verwendeter GTR: ***Casio CFX-9850G***

Teil A Analysis

geg.: $f_a(x) = 2x\ln x - ax \quad \left(x \in D_{f_a}\right)$

a) Untersuchung des Definitionsbereiches

Beschränkungen durch enthaltene elementare Funktionen: $\ln x$ definiert $\Leftrightarrow x > 0$

Beschränkungen durch Funktionsstruktur: keine

$D_{f_a}: \quad x \in R; x > 0$

- Koordinaten des SP mit Abszissenachse

$$f_a(x_N) = 0 \Leftrightarrow 0 = x_N(2\ln x_N - a) \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ x_N = 0 \quad \text{entfällt wegen Definitionsbereich} \\ 2.\ 0 = 2\ln x_N - a \Leftrightarrow \ln x_N = \frac{a}{2} \Leftrightarrow x_N = e^{\frac{a}{2}} \end{cases}$$

SP Abszissenachse: $X_N\left(e^{\frac{a}{2}};0\right)$

- Berechnung und Nachweis der lokalen Extrempkte

(A) Berechnung der Extremstellen mit der notwendigen Bedingung $f_a'(x_E) = 0$

$$f_a'(x) = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} - a = 2\ln x + 2 - a$$

$$f_a'(x_E) = 0 \Leftrightarrow a - 2 = 2\ln x_E \Leftrightarrow \ln x_E = \frac{a-2}{2} \Leftrightarrow x_E = e^{\frac{a-2}{2}}$$

(B) Nachweis der Existenz und Art der Extrema

$f_a''(x) = 2\frac{1}{x} = \frac{2}{x} \qquad f_a''(x_E) = \frac{2}{e^{\frac{a-2}{2}}} > 0 \Rightarrow f_a$ besitzen bei $x_E = 0$ ein lokales Minimum

(C) Berechnung der y-Koordinate des Extrempunktes

$$f_a(x_E) = 2e^{\frac{a-2}{2}}\ln\left(e^{\frac{a-2}{2}}\right) - ae^{\frac{a-2}{2}} = 2e^{\frac{a-2}{2}}\frac{a-2}{2} - ae^{\frac{a-2}{2}} = e^{\frac{a-2}{2}}(a-2-a) = -2e^{\frac{a-2}{2}}$$

$$\boxed{T\left(e^{\frac{a-2}{2}};-2e^{\frac{a-2}{2}}\right)}$$

- Nachweis, dass die Fkt keine Wendepunkte besitzt

notwendige Bedingung: $f_a''(x_W) = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{2}{x_w}$ besitzt keine Lösung, d.h. Fkt hat keine WP

- Angabe der Monotonieintervalle

$0 < x < x_E$: f_a monoton fallend

$x_E \le x$: f_a monoton steigend

b) Berechnung der von f_3 und f_3' vollständig begrenzten Fläche

Ansatz: $A = \left|\int_{x_{S1}}^{x_{S2}} (f_3'(x) - f_3(x))dx\right|$

Berechnung mit GTR $A \approx 12{,}71FE$

Erläuterung

1. im GRAPH-Menü werden folgende Funktionen gespeichert

Y1=2XlnX-3X

Y2=2lnX-1

Y3=Y2-Y1

2. *Berechnungen im RUN-Menü*
   Solve(Y3,1)➔A (rund 0,53)
   Solve(Y3,6)➔B (rund 5,58)
   Abs(∫ (Y3,A,B)) (rund 12,71)

c) - Aufstellung der Funktionsgleichung von g_2

g_2 ist eine quadratische Funktion: allg. Gleichung $g_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
die Punkte P_1, P_2, P_3 erfüllen die Funktionsgleichung von g_2
Aufstellung und Lösung des linearen GS 1:

$$\begin{aligned} P_1: \quad f_2(0{,}1) &= a_2 \cdot 0{,}1^2 + a_1 \cdot 0{,}1 + a_0 \\ P_2: \quad f_2(1) &= a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 \\ P_3: \quad f_3(1{,}9) &= a_2 \cdot 1{,}9^2 + a_1 \cdot 1{,}9 + a_0 \end{aligned}$$

Lösung mit GTR: $(a_2; a_1; a_0) = (1{,}22; -2{,}83; -0{,}39)$

Gleichung von g_2: $g_2(x) = 1{,}22x^2 - 2{,}83x - 0{,}39$

- Bestimmung der maximalen Abweichung g_1, f_2

zur Untersuchung der maximalen Abweichung soll der Betrag der Differenzfunktion untersucht werden:
$h_{21}(x) = |f_2(x) - g_1(x)|$
lokale Extrema: Minimum bei $T(1;0)$
Abweichung an den Intervallrändern: $R_u(0{,}1;0{,}29)$; $R_o(1{,}9;0{,}07)$
Die maximale Abweichung beträgt 0,29LE

