

## Inhaltsverzeichnis

Vorwort.....	2
Grundkurs.....	3
Pflichtaufgaben.....	3
Teil A: Analysis.....	3
Teil B: Geometrie / Algebra.....	3
Teil C: Stochastik.....	4
Teil D: Wahlaufgaben.....	5
Aufgabe D 1: Analysis.....	5
Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra.....	5
Lösungsvorschläge.....	6
Teil A.....	6
Teil B.....	7
Teil C.....	9
Aufgabe D 1.....	9
Aufgabe D 2.....	10
Leistungskurs.....	11
Pflichtaufgaben.....	11
Teil A: Analysis.....	11
Teil B: Geometrie / Algebra.....	11
Teil C: Stochastik.....	12
Teil D: Wahlaufgaben.....	13
Aufgabe D 1: Analysis.....	13
Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra.....	13
Lösungsvorschläge.....	14
Teil A.....	14
Teil B.....	16
Teil C.....	17
Aufgabe D 1.....	18
Aufgabe D 2.....	21

## Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Homepage befinden. Insbesondere ist dies **keine** Seite des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

*Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2002. Sie wurde am Abend der schriftlichen Abiturprüfung veröffentlicht (und nicht vorher).*

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter [www.sn.schule.de/~matheabi](http://www.sn.schule.de/~matheabi) dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: [www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf](http://www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf).
- Die offiziellen Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem [Sächsischen Schulserver](#) veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: [F. Müller](#) (Mathe-Lehrer).
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

## Grundkurs

### Pflichtaufgaben

#### Teil A: Analysis

Gegeben sind die Funktionen  $f$  und  $F$  durch die Gleichungen  $y = f(x) = \frac{20x}{(x^2+3)^2}$  ( $x \in \mathbf{D}_f$ ) und

$$y = F(x) = -\frac{10}{x^2+3} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

- a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und die Nullstelle der Funktion  $f$  an.  
 Untersuchen Sie die Funktion  $f$  auf Symmetrie.  
 Untersuchen Sie die Funktion  $f$  auf achsenparallele Asymptoten und geben Sie gegebenenfalls deren Gleichungen an.  
 Der Graph der Funktion  $f$  besitzt genau zwei lokale Extrempunkte  $P_{\text{MIN}}$  und  $P_{\text{MAX}}$ .  
 Geben Sie die Koordinaten dieser Punkte an.

Erreichbare BE-Anzahl: 9

- b) Weisen Sie nach, dass die Funktion  $F$  eine Stammfunktion der Funktion  $f$  ist.  
 Begründen Sie, dass die Funktion  $F$  höchstens eine lokale Extremstelle hat.

Für jedes  $a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$ ) begrenzen der Graph der Funktion  $f$ , die  $x$ -Achse und die Gerade mit der Gleichung  $x = a$  eine Fläche vollständig.  
 Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von  $a$ . Ermitteln Sie den Wert  $a$ , für den der Flächeninhalt 2,5 beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

- c) Für jedes  $u$  ( $u \in \mathbf{R}$ ,  $0 < u < 10$ ) sind der Koordinatenursprung und der Punkt  $P_u(u \mid f(u))$  Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks. Es existiert genau ein Wert  $u$ , für den der Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks maximal wird.  
 Ermitteln Sie diesen Wert  $u$  und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

- d) Der Graph einer ganzrationalen Funktion  $g$  dritten Grades verläuft durch die lokalen Extrempunkte  $P_{\text{MIN}}$  und  $P_{\text{MAX}}$  des Graphen der Funktion  $f$ .  
 Außerdem hat die Funktion  $g$  an der Stelle  $x = -1/3$  einen Wendepunkt.  
 In diesem Wendepunkt besitzt die Tangente an den Graphen der Funktion  $g$  den Anstieg  $-1/12$ .  
 Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion  $g$ .

