Teil A Analysis

gegeben $f(x)=2x(x-3)^2=2x\left(x^2-6x+9\right)=2x^3-6x^2+9x \quad (x\in R)$

a) - Angabe

NSt.: $x_{N1}=0;\quad x_{N2}=3$ (Ablesen von Fktsterm oder GTR)

Extrempkte: $H(1;8);\quad T(3;0)$ (GTR)

Wendepkt: $W(2;4)$ (GTR z.B. Extremstelle von f' als Wendestelle von f)

b) - Ermittlung eines Flächenverhätnisses

Gesamtfläche: $A_G=\int_{x_{N1}}^{x_{N1}} f(x)dx \overset{GTR}{=} 13{,}5$

obere Teilfläche: $A_1=\int_{x_{S1}}^{x_{S2}}(f(x)-4)dx : x_{S1}\overset{GTR}{\approx}0{,}27;\ x_{S2}=x_W=2;\quad A_1\overset{GTR}{=}4{,}5$

untere Teilfläche: $A_2=A_G-A_1=9$

Flächenverhältnis: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{4{,}5}{9}=\dfrac{1}{2}$

c) Extremwertproblem

1. Aufstellung der Zielfunktion

Extremgröße: Abstand von Funktionswerten $d=f(c)-g(c)$

Nebenbedingungen: g verläuft durch $O(0;0)$ und $P(2;f(2)=4)$

da $O\in g:\ n=0$ und $m=\dfrac{f(2)}{2}=\dfrac{4}{2}=2\ \Rightarrow g(x)=2x$

Einsetzen der Nebenbedingungen in die Ausgangsgleichung der Extremgröße

Zielfunktion: $d(c)=2c(c-3)^2-2c \quad (c\in R; 0<c<2)$

2. Berechnung der Extrempunkte der Zielfkt in deren Definitionsbereich

GTR: $H(0{,}85;6{,}16)$

Wählt man für c den Wert 0,85, dann erhält man den größten Abstand der Funktionswerte von 6,16LE.

d) Ermittlung desjenigen u_g für das der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f, der Geraden $x=u$ und der x-Achse 12FE beträgt

- Berechnung des Flächeninhaltes in Abhängigkeit von u

$$A=\int_0^u f(x)dx=[F(x)]_0^u=\left[\frac{2}{4}x^4-\frac{12}{3}x^3+\frac{18}{2}x^2\right]_0^u=\frac{1}{2}u^4-4u^3+9u^2-(0)$$

$$A(u)=\frac{1}{2}u^4-4u^3+9u^2$$

- Verwendung der Bedingung zur Berechnung von u_g

$$12=\frac{1}{2}u_g^4-4u_g^3+9u_g^2 \Leftrightarrow 0=\frac{1}{2}u_g^4-4u_g^3+9u_g^2-12 \overset{GTR}{\Leftrightarrow} u_g=2$$

e) Berechnung der Koordinaten des Spieglungspkts H' von H an $y=2x$

1. da der Lotfußpunkt auf der Geraden liegt gilt: $y_L=2x_L$

2. $$\overrightarrow{OL}\perp\overrightarrow{HL}:\overrightarrow{OL}\cdot\overrightarrow{HL}=\begin{pmatrix}x_L\\y_L\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_L-x_H\\y_L-y_H\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_L\\2x_L\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_L-1\\2x_L-8\end{pmatrix}=x_L(x_L-1)+2x_L\cdot(2x_L-8)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0=x_L((x_L-1)+2(2x_L-8))=x_L(x_L-1+4x_L-16)=x_L(5x_L-17)\Leftrightarrow\begin{cases}1.\ x_L=0 & \text{entfällt}\\2.\ x_L=\dfrac{17}{5}\end{cases}$$

3. $\overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LH'} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{HL} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OH} = 2\begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2x_L - x_H \\ 2y_L - y_H \end{pmatrix} \overset{1.}{=} \begin{pmatrix} 2x_L - x_H \\ 4x_L - y_H \end{pmatrix} \overset{2.}{=} \begin{pmatrix} 2\frac{17}{5} - 1 \\ 4\frac{17}{5} - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{5} = 5{,}8 \\ \frac{28}{5} = 5{,}6 \end{pmatrix}$$