- Bestimmung der maximalen Abweichung g_2, f_2

zur Untersuchung der maximalen Abweichung soll der Betrag der Differenzfunktion untersucht werden:
$h_{22}(x) = |f_2(x) - g_2(x)|$
lokale Extrema: Minimum bei $H_1(0{,}39;0{,}21)$, $T(1;0)$, $H_2(1{,}48;0{,}11)$
Abweichung an den Intervallrändern: nach Konstruktion 0 $R_u(0{,}1;0)$; $R_o(1{,}9;0)$
Die maximale Abweichung beträgt 0,21LE

d) - Extremwertproblem

- Aufstellung der Zielfunktion

Extremgröße: Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks $A_D = \frac{1}{2}ab$

Nebenbedingungen:
1. Kathete: Betrag der x-Koordinate des SP mit x-Achse (Nullstelle) der Tang. t_z $a = |x_N|$
2. Kathete: Betrag der y-Koordinate des SP mit y-Achse der Tang. t_z $b = |y_0|$

Aufstellung der Tangentengleichung
Berührungspkt der Tangente am Graphen von f_2: $B = P(z; 2z\ln z - 2z)$
Anstieg der Tangente: $m_t = f_2'(z) = 2\ln z + 2 - 2 = 2\ln z$
Tangentengleichung in Pkt-Richtungs-Form und Umwandlung in explizite Form:

$$\begin{aligned} y - y_B &= m_t(x - x_B) \\ y - (2z\ln z - 2z) &= 2\ln z(x - z) \\ y - 2z\ln z + 2z &= 2x\ln z - 2z\ln z \\ t_z \qquad y &= 2x\ln z - 2z \end{aligned}$$

Berechnung x_N: $0 = 2x_N \ln z - 2z \Leftrightarrow 2z = 2x_N \ln z \Leftrightarrow x_N = \frac{z}{\ln z}$

Berechnung y_0: $y_0 = 2 \cdot 0 \cdot \ln z - 2z = -2z$

Zielfunktion: $A_D(z) = \frac{1}{2}|-2z| \cdot \left|\frac{z}{\ln z}\right| \overset{z>1}{=} \frac{z^2}{\ln z} \quad z > 1$

- Untersuchung der Zielfunktion auf Extrema

A_D hat im Definitionsbereich ein lokales Minimum $T(1{,}65;5{,}44)$

Der minimale Flächeninhalt von 5,44FE wird für z=1,65 eingeschlossen.

e) Berechnung eines Flächeninhaltes mittels Integration

Ansatz: $A = \int_{x_N}^{u} f_3(x)dx = \int_{e^{1,5}}^{u} (2x\ln x - 3x)dx = [F_3(x)]_{e^{1,5}}^{u}$

- Berechnung einer Stammfunktion der Funktion f_3

  Analyse des Funktionsterms: Summe, erster Summand Produkt

  $f_3(x) = s_1(x) + s_2(x) = t_1(x)\cdot t_2(x) + s_1(x);\quad t_1(x) = 2x;\, t_2(x) = \ln x;\, s_2(x) = -3x$

  $F_3(x) = S_1(x) + S_2(x)$

  Ber. Stammfkt S_1 mittels partieller Integration $\int (t_1(x)t_2(x))dx = T_1(x)t_2(x) - \int (T_1(x)t_2'(x))dx$

  $$\left.\begin{matrix} T_1(x) = x^2 & t_1(x) = 2x \\ t_2(x) = \ln x & t_2'(x) = \dfrac{1}{x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_1(x) = x^2 \cdot \ln x - \int \left(x^2 \cdot \frac{1}{x}\right)dx = x^2 \cdot \ln x - \frac{x^2}{2}$$

  Ber. Stammfkt S_2: $S_2(x) = -\frac{3}{2}x^2$

  $F_3(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x^2 = x^2 \ln x - 2x^2 = x^2(\ln x - 2)$

- Berechnung der Fläche

  $A_D = [x^2(\ln x - 2)]_{e^{1,5}}^{u} = u^2(\ln u - 2) - e^3(\ln e^{1,5} - 2) = u^2(\ln u - 2) - e^3(1{,}5 - 2) =$

  $= u^2(\ln u - 2) + 0{,}5e^3 = A_D(u)$

- Berechnung desjenigen u_G für das gilt $A_D(u_G) = 0{,}5e^3$

$$0{,}5e^3 = u_G^2(\ln u_G - 2) + 0{,}5e^3 \Leftrightarrow 0 = u_G^2(\ln u_G - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1.0 = u_G^2 \Leftrightarrow 0 = u_G \text{ entfällt wegen } u > e^{1,5} \\ 2.0 = \ln u_G - 2 \Leftrightarrow 2 = \ln u_G \Leftrightarrow u_G = e^2 \end{cases}$$