Erreichbare BE-Anzahl: 5

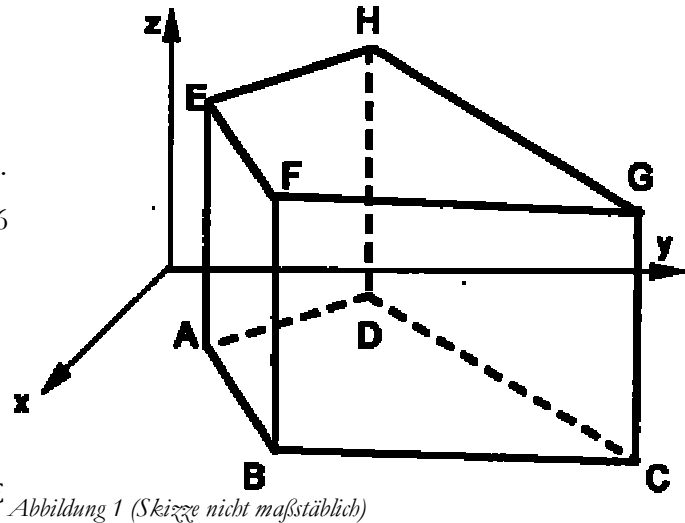
#### Teil B: Geometrie /Algebra

Die Abbildung zeigt die Skizze eines in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellten geraden Prismas mit der Grundfläche  $ABCD$  und der Höhe  $h = 5$ . Die Eckpunkte der Grundfläche sind die Punkte  $A(4 \mid 3 \mid 0)$ ,  $B(21/2 \mid 9/2 \mid 0)$ ,  $C(14 \mid 19 \mid 0)$  und  $D(5/2 \mid 19/2 \mid 0)$

- a) Geben Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte des Prismas an.  
 Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist.  
 Ermitteln Sie die Größe des Winkels  $\sphericalangle$ BAD.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

- b) Durch die Punkte A, C und E ist eine Ebene  $\mathcal{E}$  und durch die Punkte B und H eine Gerade  $h$  bestimmt.  
 Geben Sie jeweils eine Gleichung der Ebene  $\mathcal{E}$  und der Geraden  $h$  an.  
 Untersuchen Sie, ob der Punkt  $Q(13/2 \mid 7 \mid 5/2)$  Schnittpunkt der Ebene  $\mathcal{E}$  und der Geraden  $h$  ist.



Erreichbare BE-Anzahl: 4

- c) Vom geraden Prisma ABCDEFGH wird die Pyramide mit der Grundfläche EFG und der Spitze B abgetrennt.  
 Begründen Sie, dass das Volumen des Restkörpers  $5/6$  des Volumens des Prismas beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Die folgende Teilaufgabe bezieht sich nur auf die x-y-Ebene.

- d) In der x-y-Ebene liegt ein Kreis  $k$ , dessen Radius  $r = \sqrt{50}$  beträgt und dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks ABCD ist.  
 Die Gerade  $t$  sei Tangente an den Kreis  $k$  im Punkt  $R(11/2 \mid 14)$ .  
 Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente  $t$ .

Erreichbare BE-Anzahl: 2

### Teil C: Stochastik

Ein Glücksrad  $G_1$  ist in 36 gleich große Sektoren eingeteilt, die paarweise verschieden mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 36 beschriftet sind. Bei jeder Drehung des Rades wird genau ein Sektor mithilfe eines Zeigers "gezogen".

- a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass bei einer Drehung des Rades  $G_1$  eine durch drei teilbare Zahl „gezogen“ wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

- b) Das Glücksrad  $G_1$  wird 10-mal gedreht.  
 Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass dabei genau zweimal eine durch 5 teilbare Zahl „gezogen“ wird.  
 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei mindestens zweimal, aber höchstens fünfmal eine durch 5 teilbare Zahl „gezogen“ wird.  
 Ermitteln Sie, wie oft man das Glücksrad  $G_1$  mindestens drehen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens einmal eine durch 5 teilbare Zahl „gezogen“ wird?

