunkte dieser Kugel mit der Geraden h sind die gesuchten Eckpunkte.

- Aufstellung der Kugelgleichung

$$\text{Mittelpunkt: } \vec{x}_M = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4,5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M(1,5;4,5;2)$$

$$\text{Radius: } A_Q = a^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{d^2}{2} = \frac{d=2r}{2} = 4r^2 = 2r^2 = 8,5 \Leftrightarrow r^2 = 4,25$$

$$\text{Kugel: } (x - 1,5)^2 + (y - 4,5)^2 + (z - 2)^2 = 4,25$$

Berechnung der Schnittpunkte von Kugel und Gerade h

Parametrisierung der Kugelgleichung:

$$(1,5 - 1,5)^2 + (0,5 + 4u - 4,5)^2 + (1 + u - 2)^2 = 4,25$$

$$(0)^2 + (4u - 4)^2 + (u - 1)^2 = 4,25$$

$$16u^2 - 32u + 16 + u^2 - 2u + 1 = 4,25$$

$$17u^2 - 34u + 12,75 = 0 \stackrel{GTR}{\Leftrightarrow} u_1 = 0,5; u_2 = 1,5$$

$$\text{mit } u_1 = 0,5: \vec{x}_{E_1} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1(1,5;2,5;1,5)$$

$$\text{mit } u_2 = 0,5: \vec{x}_{E_2} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1,5 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 6,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2(1,5;6,5;2,5)$$

Teil C: Stochastik

a) - Anzahl der verschiedenen dreifarbenen Fan-Sets (3F-Set)

$$N_{3F} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Wahrscheinlichkeit für die Auswahl eines 3F-Sets

$$P(3F) = \frac{N_{3F}}{N_{ges}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{24}{4^3} = 0,3750$$

b) - 100 Sets enthalten 37 3F-Sets

Ereignis B: bei 10maligem Ziehen (ohne Zurücklegen) wird kein 3F-Set entnommen

$$P(B) = \frac{V_{10}^{100-37}}{V_{10}^{100}} \stackrel{GTR}{\approx} 0,0074$$

c) - die Fanartikel sind mit folgenden Wahrscheinlichkeiten fehlerhaft

Wahrsch. dafür, dass eine Tasse fehlerhaft ist: $P_T(f) = 0,05$

Wahrsch. dafür, dass ein Feuerzeug fehlerhaft ist: $P_Z(f) = 0,08$

Wahrsch. dafür, dass ein Plüschherz fehlerhaft ist: $P_H(f) = 0,03$

Ereignis C1: ein Set enthält kein fehlerhaftes Teil

$$P(C1) = P_T(\bar{f}) \cdot P_H(\bar{f}) \cdot P_Z(\bar{f}) = (1 - 0,05)(1 - 0,03)(1 - 0,08) \stackrel{GTR}{\approx} 0,8478$$

ZEC1: Überprüfung eines Sets auf Fehler

BERNOULLI-Experiment mit den Ereignissen

$$f \text{ ... Set fehlerhaft: } P(f) = P(\bar{C1}) = 1 - 0,8478 = 0,1522$$

$$\bar{f} \text{ ... Set nicht fehlerhaft: } P(\bar{f}) = P(C1) = 0,8478$$

ZEC1200: Überprüfung von 1200 Sets (eine Tagesproduktion) auf Fehler

ZG X bezeichne die Anzahl von fehlerhaften Sets einer Tagesproduktion. Dann ist X binomialverteilt mit den Parametern Kettenlänge $n = 1200$ und Erfolgswahrscheinlichkeit $p = P(f) = 0,1522$

Ereignis C2: **mindestens 158** und **höchstens 207** fehlerhafte Sets in einer TP

$$P(C2) = P(158 \leq X \leq 207) \stackrel{GTR}{\approx} 0,9510$$

ZECn: Überprüfung von n Sets

Ereignis C3: **mindestens 1** Set fehlerhaft

Ereignis $\overline{C3}$: **höchstens 0** Sets fehlerhaft

$$P(C3) = 1 - P(\overline{C3}) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = 1 - (1-p)^n \geq 0,95 \stackrel{p=0,1522}{\Leftrightarrow} 0,05 \geq 0,8478^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln 0,05 \geq n \ln 0,8478 \Leftrightarrow \frac{\ln 0,05}{\ln 0,8478} \leq n \Leftrightarrow n \geq 18,1$$