Teil B Geometrie / Algebra

gegeben Ebene E $-2x + 8y - 16z = 1$, Punkte $P_a(-1;-a;-3a)\quad (a \in R, a > 0)$

a) - Nachweis, dass P_a nicht Element von E

  Punktprobe $-2\cdot -1 + 8\cdot(-a) - 16\cdot(-3a) = 2 - 8a + 48a = 2 + 40a = 1 \Leftrightarrow 40a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{40}$

  Diese Lösung entfällt da gilt: $a > 0$

- Beschreibung eines Verfahrens zur Berechnung derjenigen Ebene H, die O und P_3 enthält und senkrecht zur Ebene E verläuft

  Da H O und P_3 enthält, kann der Vektor $\overrightarrow{OP_3}$ als erster Richtungsvektor und der Vektor $\overrightarrow{OO} = \vec{o}$ als Stützvektor zur Aufstellung der Parametergleichung verwendet werden. Der Vektor aus den Koeffizienten der Ebene E steht senkrecht auf E und wird deshalb als 2. Richtungsvektor benutz, da H senkrecht E gelten soll.

  Ebenengleichung in Parameterform:

  $$H:\ \vec{x} = \vec{o} + u\cdot\overrightarrow{OP_3} + v\cdot\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-1\\-3\\-9\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-2\\8\\-16\end{pmatrix} = u\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-1\\4\\-8\end{pmatrix}$$

  Hat man die Parameterform der Ebenengleichung von H ermittelt, muss diese noch mittels Gauß-Verfahren in parameterfrei Form umgewandelt werden.

  Gleichung von H in parameterfreier Form (Berechnung mit GTR)

  H: $-60x - y + 7z = 0$

b) Nachweis, dass alle Punkte P_a auf einer Gerade liegen

- Aufstellung der Gleichung einer Geraden h durch 2 spezielle Punkte ($P_0(-1;0;0); P_1(-1;-1;-3)$)

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

setze $m = a$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ -3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ -3a \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP_a} \Rightarrow$ h enthält alle Punkte P_a

- Untersuchung der Lagebeziehung zu den Koordinatenebenen

x-y-Ebene: $z = 0$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow m = 0$ $\quad \Rightarrow x = -1$, $\Rightarrow y = 0$ $\quad$ h schneidet die x-y-Eb.

x-z-Ebene: $y = 0$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow m = 0$ $\quad \Rightarrow x = -1$, $\Rightarrow z = 0$ $\quad$ h schneidet die x-z-Eb.

y-z-Ebene: $x = 0$: $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ falsche Aussage $\Rightarrow$ kein Durchstoßpunkt

h verläuft parallel zur y-z-Ebene

c) - Ermittlung der Gleichung der Geraden s

Da das Bild von s durch den Punkt Q verläuft, muss s selbst durch den Bildpunkt von Q verl.

s: $\vec{x} = \overrightarrow{OP_2} + t \cdot \overrightarrow{Q'P_2}$

- Ermittlung des Bildpunktes von Q

es bezeichne L den Lotfußpunkt von Q in der Ebene E, $\vec{k}$ den Koeffizientenvektor der Ebene die Punkte Q, L und Q' liegen auf der zur Ebene E senkrechten Geraden h mit dem Richtungsvektor $\vec{k}$ und dem Ortsvektor von Q als Stützvektor

Gleichung von h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix}$

Variante 1

L erfüllt die Geradengleichung für $s = s_L$ und Q' für $s = s_{Q'}$. Dann gilt: $s_{Q'} = 2s_L$

Da L außerdem die Ebenengleichung erfüllt, kann s_L durch Einsetzen von h in E ermittelt werden.

$$\begin{aligned} -2(3-2s_L)+8(1+8s_L)-16(-5-16s_L) &= 1 \\ -6+4s_L+8+64s_L+80+256s_L &= 1 \\ 82+324s_L &= 1 \\ 324s_L &= -81 \\ s_L &= -0{,}25 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OQ'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + 2s_L \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} - 0{,}5 \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Q'(4;-3;3)$$

Variante 2

$\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{OQ} + 2\overrightarrow{QL}$

L ist außerdem der Durchstoßpunkt der Gerade h (mit dem Richtungsvektor $\vec{k}$ und dem Ortsvektor von Q als Stützvektor) durch die Ebene E

DSP h, E mit GTR: $L(3{,}5;-1;-1)$ $\qquad \overrightarrow{OQ'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3{,}5-3 \\ -1-1 \\ -1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Q'(4;-3;3)$

- Aufstellung der Gleichung der Geraden s

Gleichung von s: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\1\\-9\end{pmatrix}$

