Sächsisches Staatsministerium
für Kultus

Schuljahr **2001/02**

Geltungsbereich:
- Allgemein bildendes Gymnasium
- Abendgymnasium und Kolleg
- Schulfremde Prüfungsteilnehmer

Schriftliche Abiturprüfung
Leistungskursfach Mathematik

- Nachtermin -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichttellen A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	35 BE,
im Teil B	25 BE,
im Teil C	15 BE,
im Teil D	15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:
1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik"

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jedes a $(a \in R, a > 0)$ ist eine Funktion f_a durch $y = f_a(x) = ax^2\left(1 - \ln\left(\frac{x^2}{a}\right)\right)$ $\left(x \in D_{f_a}\right)$ und ihre zweite Ableitung durch $f_a''(x) = -2a\left(\ln\left(\frac{x^2}{a}\right) + 2\right)$ gegeben.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_a an und bestimmen Sie die Nullstellen dieser Funktion.
Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion f_a achsensymmetrisch zur y-Achse ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f_a und untersuchen Sie die Art der Extrema.

Erreichbare BE-Anzahl: 13

b) Begründen Sie, dass es genau eine Funktion f_a gibt, die den Wertebereich $\{y \mid y \in R, y \leq 1\}$ besitzt und geben Sie den Wert a für diesen Fall an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Der Graph jeder Funktion f_a besitzt genau zwei Wendepunkte. Alle Wendepunkte der Graphen der Funktionen f_a liegen auf dem Graphen einer Funktion g. Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Weisen Sie nach, dass die Funktion F_1 mit der Gleichung $y = F_1(x) = \frac{1}{9}x^3\left(5 - 3\ln\left(x^2\right)\right)$ eine Stammfunktion der Funktion f_1 ist.
Der Graph der Funktion f_1, die x-Achse sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = z$ $(z \in R, 0 < z < 1)$ und $x = 1$ begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt $A(z)$ vollständig.
Berechnen Sie den Flächeninhalt $A(z)$.
Geben Sie den Flächeninhalt für $z = \frac{1}{e}$ an.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

e) Der Graph der Funktion f_1 rotiert im Intervall $0{,}5 \leq x \leq \sqrt{e}$ um die x-Achse. Ermitteln Sie das Volumen des betreffenden Rotationskörpers.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

f) Für jedes u $(u \in R, u > 0)$ existiert im Punkt $R_u(u; f_1(u))$ eine Tangente t_u an den Graphen der Funktion f_1.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente.
Bestimmen Sie die Werte u, für die die Tangente t_u den positiven Teil der x-Achse und den negativen Teil der y-Achse schneidet.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O sind die Punkte $A(3;-1;-5)$, $B(1;5;-2)$ und $C(-2;2;1)$ sowie für jedes a $(a \in R)$ eine Gerade g_a durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad (t \in R)$ gegeben.

a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass es keinen Punkt gibt, der auf allen Geraden g_a liegt.
Untersuchen Sie, ob es einen Wert a gibt, für den der Punkt B auf der Geraden g_a liegt.
Zeigen Sie, dass jede der Geraden g_a windschief zur x-Achse ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

b) Alle Geraden g_a liegen in ein und derselben Ebene E.
Die Strecke $\overline{OA}$ wird durch senkrechte Parallelprojektion in die Ebene E abgebildet. Berechnen Sie die Länge der Projektionsstrecke.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Die Punkte A, B und C sind Eckpunkte eines Dreiecks. Durch die Gerade g_5 wird dieses Dreieck in zwei Teilflächen zerlegt.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass eine der Teilflächen ein Trapez ist.
Ermitteln Sie das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Teilflächen.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

d) Die Gerade h geht durch die Punkte A und C.
Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen den Geraden g_a und h.
Es gibt genau eine Gerade g_a, die von der Geraden h minimalen Abstand besitzt.
Beschreiben Sie, wie eine Gleichung dieser Geraden ermittelt werden kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil C: Stochastik

Ein Spezialbetrieb für Stoßdämpferreparaturen an PKW hat ermittelt, dass die Defekte an Stoßdämpfern eines Typs in genau drei einander ausschließende Fehlerkategorien (F1, F2, F3) eingeteilt werden können. F1 tritt in 70% und F2 in 15% der Schadensfälle auf. Ein Stoßdämpfer, der den Fehler F1 aufweist, verursacht in 90% dieser Fälle ein Klopfgeräusch beim Durchfahren von Fahrbahnunebenheiten. Bei Fehler F2 beträgt die entsprechende Wahrscheinlichkeit 50%, während Fehler F3 keine Klopfgeräusche verursacht.
Die Kosten für die Behebung der einzelnen Fehlerarten betragen in diesem Betrieb pro Stoßdämpfer: 400€ bei F1, 200€ bei F2 und 100€ bei F3.