Es müssen mindestens 19 Sets entnommen werden.

d) - Widerlegung der Behauptung des Verkäufers

ZED5: Überprüfung von 5 Feuerzeugen

ZG D1 bezeichne die Anzahl von fehlerhaften Feuerzeugen unter den ausgewählten. Dann ist D1 binomialverteilt mit den Parametern Kettenlänge $n = 5$ und Erfolgswahrscheinlichkeit

$$p = P_z(f) = 0,08$$

Ereignis A: **genau 1** fehlerhaftes Feuerzeug in der Auswahl

$$P(A) = P(D1 = 1) \stackrel{GTR}{\approx} 0,2866$$

ZED4: Überprüfung von 4 Feuerzeugen

ZG D2 bezeichne die Anzahl von fehlerhaften Feuerzeugen unter den ausgewählten. Dann ist D2 binomialverteilt mit den Parametern Kettenlänge $n = 4$ und Erfolgswahrscheinlichkeit

$$p = P_z(f) = 0,08$$

Ereignis B: **mindestens 1** und **höchstens 2** fehlerhafte Feuerzeuge in der Auswahl

$$P(B) = P(1 \leq D1 \leq 2) \stackrel{GTR}{\approx} 0,2817$$

Es gilt: $P(A) \neq P(B) \Rightarrow$ Aussage des Verkäufers ist falsch.

Untersuchung, ob es Wahrscheinlichkeiten gibt, für die die Aussage des Verkäufers wahr ist

$$P(A) = \binom{5}{1} p^1 (1-p)^4 = 5p(1-p)^4; \quad P(B) = \binom{4}{1} p^1 (1-p)^3 + \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 = 4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2$$

$$P(A) = P(B) \Leftrightarrow 0 = P(A) - P(B)$$

$$0 = 5p(1-p)^4 - 4p(1-p)^3 - 6p^2(1-p)^2 = p(1-p)^2(5(1-p)^2 - 4(1-p) - 6p) =$$

$$= p(1-p)^2(5(1-2p+p^2) - 4 + 4p - 6p) = p(1-p)^2(5 - 10p + 5p^2 - 4 - 2p) =$$

$$0 = p(1-p)^2(1-12p+5p^2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1. 0 = p \\ 2. 0 = (1-p)^2 \Leftrightarrow 0 = 1-p \Leftrightarrow p = 1 \\ 3. 0 = 1-12p+5p^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3.1. p = 0,0864 \\ 3.2. p = 2,3135 \text{ entfällt wegen } 0 \leq p \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Die Aussage des Verkäufers ist genau dann wahr, wenn

1. keine defekten Feuerzeuge existieren (Fehlerwahrscheinlichkeit 0)
2. alle Feuerzeuge defekt sind (Fehlerwahrscheinlichkeit 1)
3. die Fehlerwahrscheinlichkeit 0,0864 beträgt

Teil D1: Wahlaufgabe Analysis

geg.: Fkt 3. Grades verläuft durch den Pkt. $P(0;-3)$, besitzt bei $Q(2;1)$ lok. Extremum
analytische Formulierung der Bedingungen

allgemeine Funktionsgleichung: $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$1. P \in f: f(0) = -3 = a_3 \cdot 0^3 + a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0 \Leftrightarrow a_0 = -3$$

2.

$$Q \in f: f(2) = 1 = a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 - 3 = 1 \Leftrightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 4$$

$$3. \text{lok. Extremum bei } Q: f'(2) = 0 = 3a_3 \cdot 2^2 + 2a_2 \cdot 2 + a_1 = 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 0$$

a) - rechnerischer Nachweis, dass $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x - 3$ ($x \in \mathbb{R}$) die Bed. erfüllt

f ist Funktion 3. Grades

1. $f(0) = -\frac{1}{4} \cdot 0^3 + 3 \cdot 0 - 3 = -3$ Bed. 1 erfüllt

2. $f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^3 + 3 \cdot 2 - 3 = -2 + 6 - 3 = 1$ Bed. 2 erfüllt

