Sächsisches Staatsministerium
für Kultus

Schuljahr **2001/02**

Geltungsbereich:
- Allgemein bildendes Gymnasium
- Abendgymnasium und Kolleg
- Schulfremde Prüfungsteilnehmer

Schriftliche Abiturprüfung
Leistungskursfach Mathematik

- Ersttermin -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichttellen A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	35 BE,
im Teil B	25 BE,
im Teil C	15 BE,
im Teil D	15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:
1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik"

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben sind Funktionen f_k und g_k durch die Gleichungen

$y = f_k(x) = x^2 e^{1-kx}$ und $y = g_k(x) = xe^{1-kx}$ $\quad (k \in R, k > 0; x \in R)$

a) Geben Sie für die Funktionen f_k die Nullstellen an.
Weisen Sie nach, dass für die 2. Ableitung der Funktionen f_k gilt:
$f_k''(x) = e^{1-kx}\left(k^2x^2 - 4kx + 2\right) \quad (k \in R, k > 0; x \in R)$.
Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Funktionen f_k und untersuchen Sie die Art der Extrema.
Zeigen Sie, dass eine Funktion existiert, auf deren Graph alle lokalen Extrempunkte der Graphen der Funktionen f_k liegen.

Erreichbare BE-Anzahl: 12

b) Für jedes k besitzt der Graph der Funktion f_k genau zwei Wendepunkte.
Berechnen Sie die Wendestellen.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Für jedes k haben die Graphen der Funktionen f_k und g_k genau zwei gemeinsame Punkte.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.
Geben Sie den Wert k an, für den sich die zugehörigen Graphen im Punkt $Q(1;1)$ schneiden.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Für jedes k existiert die Tangente an den Graphen der Funktion f_k an der Stelle $x = 1$.
Ermitteln Sie den Wert k, für den der Anstiegwinkel dieser Tangente 45°, beträgt und geben Sie für diesen Fall eine Gleichung dieser Tangenten an.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

e) Für jedes u $(u \in R; u > 0)$ sind der Koordinatenursprung und der Punkt $R_u(u; f_1(u))$ Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes R_u so, dass der Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks maximal wird.
Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

f) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Stammfunktion G_k der Funktion g_k.
Der Graph der Funktion g_1, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 4$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Für jedes a $(a \in R, 0 < a < 4)$ zerlegt die Gerade mit der Gleichung $x = a$ diese Fläche in zwei Teilflächen.
Ermitteln Sie den Wert a, für den beide Teilflächen den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(8;0;-5)$, $B(5;8;0)$, $C(-4;4;1)$, $D(-1;-4;-4)$ und für jedes a $(a \in R, a > 0)$ der Punkt $S_a(2+2a;2-3a;-2+6a)$ gegeben.
Für jedes a $(a \in R, a > 0)$ sind die Punkte A, B, C, D und S_a Eckpunkte einer Pyramide mit der Grundfläche ABCD.

a) Weisen Sie nach, dass jede Pyramide $ABCDS_a$ eine gerade, quadratische Pyramide ist.
Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS_3$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S_a für den die Pyramide $ABCDS_a$ ein Volumen von $38\frac{1}{9}$ hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 13

b) Ermitteln Sie die Größe des Schnittwinkels der Ebene einer Seitenfläche der Pyramide $ABCDS_3$ mit der Ebene der Grundfläche dieser Pyramide.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Der Kreis k ist Umkreis der Grundfläche der Pyramide $ABCDS_3$.
Ermitteln Sie das Volumen des Kreiskegels, der durch den Kreis k und den Punkt S_3 als Spitze bestimmt ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Die x-y-Koordinatenebene teilt die Pyramidengrundfläche ABCD in zwei Teilflächen.
Geben Sie jeweils die Art der entstehenden Teilflächen an und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Berechnen Sie den Flächeninhalt derjenigen Teilfläche, die den Punkt C als Eckpunkt enthält.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Teil C: Stochastik

Eine Firma stellt Heizelemente mit einer Leistung von 1000 W her.

a) Zwei Kontrolleure K_1 und K_2 überprüfen die in der Firma produzierten Heizelemente auf Mängel. Kontrolleur K_1 prüft 65% und Kontrolleur K_2 prüft 35 der Produkte. Bekannt ist, dass Mängel durch Kontrolleur K_1 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,85 und durch Kontrolleur K_2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,90 entdeckt werden.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein mangelhaftes Heizelement erkannt wird.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bei der Kontrolle nicht erkanntes, mangelhaftes Heizelement von Kontrolleur K_1 geprüft wurde.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

b) Das Heizelement und ein weiteres Teil bilden die für das Funktionieren eines elektrischen Gerätes verantwortlichen Bestandteile. Im Verlauf eines Jahres fällt das Heizelement mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,10 und das andere Teil mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,08 aus. Die Ausfälle sind voneinander unabhängig.
Die Reparatur des Heizelements kostet 25 € und die des anderen Teils 15 €.