- Schnittpunkt der beiden Geraden
  Schnittpunkt ist der Durchstoßpunkt der Geraden s durch die Ebene E GTR: $S(1{,}5;-2{,}5;-1{,}5)$
- Schnittwinkel der beiden Geraden
  Schnittwinkel der Geraden ist der Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren

Richtungsvektor s: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\1\\-9\end{pmatrix}$ Richtungsvektor s': $\vec{x}=\overrightarrow{SQ}=\begin{pmatrix}3-1{,}5\\1+2{,}5\\-5+1{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}5\\3{,}5\\-3{,}5\end{pmatrix}$

Schnittwinkel: GTR $\alpha\approx 59{,}1°$

d) - Ermittlung der Bildpunkte durch die 3 Projektionen

x-y-Ebene: $z=0$ $P_{axy}(-1;-a;0)$
x-z-Ebene: $y=0$ $P_{axz}(-1;0;-3a)$
y-z-Ebene: $x=0$ $P_{ayz}(0;-a;-3a)$

- Aufstellung der Ebenengleichung in Parameterform

$$E_a:\ \vec{x}=\overrightarrow{OP_{axy}}+k\overrightarrow{P_{axy}P_{axz}}+l\overrightarrow{P_{axy}P_{ayz}}=\begin{pmatrix}-1\\-a\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\a\\-3a\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}1\\0\\-3a\end{pmatrix}$$

- Umwandlung der Ebenengleichung in parameterfreie Form mittels Gaußverfahren

$$\begin{array}{lllll|l} x & & = & -1 & +l & 3a\\ & y & = & -a & +ak & \\ & & z= & & -3ak\ -3al & 1\\ \hline & y & = & -a & +ak & 3\\ 3ax & & +z= & -3a & -3ak & 1\\ \hline 3ax & +3y & +z= & -6a & & \end{array}$$

E_a: $3ax+3y+z=-6a$

- Abstand der Punktes P_a von der Ebene E_a

Variante 1

Aufstellung der Lotgeraden l_a durch P_a auf E_a: $\vec{x}=\overrightarrow{OP_a}+v\vec{k}=\begin{pmatrix}-1\\-a\\-3a\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}3a\\3\\1\end{pmatrix}$

für den Ortsvektor des Lotfußpunktes L_a sei $v=v_L$
Abstand $P_a\,E_a$ ist

$$\left|\overrightarrow{P_aL_a}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1+3av_L\\-a+3v_L\\-3a+v_L\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-a\\-3a\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}3av_L\\3v_L\\v_L\end{pmatrix}\right|=\sqrt{9a^2v_L^2+9v_L^2+v_L^2}=v_L\sqrt{9a^2+10}=d(a,v_L(a))$$

Berechnung von v_L durch Einsetzen von l_a in E_a

$$3a(-1+3av_L)+3(-a+3v_L)+(-3a+v_L)=-6a$$
$$-3a+9a^sv_L-3a+9v_L-3a+v_L=-6a$$
$$-9a+(9a^2+10)v_L=-6a$$
$$v_L=\frac{3a}{9a^2+10}$$

Einsetzen in die Abstandsbeziehung

$$d=\frac{3a}{9a^2+10}\sqrt{9a^2+10}=\frac{3a}{\sqrt{9a^2+10}}=d(a)$$

Variante 2

Verwendung der Abstandsgleichung $d = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{x}_0)$

$$\vec{n} = \vec{k} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};\ |\vec{n}| = \sqrt{9a^2 + 9 + 1} = \sqrt{9a^2 + 10}$$

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP_a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ -3a \end{pmatrix}$$ Ortsvektor des Punktes im Raum

$$\vec{x}_L = \overrightarrow{OP_{axy}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$ Ortsvektor eines Punktes der Ebene

$$d = \frac{1}{\sqrt{9a^2 + 10}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 3a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1+1 \\ -a+a \\ -3a-0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{9a^2 + 10}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 3a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3a \end{pmatrix} \right| = \frac{|-3a|}{\sqrt{9a^2 + 10}} \overset{a>0}{=} \frac{3a}{\sqrt{9a^2 + 10}} = d(a)$$

Bestimmung desjenigen a_G für das gilt $d(a_G) = \frac{\sqrt{11}}{11}$

$$\frac{3a}{\sqrt{9a^2 + 10}} = \frac{\sqrt{11}}{11} \Leftrightarrow \sqrt{11}\sqrt{9a^2 + 10} = 33a \Leftrightarrow 11(9a^2 + 10) = 33^2 a^2 \Leftrightarrow 9a^2 + 10 = 99a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90a^2 = 10 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow |a| = \frac{1}{3} \overset{a>0}{\Rightarrow} a = \frac{1}{3}$$

Teil C Stochastik

a) Auswahl von 10 Feldern aus 128 Feldern ohne Wiederholung (Reihenfolge der Auswahl ist nicht relevant)