3.1. $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$: $f'(2) = -\frac{3}{4} \cdot 2^2 + 3 = 0$ notwendige Bed. für Ex. lok. Extrema erfüllt

3.2. $f''(x) = -\frac{6}{4}x$: $f''(2) = -\frac{6}{4} \cdot 2 \neq 0$ hinreichende Bed. für Ex. lok. Extrema erfüllt

aus 1. – 3.2. folgt die Behauptung

Ermittlung derjenigen Funktion g für die zusätzlich gilt: 4. $g'(-1) = 0$

4. $g'(-1) = 0 = 3a_3 \cdot (-1)^2 + 2a_2 \cdot (-1) + a_1 = 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 0$

Aufstellung eines linearen GS aus den Bedingungen 1., 2., 3. und 4. ergibt

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & -3 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 & = & 1 \\ 12a_3 + 4a_2 + a_1 & = & 0 \\ 3a_3 - 2a_2 + a_1 & = & 0 \end{array}$$

Lösungsvektor: $(a_3; a_2; a_1; a_0)^T = (-0,4; 0,6; 2,4; -3)^T$

Funktionsgleichung von g: $g(x) = -0,4x^3 + 0,6x^2 + 2,4x - 3$

b) - Ermittlung einer allg. Funktionsgl. für Funktionen mit den Eigenschaften 1. – 3.
aus Bedingung 1. ergibt sich $a_0 = -3$

Berechnung der Werte für die übrigen Parameter aus den Bedingungen 2. und 3.

$$\begin{array}{l} 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 4 \quad | -1 \\ 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 0 \quad | 1 \\ \hline 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 4 \quad | 1 \\ 4a_3 \quad \quad - a_1 = -4 \quad | 2 \quad \begin{array}{l} a_3=t \\ \Leftrightarrow a_1 = 4t + 4 = 4(t+1) \end{array} \\ \hline 16a_3 + 4a_2 = -4 \quad | \begin{array}{l} a_3=t \\ \Leftrightarrow a_2 = -4t - 1 = -(4t+1) \end{array} \end{array}$$

Daraus ergibt sich die Gl.: $f_t(x) = tx^3 - (4t+1)x^2 + 4(t+1)x - 3$ ($x \in \mathbb{R}; t \in \mathbb{R}, t \neq 0$)

Ermittlung derjenigen Funktion für die $f_t(x_w) = \frac{3}{2}$

Berechnung der x-Koordinate des Wendepunktes

$f_t'(x) = 3tx^2 - 2(4t+1)x + 4(t+1)$

$f_t''(x) = 6tx - 2(4t+1)$ $x = x_w \Leftrightarrow f_t''(x_w) = 0 = 6tx_w - 2(4t+1) \Leftrightarrow x_w = \frac{4t+1}{3t}$

Funktionsgleichung der Wendepunkte in Abhängigkeit von t

$f_t(x_w) = t \left(\frac{4t+1}{3t} \right)^3 - (4t+1) \left(\frac{4t+1}{3t} \right)^2 + 4(t+1) \frac{4t+1}{3t} - 3 = h(t)$

Berechnung desjenigen t_g , für das $h(t_g) = \frac{3}{2}$

GTR: $t_g = 2$

Aufstellung der speziellen Unktionsgleichung

$f_2(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

Teil D2: Wahlaufgabe Geometrie/Algebra

geg. Pkte $A(-5;11;0,6)$, $B(-5;-3;0,4)$, $S(2;4;0)$; 1LE entspricht 10m; z-Koord. gibt Höhe an

a) - Berechnung Winkel $ASB = \alpha$

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = |\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{SB}| \cos \alpha \Leftrightarrow \alpha = \arccos \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}}{|\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{SB}|} = \arccos \frac{\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 0,4 \end{pmatrix}}{\sqrt{98,36} \cdot \sqrt{98,16}} \approx 89,9^\circ$$

b) - Berechnung der Anhebung des Punktes S

Aufstellung der Gl. der Ebene durch A und B, parallel zur x-Achse

$$\text{Stützvektor: } \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ 0,6 \end{pmatrix}; \text{ 1. Richtungsvektor: } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ -0,2 \end{pmatrix}; \text{ 2. RV: } \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in parameterfreier Form: GTR $E: -0,2y + 14z = 6,2$