Führen Sie eine Zufallsgröße ein, die die im Verlauf eines Jahres auftretenden Reparaturkosten beschreibt und berechnen Sie die im Jahr pro produziertes Gerät zu erwartenden Reparaturkosten.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Die Leistung der in der Firma produzierten genormten Heizelemente (Nennleistung 1 000 W) sei normalverteilt mit einer Standardabweichung von 100 W.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen, welcher Anteil der produzierten Heizelemente eine Leistung zwischen 950 W und 1050 W aufweist.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) 60% aller Heizelemente werden auf Maschine M_1, die restlichen auf Maschine M_2 gefertigt.
Berechnen Sie den Anteil der fehlerhaften Teile an der Gesamtproduktion der Firma unter den Voraussetzungen, dass 90% der auf Maschine M_1 produzierten Teile fehlerfrei sind und dass 58% aller fehlerfreien Teile von dieser Maschine kommen.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Gegeben ist die Funktion $y = f(t) = 5e^{\left(-\frac{1}{4}t\right)}\sin(\pi t) \quad (t \in R, t \geq 0)$.
Der Graph der Funktion f beschreibt eine gedämpfte Schwingung eines Federschwingers.
Der Wert $f(t)$ entspricht der Auslenkung (Elongation) des Schwingers zum Zeitpunkt t.

a) In dieser Teilaufgabe wird der Verlauf der Schwingung dieses Federschwingers im Zeitintervall $0 \leq t \leq 2$ betrachtet.
Geben Sie die Nullstellen, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und die Art der Extrema an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Weisen Sie nach, dass keine Extremstelle der Funktion f das arithmetische Mittel der jeweils benachbarten Nullstellen ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

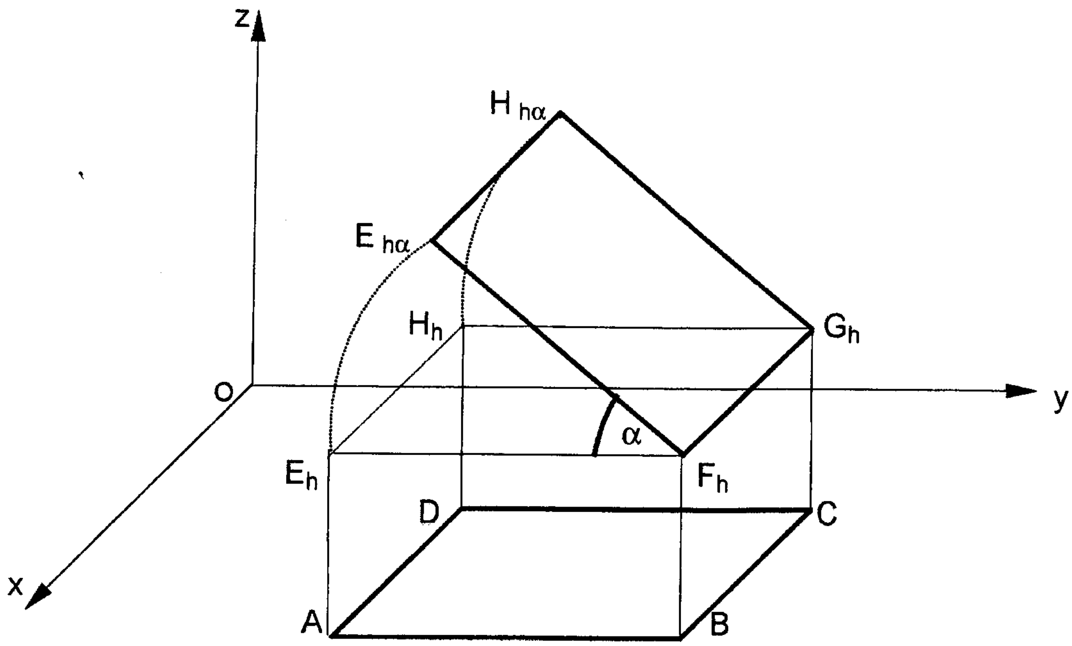
c) Die Funktionswerte $f\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n \in N)$ können näherungsweise als momentane maximale Auslenkungen der Schwingung des Federschwingers betrachtet werden.

Weisen Sie nach, dass die Folge der Beträge dieser Funktionswerte eine geometrische Zahlenfolge ist.
Ermitteln Sie, wie viele aufeinanderfolgende Glieder dieser Folge zu addieren sind, damit die Summe erstmals größer als 19 ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

Der Bearbeitungstisch einer Bohranlage (Ausgangslage ABCD) kann mithilfe einer Hydraulik um die Höhe h angehoben und um den Neigungswinkel α $(\alpha \leq 90°)$ um die Achse $\overline{F_h G_h}$ gekippt werden.
Beide Bewegungen sind miteinander kombinierbar.
$A(8;4;0)$, $B(8;8;0)$, $C(4;8;0)$, $D(4;4;0)$, $E_h(8;4;h)$, $F_h(8;8;h)$, $G_h(4;8;h)$, $H_h(4;4;h)$



(Skizze nicht maßstäblich)

Bei einer bestimmten Lage des Bohrtisches befinden sich die vier Eckpunkte der Tischplatte $E_{h\alpha}$, F_h, G_h und $H_{h\alpha}$ in der Ebene ε mit der Gleichung $y + z = 12$.

a) Berechnen Sie, um welche Höhe h der Bahrtisch angehoben ist.
Berechnen Sie den Neigungswinkel α.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Zur Kontrolle der Bohrtischlage wird vom Punkt $L(0;10;20)$ aus ein Laserstrahl auf den Bohrtisch gerichtet und bei oben beschriebener Lage am Punkt $R(6;6;6)$ der Bohrtischebene reflektiert. Ein Kontrollsensor für den Empfang des reflektierten Strahles soll an der Wand der Werkhalle, die durch die Gleichung $y = 13$ beschrieben wird, angebracht werden.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem der Kontrollsensor befestigt werden muss.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Der Bohrtisch sei nun um eine Höhe h angehoben und um einen Winkel α gekippt.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichung der Ebene in der sich der Bohrtisch in diesem allgemeinen Fall befindet, in der Form

$$(\sin\alpha)y + (co\alpha)z = 8\sin\alpha + h \cdot \cos\alpha$$

angegeben werden kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 5