Der Spiegelungspkt von H hat die Koordinaten $(5{,}8;5{,}6)$

f) Ermittlung eines Flächeninhaltes in Abhängigkeit vom Parameter a

Flächeninhalt eines Dreiecks (rechtwinklig) $A_D = \frac{1}{2}ab$

$a = |x_N|; \quad b = |y_0|$ Achsenabschnitte der Geraden h durch die Extrempunkte der Fkt f_a zur Aufstellung der Geradengl. werden die koordinaten der Extrempkte benötigt

$f_a(x) = ax(x-3)^2 = a(x^3 - 6x^2 + 9x)$

A: mögliche Extremstellen $\quad f_a'(x) = a(3x^2 - 12x + 9)$

$f_a'(x_E) = 0 \Leftrightarrow 0 = 3x_E^2 - 12x_E + 9 \overset{GTR}{\Leftrightarrow} x_{E1} = 1;\ x_{E2} = 3$

B: Nachweis und Art der Extrema $f_a''(x) = a(6x - 12)$

$f_a''(x_{E1}) = a(6 - 12) = -6a \overset{a>0}{<} 0 \Rightarrow$ lokales Maximum

$f_a''(x_{E2}) = a(18 - 12) = 6a \overset{a>0}{>} 0 \Rightarrow$ lokales Minimum

C: y-Koordinaten der Extrempunkte

$f_a(x_{E1}) = a(1-3)^2 = 4a \Rightarrow H(1;4a);\ f_a(x_{E2}) = a(3-3)^2 = 0 \Rightarrow T(3;0)$

Aufstellung der Geradengleichung mit 2-Pkte-Form

$$y - 0 = \frac{4a - 0}{1 - 3}(x - 3) = -\frac{4a}{2}(x - 3) = -2a(x - 3) = -2ax + 6a = y$$

Berechnung: $x_N = 3$ (wegen T); $y_0 = 6a$

Flächeninhalt: $A_D = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6a = 9a$

Teil B Geometrie / Algebra

geg.: Punkte $A(-5;12;13)$; $B(1;4;23)$; $C(1;4;3)$; $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; Gerade g enthält A und B

a) - Nachweis, dass A, B, C Eckpunkte eines Dreiecks sind

A, B, C Eckpkte eines Dreiecks wenn kein k existiert für das gilt: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ (Vektoren müssen linear unabhängig sein)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix}: \left.\begin{array}{rcrcr} 6 &=& 6k_x &\Rightarrow& k_x = 1 \\ -8 &=& -8k_y &\Rightarrow& k_y = 1 \\ 10 &=& -10k_z &\Rightarrow& k_z = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow k_y \neq k_z \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ lin. unabh.} \Rightarrow \text{Beh.}$$

Nachweis, dass ABC gleichschenklig

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + 10^2} = \sqrt{200}; \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + (-10)^2} = \sqrt{200}$$

D.h. Das Dreieck hat zwei gleich lange Seiten und ist somit gleichschenklig.

Nachweis, dass ABC rechtwinklig

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \cdot 6 + (-8) \cdot (-8) + 10 \cdot (-10) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$$

Da der rechte Winke bei A liegt, muss P A gegenüberliegen (Viereck ABPC)

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AB4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 13 \end{pmatrix} \qquad P(7;-4;13)$$

b) - Aufstellung der Ebenengl. derjenigen Ebene E die alle h_a enthält

Stützvektor: $\overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor 1: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor 2: $\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufstellung der Geradengl mit GTR-Programm: E $2x - z = -26$

c) Begründung dafür, dass h_a und g nie parallel verlaufen

Die Geraden verlaufen parallel, wenn die Richtungsvektoren linear abhängig sind.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}: \quad \overrightarrow{AB} = k\vec{a} \quad \left.\begin{array}{rrcl} 6 = & k_x & \Rightarrow & k_x = 6 \\ -8 = & -2k_y & \Rightarrow & k_y = 4 \\ 10 = & 2k_z & \Rightarrow & k_z = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \vec{a} \text{ linear unabhängig}$$