Aufstellung der Gl. der Gerade durch S, parallel zur z-Achse

$$\text{Stützvektor: } \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ Richtungsvektor: } \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Geradengleichung: } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Durchstoßpunktes von h durch E: GTR $H(2;4;0,5)$

Die Differenz der z-Koordinaten von S und H gibt die notwendige Anhebung an:

$$a = 0,5 - 0 = 0,5 \Rightarrow 5m$$

c) - Ermittlung der Länge des Kreisbogens

$$\text{Gerade g (Gerade durch H und A) } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0,5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade f (Gerade durch H und B) } f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0,5 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -0,1 \end{pmatrix}$$

Es bezeichnen B_g, B_f die Berührungspunkte des Kreises an den Geraden g und f. Der Punkt M sei der Mittelpunkt des Kreises, der die Kurve beschreibt. Der Winkel B_gMB_f erhält die Bezeichnung β . Der Winkel B_gHB_f erhält die Bezeichnung γ .

analog Aufgabenteil a kann der Winkel γ berechnet werden

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = |\overrightarrow{HA}| \cdot |\overrightarrow{HB}| \cos \gamma \Leftrightarrow \gamma = \arccos \frac{\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -0,1 \end{pmatrix}}{\sqrt{98,01} \cdot \sqrt{98,01}} = \arccos \frac{-0,01}{98,01}$$

Das Dreieck SMB_g ist dann ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkeln beim Eckpunkt B_g (Berührungspkt Kreis Tangente). Darum gilt:

$$\frac{\beta}{2} = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

Die Strecke $\overline{MB_g}$ ist der Radius des Kurvenkreises. Die Strecke $\overline{MB_g}$ ist Gegenkathete und die Strecke $\overline{SB_g} = 66m$ ist Ankathete zum Winkel $\frac{\gamma}{2}$ im rechtwinkligen Dreieck SMB_g . Damit

$$\text{gilt: } \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\overline{MB_g}}{\overline{SB_g}} = \frac{r}{66} \Leftrightarrow r = 66 \cdot \tan \frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{2\pi r}{360^\circ} = \frac{b}{\beta} \Leftrightarrow b = \frac{\beta}{180^\circ} \pi r = \frac{2 \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)}{180^\circ} \pi \cdot 66 \cdot \tan \frac{\gamma}{2} \approx 103,7$$

Berechnung der Koordinaten des Kurvenkreismittelpunktes

Da der Kreis die Geraden g und f , die beide durch den Punkt H verlaufen, berührt, muss der Mittelpunkt von k auf der Winkelhalbierenden des Winkels AHB . Diese Winkelhalbierende w verläuft durch den Punkt H und M_{AB} den Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} .

$$M_{AB} \left(\frac{-5-5}{2}; \frac{11-3}{2}; \frac{0,6+0,4}{2} \right) = (-5; 4; 0,5)$$

$$\text{Richtungsvektor der Winkelhalbierenden: } \overrightarrow{HM}_{AB} = \begin{pmatrix} -5-2 \\ 4-4 \\ 0,5-0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow RV \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den Ortsvektor des Kreismittelpunktes gilt dann: $\overrightarrow{OM}_k = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}_k = \overrightarrow{OH} + I_k \vec{a}$

Außerdem ist \overrightarrow{HM}_k Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck $HM_k B_g$:

$$|\overrightarrow{HM}_k| = \sqrt{|\overrightarrow{HB}_g|^2 + |\overrightarrow{B}_g M_k|^2} = \sqrt{6,6^2 + 6,6^2 \cdot \left(\tan \frac{\gamma}{2}\right)^2} = 6,6 \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\gamma}{2}} = I_k |\vec{a}|^{|\vec{a}|=1} = I_k \approx 9,3$$

$$\overrightarrow{HM}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0,5 \end{pmatrix} + I_k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-9,3 \\ 4-0 \\ 0,5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7,3 \\ 4 \\ 0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow M_k(-7,3; 4; 0,5)$$