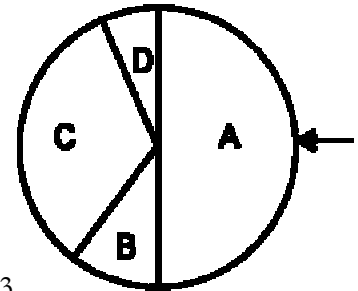
Erreichbare BE-Anzahl: 5

- c) Das Glücksrad  $G_2$  sei in vier Sektoren A, B, C und D eingeteilt (Abbildung 2).  
 Zentriwinkel des Sektors B:  $36^\circ$  des Sektors C:  $120^\circ$  des Sektors D:  $24^\circ$

Bei jeder Drehung des Rades wird mithilfe eines Zeigers genau ein Sektor ermittelt.

Der Spieler zahlt einen Einsatz von 1 € und erhält beim "Ziehen" des Sektors D 5 €, des Sektors B 2 € und des Sektors C 1 € ausgezahlt. Bei der Ziehung des Sektors A erhält er nichts.

Ermitteln Sie, welchen Gewinn (erhaltenes Geld abzüglich des Einsatzes) ein Spieler im Schnitt erwarten kann.



Erreichbare BE-Anzahl: 3

Abbildung 2: (Skizze nicht maßstäblich)

- d) Das Glücksrad  $G_3$  sei in vier Sektoren eingeteilt.

Geben Sie die Größen der Zentriwinkel dieser Sektoren so an, dass sich die Wahrscheinlichkeiten, mit denen sie "gezogen" werden, wie 1 : 2 : 4 : 8 verhalten.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

### Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

#### Aufgabe D 1: Analysis

Gegeben ist eine Funktion  $f$  durch

$$y=f(x)= \left(3-\frac{3}{x}\right) \cdot e^x \quad (x \in \mathbf{R}, -2 \leq x \leq 0).$$

- a) Der Graph einer quadratischen Funktion  $g$ , der achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse ist, verläuft durch den Punkt  $P(0; -40)$ . Außerdem ist die Nullstelle der Funktion  $f$  auch Nullstelle der Funktion  $g$ . Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion  $g$  und geben Sie alle Schnittpunkte der Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- b) Der Graph der Funktion  $t$  ist Tangente an den Graphen der Funktion  $f$  im Punkt  $Q(1 | f(1))$ . Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente  $t$ .

Im Intervall  $0,8 \leq x \leq 1,2$  wird der Graph der Funktion  $f$  näherungsweise durch diese Tangente  $t$  beschrieben.

Ermitteln Sie die maximale Abweichung der Funktionswerte der Funktionen  $f$  und  $t$  in diesem Intervall.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

- c) Für jedes  $a$  ( $a \in \mathbf{R}, a > 0$ ) ist eine Funktion  $h_a$  durch  $y = h_a(x) = ax^2 - 20$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) gegeben.

Es existiert ein Wert  $a$ , so dass die Funktionen  $f$  und  $h_a$  an der Stelle  $x = 1$  die maximale Differenz ihrer Funktionswerte  $f(x) - h_a(x)$  haben.

Berechnen Sie diesen Wert  $a$  und geben Sie die maximale Differenz an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

#### Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt  $M(3; -1; 0)$  und für jedes  $a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) eine

Gerade  $g_a$  durch die Gleichung  $(r \in \mathbf{R})$  gegeben.

- a) Begründen Sie, dass alle Geraden  $g$ , zueinander parallel verlaufen.  
Es gibt einen Wert  $a$ , für den der Punkt  $M$  Schnittpunkt der Geraden  $g$ , mit der  $x$ - $y$ -Koordinatenebene ist. Ermitteln Sie diesen Wert  $a$ .

Erreichbare BE-Anzahl: 3

$M$  ist der Schnittpunkt der Diagonalen eines in der  $x$ - $y$ -Koordinatenebene liegenden regelmäßigen Sechsecks  $ABCDEF$  mit dem Eckpunkt  $A(3+\sqrt{3} \mid -2 \mid 0)$ .

- b) Zeigen Sie, dass ein zum Punkt  $A$  benachbarter Eckpunkt des Sechsecks die Koordinaten  $(3+\sqrt{3} \mid 0 \mid 0)$  besitzt.  
Berechnen Sie die Koordinaten des anderen benachbarten Eckpunktes des Punktes  $A$ .