Anzahl der möglichen Bilder: $N = \binom{128}{10} \approx 2{,}27 \cdot 10^{14}$

b) ZE1 Auswahl eines Feldes aus 8x16 Feldern und Feststellung ob Element der ersten Zeile
ZE10 10malige Nacheinanderausführung von ZE1
Ereignis B mindestens 1 Erfolg
Ereignis $\overline{B}$ kein Erfolg

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{10} \approx 0{,}7369$$

- Erwartungswert der in 1. Zeile ausgewählten Felder (**Achtung: nicht der angezeigten A!!!**)

gleichmäßige Verteilung von 10 ausgewählten Feldern auf 8 Zeilen: $E = \frac{10}{8} = 1{,}25$

c) ZEn n-malige Nacheinanderausführung von ZE1
Ereignis C mindestens 1 Erfolg
Ereignis $\overline{C}$ kein Erfolg

$$0{,}99 \le P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{n} \Leftrightarrow n \ge 34{,}5$$

35 Durchführungen sind notwendig

d) ZE3 3malige Nacheinanderausführung von ZE1(modifiziert)
Ereignis D genau 1 Feld ausgewählt
das Ereignis D kann aus 2 disjunkten Fällen zusammengesetzt werden

	1. Durchführung	2. Durchführung	3. Durchführung
D_1	beliebiges Feld	nicht Feld aus Durchf. 1	Feld aus Durchf. 1 oder 2
D_2	beliebiges Feld	Feld aus Durchf. 1	beliebiges Feld

$$P(D) = P(D_1) + P(D_2) = 1 \cdot \frac{128-1}{128} \cdot \frac{2}{128} + 1 \cdot \frac{1}{128} \cdot 1 \approx 0{,}0233$$

e) ZEe1 ... Auswahl eines Bauteiles und Feststellung ob es von Firma 1 stammt
BERNOULLI-Experiment mit den Ergebnissen
$F_1 = f$ ... von Firma 1 hergestellt — $P(f)$ gesuchte Wahrscheinlichkeit
$F_2 = \overline{f}$ ... nicht von Firma 1 hergestellt — $P(\overline{f}) = 1 - P(f)$
ZEe2 ... Auswahl eines Bauteil und Feststellung ob es defekt ist
BERNOULLI-Experiment mit den Ergebnissen
d ... defekt — $P(d)$
$\overline{d}$ ... nicht defekt — $P(\overline{d}) = 1 - P(d)$
bekannt sind folgende bedingten Wahrscheinlichkeiten
ein von Firma 1 produziertes Bauteil ist defekt — $P_f(d) = 0{,}04$
ein nicht von Firma 1 produziertes Bauteil ist defekt — $P_{\overline{f}}(d) = 0{,}06$
ein defektes Bauteil stammt von Firma 1 — $P_d(f) = \frac{2}{3}$
Berechnung des Anteils an Bauteilen, die von Firma 1 hergestellt wurden

$$P(d) = P_f(d)P(f) + P_{\overline{f}}(d)P(\overline{f}) = P_f(d)P(f) + P_{\overline{f}}(d)(1 - P(f)) = P_f(d)P(f) - P_{\overline{f}}(d)P(f) + P_{\overline{f}}(d) =$$

$$P(d) = \left(P_f(d) - P_{\overline{f}}(d)\right)P(f) + P_{\overline{f}}(d) \quad (1)$$

nach Pfadregel gilt:

$$P(f) \cdot P_f(d) = P_d(f) \cdot P(d) \Leftrightarrow P(d) = \frac{P_f(d)}{P_d(f)} P(f) \quad (2)$$

(2) in (1)

$$\frac{P_f(d)}{P_d(f)}P(f)=\left(P_f(d)-P_{\bar f}(d)\right)P(f)+P_{\bar f}(d)\Leftrightarrow\frac{P_f(d)}{P_d(f)}P(f)-\left(P_f(d)-P_{\bar f}(d)\right)P(f)=P_{\bar f}(d)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{P_f(d)}{P_d(f)}-\left(P_f(d)-P_{\bar f}(d)\right)\right)P(f)=P_{\bar f}(d)\Leftrightarrow\frac{P_f(d)-\left(P_f(d)-P_{\bar f}(d)\right)P_d(f)}{P_d(f)}P(f)=P_{\bar f}(d)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(f)=\frac{P_{\bar f}(d)P_d(f)}{P_f(d)-\left(P_f(d)-P_{\bar f}(d)\right)P_d(f)}=\frac{P_{\bar f}(d)P_d(f)}{P_f(d)\left(1-P_d(f)\right)+P_{\bar f}(d)P_d(f)}=0{,}75$$

Firma 1 hat 75% und Firma 2 25% Lieferanteile.

f) Untersuchung einer Lieferung von 2000 Teilen und

- Zef1 Feststellung ob sie von Firma 1 stammt
  $F_1=f$ ... von Firma 1 $\quad P(f)=0{,}75$
  $F_2=\bar f$ ... nicht von Firma 1 $\quad P(\bar f)=1-P(f)=0{,}25$
- ZEf2 Feststellung ob die Lieferung mehr als 99 defekte Teile enthält
  s ... Lieferung mit mehr als 99 defekten Teilen Wahrscheinlichkeit unbekannt
  $\bar s$ ... Lieferung mit weniger als 99 defekten Teilen Wahrscheinlichkeit unbekannt

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Lieferung, von der bekannt ist, dass sie mehr als 99 defekten Bauteile enthält, von der Firma 1 stammt.