Berechnung des Schnittpunktes Q

$$\begin{array}{rlrl} -5 & +3m = & -12 & +r \quad \Rightarrow r = 3m + 7 \ (1) \\ 12 & -4m = & 9 & -2r \\ 13 & +5m = & 2 & +2r \end{array} \qquad \text{mit (1)}\ 13 + 5m = 2 + 2(3m + 7) \Leftrightarrow m = -3$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 24 \\ 2 \end{pmatrix} \quad Q(-14;24;2)$$

Berechnung des Schnittwinkels (GTR-Programm): $\angle\left(\overrightarrow{AB}, \vec{a}\right) = \alpha \approx 8{,}13°$

d) Berechnung der Koordinaten des Punktes S^*

Da die Pyramide eine gerade Pyramide sein soll, ist der Diagonalenschnittpunkt der Grundfläche der Lotfußpunkt L der Punkte S und S^* und es gilt:

$$L\left(\frac{1+1}{2}; \frac{4+4}{2}; \frac{23+3}{2}\right) = (1;4;13)$$

$$\overrightarrow{OS^*} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LS^*} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{SL} = \overrightarrow{OL} + \left(\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OS}\right) = 2\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OS} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$S^*(13;13;13)$

Teil C Stochastik

gegeben sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$P_{B1}(f) = 0{,}05$ ... Wahrscheinlichkeit dafür, dass Bauteil B1 defekt ist

$P_{B2}(f) = 0{,}02$ ... Wahrscheinlichkeit dafür, dass Bauteil B2 defekt ist

$P_{B3}(f) = 0{,}04$ ... Wahrscheinlichkeit dafür, dass Bauteil B3 defekt ist

a) Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Ereignisse

Ereignis A ... nur Bauteil B3 ist defekt

$P(A) = P_{B1}(\bar{f}) \cdot P_{B2}(\bar{f}) \cdot P_{B3}(f) = (1-0{,}05) \cdot (1-0{,}02) \cdot 0{,}04 \approx 0{,}0372$

Ereignis B ... genau 2 Bauteile Defekt

$P(B) = P_{B1}(f) \cdot P_{B2}(f) \cdot P_{B3}(\bar{f}) + P_{B1}(f) \cdot P_{B2}(\bar{f}) \cdot P_{B3}(f) + P_{B1}(\bar{f}) \cdot P_{B2}(f) \cdot P_{B3}(f) \approx 0{,}0037$

b) ZEb1: Entnahme eines Gerätes und Feststellung der Anzahl der defekten Bauteile

ZG X_B gibt die Anzahl der defekten Bauteile in einem Gerät an

Aufstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der ZG X_B

Anzahl der def. Bauteile N	0	1	2	3
$P(N)$	0,89376	0,10252	0,00368	0,00004

$P(0) = P_{B1}(\bar{f}) \cdot P_{B2}(\bar{f}) \cdot P_{B3}(\bar{f})$

$P(1) = P_{B1}(f) \cdot P_{B2}(\bar{f}) \cdot P_{B3}(\bar{f}) + P_{B1}(\bar{f}) \cdot P_{B2}(f) \cdot P_{B3}(\bar{f}) + P_{B1}(\bar{f}) \cdot P_{B2}(\bar{f}) \cdot P_{B3}(f)$

$P(2) = P(B) = P_{B1}(f) \cdot P_{B2}(f) \cdot P_{B3}(\bar{f}) + P_{B1}(f) \cdot P_{B2}(\bar{f}) \cdot P_{B3}(f) + P_{B1}(\bar{f}) \cdot P_{B2}(f) \cdot P_{B3}(f)$

$P(3) = P_{B1}(f) \cdot P_{B2}(f) \cdot P_{B3}(f)$

Berechnung des Erwartungswertes der ZG X_B

$E(B) = 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2) + 3 \cdot P(3) \approx 0{,}11$

Bei 100 entnommenen Geräten ist mit 11 fehlerhaften Bauteilen zu rechnen.

c) ZEc1 ... Entnahme eines Gerätes der Produktion und Feststellung der Funktionstüchtigkeit
BERNOULLI-Experiment mit den Ereignissen

d ... Gerät defekt $\quad P(d) = 0{,}125$

$\bar{d}$ ... Gerät in Ordnung

ZEc15 ... Entnahme von 15 Geräten der Produktion und Feststellung der Funktionstüchtigkeit
BERNOULLI-Kette