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- c) Das Sechseck  $ABCDEF$  ist Grundfläche von schiefen Pyramiden mit dem Volumen  $18\sqrt{3}$ , deren Spitzen auf der Geraden  $g_3$  liegen.  
Ermitteln Sie die Koordinaten aller Punkte, die Spitzen einer solchen Pyramide sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

## Lösungsvorschläge

### Teil A

- a) Definitionsbereich:  $D_f = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$   
Nullstelle:  $x_N = 0$   
Ansatz für Symmetrie:  $f(-x) = -f(x)$   
Symmetrie: punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung  
Aussage zu senkrechten Asymptoten: es gibt keine  
Verhalten im Unendlichen:  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$   
Gleichung der waagerechten Asymptote:  $y = 0$   
Koordinaten des lokalen Minimumpunktes:  $P_{\text{MIN}}(-1 \mid -1,25)$   
Koordinaten des lokalen Maximumpunktes:  $P_{\text{MAX}}(1 \mid 1,25)$
- b) Ansatz für Nachweis der Stammfunktion:  $F'(x) = f(x)$   
Nachweis der Stammfunktion:  $F'(x) = -10 \cdot ((x^2 + 3)^{-1})' = -10 \cdot (-1) \cdot (x^2 + 3)^{-2} \cdot 2x$   
Begründung: Da  $f$  genau eine Nullstelle besitzt und  $F$  stetig ist, kann  $F$  nicht mehr als eine lokale Extremstelle haben.  
Ansatz für Flächenberechnung:  $\int_0^a f(x) dx = 2,5 \Rightarrow A(a) = |F(a) - F(0)|$   
Flächeninhalt in Abhängigkeit von  $a$ :  $A(a) = -10/(a^2+3) + 10/3$   
Ansatz für Wert  $a$ : z. B. mit GTR  
`solve(fnInt(Y1, X, 0, A) - 2.5, A, 2) → 3`  
Wert  $a$ :  $a = 3$
- c) Ansatz für Zielfunktion:  $A(u) = u \cdot f(u)$

1 Es dauert einen kleinen Moment, bis das Ergebnis angezeigt wird. Der Einsatz des GTR umgeht  $A(a)$  und bietet sich dann als Alternative an, wenn  $A(a)$  nicht berechnet werden kann oder es vielleicht falsch berechnet worden ist.

Zielfunktion:  $A(u) = 20u^2/(x^2 + 3)^2$

weiter mit GTR: solve(nDerive(X\*Y1,X,X),X,2) → 1,732

```

solve(nInt(Y1,X
;0;A)-2.5;A,2
3
solve(nDeriv(Y1
;X;X);X,2
1.732051096

```

Extremstelle u:  $u = \sqrt{3}$

Flächeninhalt A:  $A = 1,67$

d) Ansatz für Gleichung der Funktion g:

g:  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

I:  $P_{\text{MIN}} \in g$

II:  $P_{\text{MAX}} \in g$

III:  $g''(-1/3) = 0$

IV:  $g'(-1/3) = -1/12$

1. und 2. Ableitung der angenommenen Funktion g:

g':  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

g'':  $y'' = 6ax + 2b$

und Übersetzung der oben stehenden Gleichungen:

I:  $a + b + c + d = 5/4$

II:  $-a + b - c + d = -5/4$

III:  $2a - 2b = 0$

IV:  $1/3 a - 2/3 b + c = -1/12$

und weiter mit GTR [prgmLinearGS](#)

<pre> PRGM LINEAR GS </pre>	<pre> LOESUNG LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME KOEFFIZIENTENMA- TRIX EINGEGEBEN? JA=1 NEIN=0 EINGABE D, KOEFF DIMENSION?4 </pre>	<pre> ZEILE 1 SPALTE 1 SPALTE 1 SPALTE 1 SPALTE 1 RESOLUT B1.25 </pre>	<pre> ZEILE 2 SPALTE -1 SPALTE 1 SPALTE -1 SPALTE 1 RESOLUT B-1.25 </pre>
<pre> ZEILE 3 SPALTE 2 SPALTE -2 SPALTE 0 SPALTE 0 RESOLUT B0 </pre>	<pre> ZEILE 4 SPALTE 1/3 SPALTE -2/3 SPALTE 1 SPALTE 0 RESOLUT B-1/12 </pre>	<pre> LOESUNG LINEARER INVERSE MATRIX 2:GAUSS-ALGORITHM 3:GAUSS MIT LSG. </pre>	<pre> 1/3 -2/3 1 0... ERGEBNIS [[1 ] [[1 ] [[1/4] [[-1 1] Done </pre>