Ein Fahrzeug mit Klopfgeräuschen an einem Stoßdämpfer wird in die Werkstatt gebracht.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die kostenintensivste Fehlerart FI vorliegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Reparaturkosten.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Im Betrieb werden pro Woche durchschnittlich 25 defekte Stoßdämpfer an Autos dieses Typs repariert. In den Fällen, in denen Fehler F1 auftritt, wird ein bestimmtes Ersatzteil benötigt. Die Anlieferung der Ersatzteile erfolgt wöchentlich und der verfügbare Lagerraum ist klein.

c) Berechnen Sie, wie viele solcher Ersatzteile wenigstens eingelagert werden müssen, damit in einer Woche bei durchschnittlichem Bedarf die Fahrzeuge mit mindestens 90%-iger Wahrscheinlichkeit ohne Nachbestellung von Stoßdämpfern sofort repariert werden können.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Der Hersteller produziert die Stoßdämpfer parallel und zu gleichen Anteilen auf 6 Maschinen. Die jeweilige Tagesproduktion wird in einer Halle gelagert.

d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass vier zufällig dieser Halle entnommenen Stoßdämpfer von vier unterschiedlichen Maschinen stammen.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Ein Test von Stoßdämpfern dieser Firma ergab, dass diese eine durchschnittliche Lauf Leistung von 50000 km erbringen. Weiter zeigte sich, dass die Lauf Leistung normalverteilt ist und eine Standardabweichung von 10000 km aufweist.

e) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Stoßdämpfer dieser Marke weniger als 901/o der durchschnittlichen Laufleistung bringt.

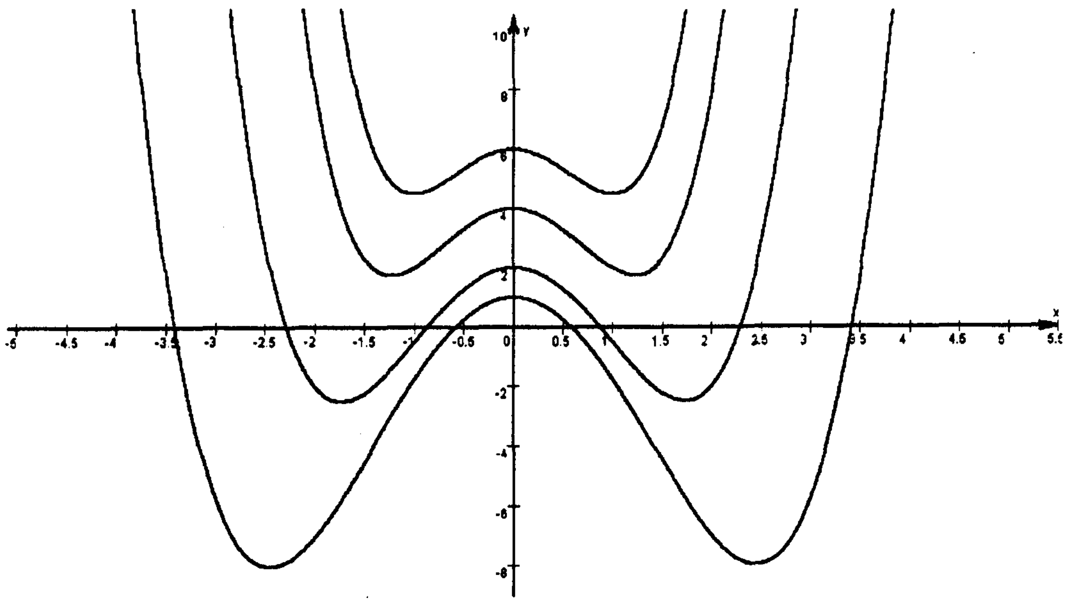
Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Für jedes p $(p \in R, p > 0)$ ist eine Funktion f_p durch $y = f_p(x) = \frac{p}{4}x^4 - 3x^2 + p$ gegeben. Die Abbildung zeigt die Graphen einiger der Funktionen f_p in einem x-y-Koordinatensystem.



a) Ermitteln Sie alle Werte p $(p \in N)$, für die die Graphen der zugehörigen Funktion f_p dargestellt sind.
Untersuchen Sie die Graphen der Funktionen f_p auf Symmetrie.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Es gibt Funktionen f_p, deren jeweiliger Graph mit der x-Achse im I. und II. Quadranten eine Fläche A_p vollständig begrenzt.

b) Ermitteln Sie alle Werte p, für die eine solche Fläche existiert.
Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche A_3.
Begründen Sie, dass die Fläche A_3 die größte aller Flächen A_p ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

c) Untersuchen Sie, ob es eine Funktion gibt, auf deren Graph alle lokalen Minimumpunkte der Funktionen f_p liegen und geben Sie gegebenenfalls eine Gleichung dieser Funktion an.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0;5;1)$, $B(0;-2;8)$ sowie $C_a(2a;-3;-3)$ $(a \in R, a > 0)$ gegeben.
Für jedes a wird durch die Punkte A, B und C_a eine Ebene E_a bestimmt. Die Ebene E_a und die drei Koordinatenebenen begrenzen eine Pyramide P_a mit dreiseitiger Grundfläche.

a) Zeigen Sie, dass für jedes a $(a \in R, a > 0)$ die Ebene E_a die x-Achse in genau einem Punkt $X_a(a;0;0)$ schneidet.
Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide P_a.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Jeder Pyramide P_a sind Quader so einbeschrieben, dass der Koordinatenursprung Eckpunkt des Quaders ist und der einzige nicht in den Koordinatenebenen liegende Eckpunkt zur Ebene E_a gehört.

b) Einige der Quader besitzen in der x-y-Koordinatenebene liegende quadratische Grundflächen mit der Seitenkante 2.
Berechnen Sie den Wert a, für den das Volumen dieses Quaders 7 beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Einige der Quader sind Würfel.
Berechnen Sie den Wert a, für den das Volumen des Würfels $\frac{125}{8}$ beträgt.
Ermitteln Sie die obere Grenze aller derartigen Würfelvolumina.

Erreichbare BE-Anzahl: 7