$P_s(f)$ Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine schlechte Lieferung von Firma 1 stammt

weitere bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$P_f(s)$ ein Lieferung die von Firma 1 stammt, enthält mehr als 99 defekte Teile

$P_{\bar f}(s)$ ein Lieferung die nicht von Firma 1 stammt, enthält mehr als 99 defekte Teile

Es gilt:

$$\left.\begin{array}{l} P_s(f)P(s)=P(f)P_f(s)\Leftrightarrow P_s(f)=\dfrac{P(f)P_f(s)}{P(s)} \\ P(s)=P_f(s)P(f)+P_{\bar f}(s)P(\bar f)\end{array}\right\} P_s(f)=\frac{P(f)P_f(s)}{P_f(s)P(f)+P_{\bar f}(s)P(\bar f)} \quad (3)$$

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $P_f(s)$ und $P_{\bar f}(s)$

ZEe2/2000F1 ... 2000malige Whg ZEe2 unter der Vor., dass die Teile von F1 stammen
ZG Xf1 gibt die Anzahl der defekten Bauteile in der Lieferung an. Dann ist Xf2 binomialverteilt mit $n=2000$ und $p=0{,}04$

$$P_f(s)=P(Xf2>99)=P(100\le Xf2\le 2000)\overset{GTR}{\approx}0{,}0113 \quad (E(Xf1)=80)$$

ZEe2/2000F2 ... 2000malige Whg ZEe2 unter der Vor., dass die Teile von F2 stammen
ZG Xf2 gibt die Anzahl der defekten Bauteile in der Lieferung an. Dann ist Xf2 binomialverteilt mit $n=2000$ und $p=0{,}06$

$$P_{\bar f}(s)=P(Xf2>99)=P(100\le Xf2\le 2000)\overset{GTR}{\approx}0{,}9702 \quad (E(Xf2)=120)$$

Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit nach Formel (3)

$$P_s(f)=\frac{0{,}75\cdot 0{,}0113}{0{,}75\cdot 0{,}0113+0{,}25\cdot 0{,}9702}\approx 0{,}0338$$

Die Regel versagt in nur 3,4% aller Fälle.

Teil D1 Wahlaufgabe Analysis

geg.: $y = f_t(x) = \frac{x}{t} - 2 + \sin\left(\frac{x}{t}\right) \quad (x \in R; t \in R, t > 0) \qquad g(x) = \cos\frac{1}{\sqrt{|x|+1}} \quad (x \in R)$

a) - Angabe Schnittpkt y-Achse: GTR $S(0;0{,}54)$

- Untersuchung der Symmetrie von g

$g(-x) = \cos\frac{1}{\sqrt{|-x|+1}} = \cos\frac{1}{\sqrt{|x|+1}} = g(x) \Rightarrow$ g symmetrisch zur y-Achse

b) Beschreibung eines Verfahrens zur Überprüfung von Flächenverhätnissen

Ansicht nach Darstellung mit GTR

Graph der Funktion g: keine NSt, Tiefpunkt bei 0, im 1. u. 2. Quadranten

Graph der Funktion f_t: NSt, ansteigender Verlauf

1. Berechnung der Schnittstelle von f_t und g
2. Untersuchung der Fktn f_t auf Nullstellen im Intervall $0 \le x \le x_S$
3. Berechnung der Gesamtfläche $A_G = \left|\int_0^{x_S} (g(x) - f_t(x))dx\right|$
4. Berechnung der Teilfläche die von den Koordinatenachsen und f_t begrenzt wird

$A_T = \left|\int_0^{x_N} f_t(x)dx\right|$

5. Untersuchung des Flächenverhältnisses $A_T : A_G$

Durchführung der Untersuchung für $t = 0{,}5$

Schnittstelle: $x_S \approx 0{,}88$

Nullstelle: $x_N \approx 0{,}55$

Gesamtfläche: $A_G \approx 0{,}97 FE$

Teilfläche: $A_T \approx 0{,}52 FE$

$\frac{A_T}{A_G} \ne 0{,}5 \Rightarrow$ x-Achse halbiert die Fläche nicht

c) Monotonieuntersuchung von f_t

Untersuchung auf lokale Extrempunkte

(A) mögliche Extremstellen $f_t'(x) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t}\cos\frac{x}{t}$