zwei Gleichungen des Gleichungssystems

zwei weitere Gleichungen des Gleichungssystems

Gleichung der Funktion g:  $y = x^3 + x^2 + 0,25x - 1$

### Teil B

a) Koordinaten der restlichen Eckpunkte: E(4 | 3 | 5), F(10,5 | 4,5 | 5), G(14 | 19 | 5),

H(2,5 | 9,5 | 5)

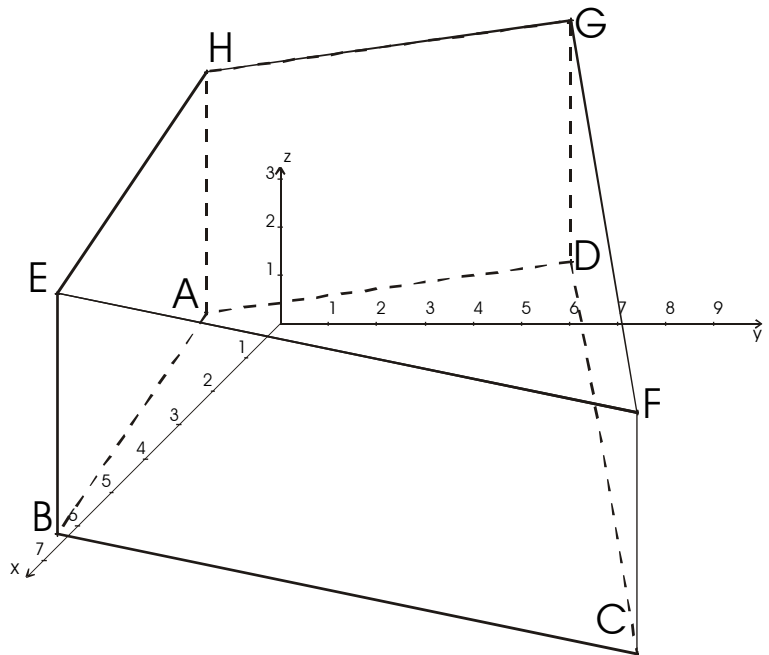
2 Streckenlängen:  $\overline{AB} = \overline{AD} = \sqrt{44,5}$

alle Streckenlängen:  $\overline{CB} = \overline{CD} = \sqrt{222,5}$

Schlussfolgerung: Viereck ABCD ist ein Drachenviereck

Ansatz für Größe des Winkels:  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$  ;  $\vec{AD} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 6,5 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$

Größe des Winkels:  $\sphericalangle BAD = 90^\circ$



b) Gleichung der Ebene  $\mathcal{E}$ :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

( $t, s \in \mathbf{R}$ )

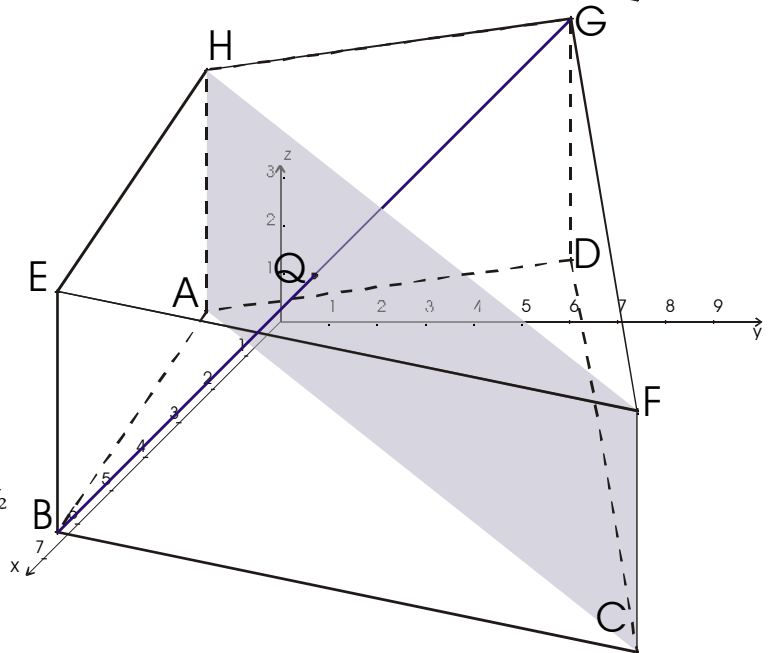
Gleichung der Geraden  $h$ :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 10,5 \\ 4,5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbf{R})$$