ZG X_C gibt die Anzahl der defekten Geräte in der Stichprobe vom Umfang 15 an. ZG X_C ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 15$ und $p = P(d) = 0{,}125$

Ereignis C ... **genau 2** defekte Geräte

$P(C) = P(X_C = 2) \overset{GTR}{\approx} 0{,}2891$

d) ZEd=ZEc100 ... Entnahme von 100 Geräten der Prod. und Feststellung der Funktionstüchtigkeit
BERNOULLI-Kette

ZG X_D gibt die Anzahl der nicht defekten Geräte in der Stichprobe vom Umfang 100 an. ZG X_D ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = P(\bar{d}) = 1 - 0{,}125 = 0{,}875$

Ereignis B ... **mindestens 85** intakte Geräte

$P(B) = P(85 \leq X_D \leq 100) \overset{GTR}{\approx} 0{,}8199$

e) ZEe=ZEcn ... Entnahme von n Geräten der Prod. und Feststellung der Funktionstüchtigkeit
BERNOULLI-Kette

ZG X_E gibt die Anzahl der nicht defekten Geräte in der Stichprobe vom Umfang n an. ZG X_E ist binomialverteilt mit den Parametern n und $p = P(\bar{d}) = 1 - 0{,}125 = 0{,}875$

gesucht ist dasjenige $n_{\min}$ für das die Wahrscheinlichkeit $P(E) = P(50 \leq X_G \leq n) \geq 0{,}9$

n muss also größer als 50 sein, dann probieren mit GTR

$n = 60: \quad P(E) \approx 0{,}8768$

$n = 61: \quad P(E) \approx 0{,}9271$

Für n=61 ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E erstmals größer als 0,9, d.h. es müssen mindestens 61 Geräte bestellt werden.

Teil D1 Wahlaufgabe Analysis

gegeben: $\quad f(x) = 5(e - e^x);\ g(x) = 5(e^{-x} - e) \quad (x \in R)$

a) Nachweis, dass $g(-x) = -f(x)$ gilt:

$g(-x) = 5(e^{-(-x)} - e) = 5(-1)(e - e^x) = -5(e - e^x) = -f(x)$

Geometrische Interpretation: Bei Punktspiegelung am Koordinatenursprung wird der Graph von g auf dem von f abgebildet.

b) Berechnung des Flächenanteil der von f, g vollständig begrenzten Fläche am Rechteck mit den diagonal liegenden Eckpunkten S_1, S_2 und achsenparallelen Seiten

Flächeninhalt des Rechteckes: $A_R = a \cdot b = |x_{S2} - x_{X1}| \cdot |y_{S2} - y_{S1}|$

Fläche zwischen den Graphen: $A_G = \left| \int_{x_{S1}}^{x_{S2}} (f(x) - g(x))dx \right|$

Berechnung der Koordinaten der Schnittpkte mit GTR:
$S_1(-1{,}66;-12{,}64); S_2(x_{S2} = -x_{S1} = 1{,}66; 12{,}64 = -y_{S1})$

$A_R = 4 \cdot 1{,}66 \cdot 12{,}64 \approx 83{,}93$; $A_G \approx 39{,}56$

prozentualer Anteil von A_G an A_R: $\approx 47{,}1\%$

c) $V_k(t) = ke - ke^{-t} = k(e - e^{-t}) \quad (t \geq 0)$

Berechnung desjenigen k_G für das gilt: $V_{k_G}(0) = 8{,}6$

$8{,}6 = k_G(e - e^{-0}) \Leftrightarrow k_G = \dfrac{8{,}6}{e-1} \approx 5{,}00$

Berechnung derjenigen Zeit $t_{1,5}$ nach der das Volumen auf das 1,5-fache des Anfangsvolumens angestiegen ist

$V_5(t_{1,5}) = 5(e - e^{-t_{1,5}}) = 1{,}5 \cdot 8{,}6 \Leftrightarrow e^{-t_{1,5}} = e - \dfrac{1{,}5 \cdot 8{,}6}{5} \Leftrightarrow t_{1,5} = -\ln\left(e - \dfrac{1{,}5 \cdot 8{,}6}{5}\right) = 1{,}96$

Berechnung des maximal benötigten Fassungsvermögens:

$\lim\limits_{t\to\infty} V_5(t) = \lim\limits_{t\to\infty}(5(e - e^{-t})) = 5(e - 0) = 5e \approx 16{,}6VE$