$f_t'(x_E) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{t}\cos\frac{x_E}{t} = -\frac{1}{t} \Leftrightarrow \cos\frac{x_E}{t} = -1 \Leftrightarrow \frac{x_E}{t} = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x_E = t\pi(2k+1)$

(B) Nachweis und Art der Extrema $f_t''(x) = -\frac{1}{t^2}\sin\frac{x}{t}$

$f_t''(x_E) = -\frac{1}{t^2}\sin\frac{t\pi(2k+1)}{t} = -\frac{1}{t^2}\sin(\pi(2k+1)) = 0$ für alle x_E

d.h. zunächst keine Aussage möglich, ob es sich tatsächlich um lokale Extremstellen handelt

Untersuchung der 3. Ableitung $f_t'''(x) = -\frac{1}{t^3}\cos\frac{x}{t}$

$f_t'''(x_E) = -\frac{1}{t^3}\cos\frac{t\pi(2k+1)}{t} = -\frac{1}{t^3}\cos(\pi(2k+1)) = 1$ für alle x_E

D.h. die Funktion besitzt keine lokalen Extrema. Es handelt sich nicht um Extremstellen sondern um Wendestellen. Somit ist die Funktion monoton auf dem gesamten Definitionsbereich.

Bestimmung der Art der Monotonie

Berechnung des Anstieges der Funktion für $x_P = 0$

$f_t'(x_P) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t}\cos 0 = \frac{2}{t} \overset{t>0}{>} 0 \Rightarrow$ f_t monoton wachsend auf R

Ermittlung des größten und kleinsten Anstieges der Funktion

Funktion des Anstieges der Fkt f_t ist die Funktion $m_t = f_t'$. Gesucht sind somit die lokalen Extrempunkte dieser Funktion. Diese Punkte haben die gleichen x-Koordinaten wie die Wendepunkte von f_t.

Berechnung der lokalen Extrempunkte von m_t

(A) mögliche lokale Extremstellen $m_t'(x) = f_t''(x) = -\frac{1}{t^2}\sin\frac{x}{t}$

$$m_t'(x_E) = -\frac{1}{t^2}\sin\frac{x_E}{t} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x_E}{t} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_E}{t} = 0 + k\pi \Leftrightarrow x_E = tk\pi$$

(B) Nachweis und Art der Extrema $m_t''(x) = f_t'''(x) = -\frac{1}{t^3}\cos\frac{x}{t}$

$$m_t''(x_E) = -\frac{1}{t^3}\cos k\pi \begin{cases} 1.\,\text{k gerade } k = 2n: & -\frac{1}{t^3}\cos(2n\pi) = -\frac{1}{t^3}\cdot 1 < 0 \Rightarrow \text{lok. Max.} \\ 2.\text{k ungerade } k = 2n+1: & -\frac{1}{t^3}\cos((2n+1)\pi) = -\frac{1}{t^3}\cdot(-1) > 0 \Rightarrow \text{lok. Min.} \end{cases}$$

(C) Berechnung der extremen Anstiege

$$m_t(x_E) = f_t'(x_E) = \begin{cases} 1.\,\text{k gerade}: \ \frac{1}{t} + \frac{1}{t}\cos(2n\pi) = \frac{2}{t} \text{ (maximaler Anstieg)} \\ 1.\,\text{k ungerade}: \ \frac{1}{t} + \frac{1}{t}\cos((2n+1)\pi) = 0 \text{ (minimaler Anstieg)} \end{cases}$$

Ermittlung des kleinsten positiven x derjenigen Funktion, für die der maximale Anstieg 0,4 ist

$$m_{\max} = 0{,}4 = \frac{2}{t_1} \Leftrightarrow t_1 = 5 \Rightarrow x_E = 10n\pi \overset{n=1}{\Rightarrow} x_{E1} = 10\pi$$

Teil D2 — Wahlaufgabe Geometrie / Algebra

gegeben: $A(0;0;3)$, $B(-8;12;19)$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

außerdem gilt: Gerade $g_1: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\vec{a}$ und Gerade $g_2: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s\vec{b}$

a) Bedingung $a_x = 1; a_z = 5$

Berechnung des Schnittpunktes der Geraden

$$\begin{aligned} r &= -8 + 4s \\ a_y r &= 12 - 3s \\ 3 + 5r &= 19 - 5s \end{aligned}$$

mit Zeile 1: $5(-8 + 4s) = 16 - 5s \Leftrightarrow -40 + 20s = 16 - 5s \Leftrightarrow s = \frac{56}{25} = 2{,}24$

s in Gl. 1 – 3: GTR $S(0{,}96 = r; 5{,}28; 7{,}8)$

r, s in Gl. 2: GTR $a_y = 5{,}5 \Rightarrow \vec{a}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 5{,}5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen $\vec{b}$ und $\vec{a}_a$: GTR $\alpha = 135°$

b) Bedingung: maximale Tunnellänge 250m

Ansatz: X sei der Schnittpunkt der beiden Geraden. Dann gilt für die Tunnellänge:

$l = \left|\overrightarrow{AX}\right| + \left|\overrightarrow{XB}\right| \le 25$ setzt man $l = 25$ so erhält man den Schnittpunkt mit der kleinstmöglichen z-Koordinate

$$l = \sqrt{(x_x - 0)^2 + (x_y - 0)^2 + (x_z - 3)^2} + \sqrt{(x_x + 8)^2 + (x_y - 12)^2 + (x_z - 19)^2}$$

da X die Geradengleichung g_2 erfüllt, kann folgende Parametrisierung durchgeführt werden:

$x_x = -8 + 4s_x; x_y = 12 - 3s_x; x_z = 19 - 5s_x$

$$l = \sqrt{(-8+4s_x)^2 + (12-3s_x)^2 + (19-5s_x-3)^2} + \sqrt{(-8+4s_x+8)^2 + (12-3s_x-12)^2 + (19-5s_x-19)^2} =$$

$$= \sqrt{(-8+4s_x)^2 + (12-3s_x)^2 + (16-5s_x)^2} + \sqrt{16s_x^2 + 9s_x^2 + 25s_x^2} =$$

$$= \sqrt{64 - 64s_x + 16s_x^2 + 144 - 72s_x + 9s_x^2 + 256 - 160s_x + 25s_x^2} + \sqrt{50s_x^2} =$$

$$= \sqrt{464 - 296s_x + 50s_x^2} + \sqrt{50}s_x$$

Bestimmung der NSt der Funktion $h(s_x) = l(s_x) - 25$: $s_{xN} \approx 2{,}797$

Berechnung der min. Höhe: $x_{z\min} = 19 - 5s_x \approx 5{,}01$

Die Mindesthöhe beträgt rund 50,1m

c) Bedingung: beide Tunnelabschnitte haben gleiches Gefälle, $a_y = 1$

Da beide Tunnelabschnitte den gleichen Winkel mit der x-y-Ebene einschließen sollen, genügt es den Kosinus des Winkels zwischen den Richtungsvektoren und dem Normalenvektor der Ebene zu berechnen. Da ein Tunnelabschnitt einen steigenden und der andere einen fallenden Richtungsvektor hat gilt allerdings $\cos\alpha = \cos\beta$

Berechnung der Neigung mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos\beta = \frac{\vec{b} \bullet \vec{n}_{xy}}{|\vec{b}||\vec{n}_{xy}|} = \frac{-5}{1 \cdot \sqrt{50}} = -\sqrt{\frac{25}{50}} = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + 1 + a_z^2}}$$

Umformung dieser Beziehung: $\sqrt{2}a_z = \sqrt{a_x^2 + 1 + a_z^2} \Leftrightarrow 2a_z^2 = a_x^2 + 1 + a_z^2 \Leftrightarrow a_x^2 - a_z^2 + 1 = 0$ (1)

Außerdem müssen sich die beiden Tunnel treffen. Schnittbedingung:

$$\begin{array}{rrrl} a_x r = & -8 & +4s & a_x = \dfrac{4s-8}{r} = \dfrac{4s-8}{12-3s} \quad (2) \\ r = & 12 & -3s & \\ 3 + a_z r = & 19 & -5s & a_z = \dfrac{16-5s}{r} = \dfrac{16-5s}{12-3s} \quad (3) \end{array}$$

Einsetzten der Beziehungen (2) und (3) in (1)

$$\left(\frac{4s-8}{12-3s}\right)^2 - \left(\frac{16-5s}{12-3s}\right)^2 + 1 = 0$$

Aufstellung der Funktionsgleichung $h(s) = \left(\frac{4s-8}{12-3s}\right)^2 - \left(\frac{16-5s}{12-3s}\right)^2 + 1$ und Berechnung der NSt. mit

GTR: $s = 2 \Rightarrow \begin{cases} (2) & a_x = 0 \\ (3) & a_z = 1 \end{cases}$

oder Lösung der Gleichung

$$\left(\frac{4s-8}{12-3s}\right)^2 + 1 = \left(\frac{16-5s}{12-3s}\right)^2$$

$$(4s-8)^2 + (12-3s)^2 = (16-5s)^2$$

$$16s^2 - 64s + 64 + 144 - 72s + 9s^2 = 256 - 160s + 25s^2$$

$$25s^2 - 136s + 208 = 256 - 160s + 25s^2$$

$$24s = 48$$

$$s = 2$$

weiter siehe oben