Ansatz für Nachweis:  $Q \in \mathcal{E}$  und

$Q \in h$  und aus Aufgabenstellung ist ersichtlich, dass  $h \not\subset \mathcal{E}$

Nachweis: mit  $s = 1/2$ ;  $t = 1/4$  und  $r = 1/2$  folgt  $\mathcal{E} \cap h = Q$



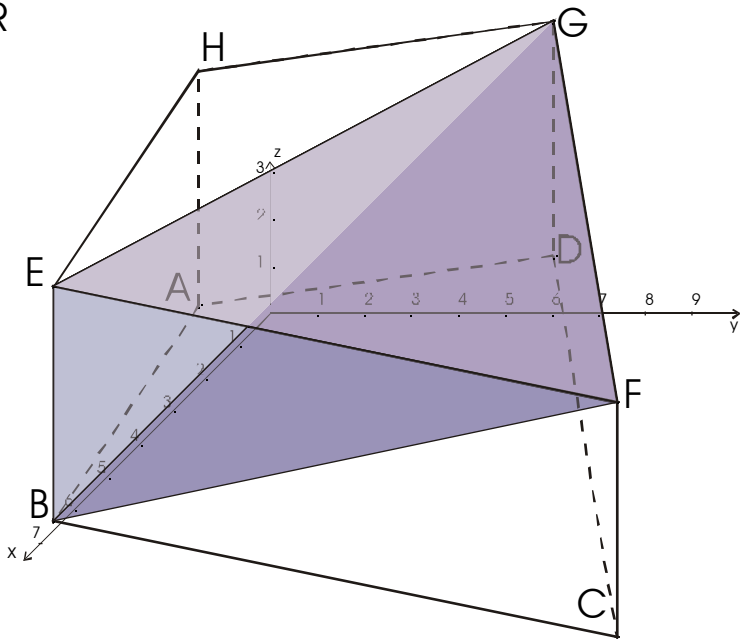
c) Aussage zum Verhältnis der Grundflächen  $A_G$ :  $A_{G,EFGH} : A_{G,EFG} = 2 : 1$

Da das Prisma gerade ist, ist auch die Pyramide gerade und deren Höhen sind identisch.

Aussage zum Verhältnis der Volumina von Pyramide und Prisma:  $V_{\text{Prisma}} = 1/6 V_{\text{Pyramide}}$

Schlussfolgerung für Restkörper

- d) Mittelpunkt des Kreises:  $M(6,5 \mid 7)$ ;  $R$   
 $R \in k_M; \sqrt{50}$   
 Gleichung der Tangente:  
 $y = 1/7 x + 185/14$  oder  
 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ 14 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$



**Teil C**

- a) Wahrscheinlichkeit:  $p = 1/3$   
 $E_1 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36\}$  und  $|E_1| = 12$   
 b) Verteilung der Zufallsgröße:  
 $E_2 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$ ;  
 $|E_2| = 7 \Rightarrow P(E_2) = 7/36$   
 Wir betrachten, ob das Ereignis  $E_2$  eintritt oder nicht, liegt eine Binomialverteilung mit den Parametern  $n = 10$  und  $p = 7/36$  vor.