Teil D2 Wahlaufgabe Geometrie / Algebra

gegeben: $g_a: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2a \\ 4a \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4-a \\ 10-2a \\ -4 \end{pmatrix}$

a) Lagebeziehung $g_{-\frac{3}{4}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4{,}75 \\ 11{,}5 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $g_{\frac{1}{2}}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} -1{,}5 + 4{,}75t &= 1 + 3{,}5s && \overset{mit(1),(2)}{\Rightarrow} \quad 8 = 8 \text{ wahre Aussage} \\ -3 + 11{,}5t &= 2 + 9s && \overset{mit(1)}{\Rightarrow} 2{,}5s = 5 \Leftrightarrow s = 2\,(2) \\ 4 - 4t &= 4 - 4s && \Rightarrow (1)\, t = s \end{aligned}$$

Die Geraden schneiden sich, weil das GS eindeutig lösbar ist.

Berechnung des SP durch Einsetzen des berechneten Parameters: $S(8;20;-4)$

Falls sich alle Geraden in einem Pkt schneiden, dann muss S dieser Pkt sein und die allgemeine Geradengl. erfüllen. Pktprobe für S in allgemeiner Geradengleichung:

$$\begin{aligned}
8 &= 2a+(4-a)t = 2a+4t-at && \overset{t=2}{\Rightarrow} 8=8\\
20 &= 4a+(10-2a)t = 4a+10t+2at && \overset{t=2}{\Rightarrow} 20=20\\
-4 &= 4-4t && \Leftrightarrow t=2
\end{aligned}$$

D.h. S erfüllt alle Gleichungen.

b) Nachweis, dass keine Gerade g_a senkrecht auf x-y-Ebene steht

g_a genau dann senkrecht zur x-y-Ebene, wenn der RV von g_a und ein zur x-y-Ebene senkrechter Vektor linear abhängig sind

Normalenvektor der x-y-Ebene: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned}
0 &= k_x(4-a_x) && \overset{k_x\neq 0}{\Rightarrow} 0=10-2a_z \Leftrightarrow a_z=4\\
0 &= k_y(10-2a_y) && \overset{k_y\neq 0}{\Rightarrow} 0=10-2a_y \Leftrightarrow a_y=5\\
1 &= -4k_z \Rightarrow k_z=-\frac{1}{4} &&
\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{linear unabhängig}$$

d.h. keine der Geraden steht auf der x-y-Ebene senkrecht

Berechnung der Geraden aus den Schnittpunkten der Geraden g_a mit der x-y-Ebene

Bedingung $z=0$

$$\left.\begin{aligned}
x &= 2a+(4-a)t && \overset{mit(1)}{\Rightarrow} x=4+a\\
y &= 4a+(10-2a)t && \overset{mit(1)}{\Rightarrow} y=10+2a\\
0 &= 4-4t \Leftrightarrow t=1 \quad (1) &&
\end{aligned}\right\}\Rightarrow s_a:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\10\\0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \text{bzw. } y=2x+2$$

Ermittlung desjenigen a_E für das der Schnittwinkel mit der x-y-Ebene maximal wird

$\alpha=\angle(\vec{n};\vec{a}_a)$ ... Winkel zwischen dem Normalenvektor der Eben und dem RV von g_a

$\beta=\angle(E_{xy};g_a)=90°-\alpha$ ... Schnittwinkel x-y-Ebene und Gerade g_a

$$\beta=90°-\alpha \quad \cos\alpha=\left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{a}_a}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}_a|}\right| \Rightarrow \beta=90°-\arccos\left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{a}_a}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}_a|}\right|$$

$$\beta=90°-\arccos\left|\frac{0\cdot(4-a)+0\cdot(10-2a)+1\cdot(-4)}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{(4-a)^2+(10-2a)^2+(-4)^2}}\right|$$

$$\beta=\beta(a)=90°-\arccos\left|\frac{-4}{\sqrt{(4-a)^2+(10-2a)^2+16}}\right|$$

Berechnung des lokalen Extremums der Fkt $\beta(a)$: $H(4{,}80;77{,}40)$

Für a=4,80 wird der größtmögliche Winkel mit der x-y-Ebene eingeschlossen.