Wahrscheinlichkeit  $P(X = 2)$ :  $P(X = 2) = 0,3017 = B_{n,p}(2)$

Wahrscheinlichkeit  $P(2 \leq X \leq 5)$ :  $P(2 \leq X \leq 5) = 0,6017 = B_{n,p}(2) + B_{n,p}(3) + B_{n,p}(4) + B_{n,p}(5)$

Ansatz für Anzahl: (Bernoulli-Kette)  $1 - (1 - p)^n > 99\% \Rightarrow n > 21,3$

Anzahl  $n$ :  $n = 22$

- c) Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Sektoren gewählt werden: (Tabelle 1)  
 Verteilung der Zufallsgröße  $Y$   
 Erwartungswert:  $E(Y) = -0,13 \text{ €}$   
 d) Größe der Winkel:  $24^\circ, 48^\circ, 96^\circ, 192^\circ$

$y_i$	$P(Y=y_i)$	Gewinn
A	1/2	-1 €
B	1/10	1 €
C	1/3	0 €
D	1/15	4 €

Tabelle 1

**Aufgabe D 1**

- a) Nullstelle der Funktion  $f$ :  $x_0 = 1$   
 $g(x) = ax^2 + c$  (wegen Achsensymmetrie ist  $b = 0$ ) und

I:  $g(1) = 0$

II:  $g(0) = -40$

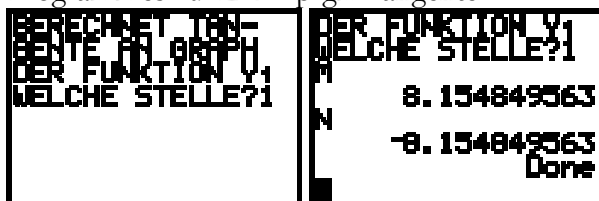
Gleichung der Funktion  $g$ :  $y = g(x) = 40x^2 - 40$

Koordinaten der Schnittpunkte:  $S_1(-1,03 \mid 2,12), S_2(0,08 \mid -39,77), S_3(1 \mid 0)$

- b) Ansatz für Gleichung der Tangente  $t$ :  $y = mx + n$

mit  $m = f'(1)$  und  $n = f(1) - f'(1) \cdot 1$

„Ermitteln Sie“ lässt den Einsatz eines GTR-Programmes zu. Z. B.: prgmTangente



Gleichung der Tangente:  $y = 3ex - 3e = t(x)$

Ansatz für maximale Abweichung:

$d(x) = f(x) - t(x)$  und die maximale Abweichung liegt am Intervallrand (vgl. Abbildung 6)

$d(0,8) = -0,0381879$

$d(1,2) = 0,0290892$

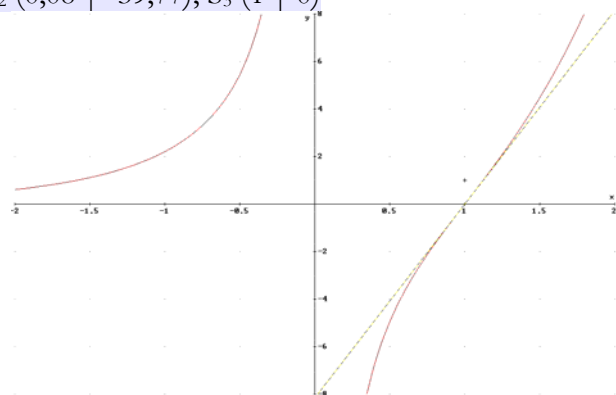


Abbildung 6:  $f(x)$  mit Tangente  $t$

Maximale Abweichung d:  $d \approx -0,038$

- c) Lösungsidee: gesucht ist  $a_c$  für  $k_a(x) := f(x) - h_a(x)$ ; dabei muss  $k'_a(1) = 0$  sein

1. Ableitung:  $k'_a(x) = 3e^x \cdot \frac{(x^2 - x + 1)}{x^2} - 2ax$  und  $k'_a(1) = 3e^1 - 2a = 0$

Wert a:  $a = 3/2 e$

maximale Differenz d:  $d \approx 15,92$

## Aufgabe D 2

- a) Begründung: Der Parameter  $a$  ist nicht im Richtungsvektor der Geraden enthalten. Ändert sich  $a$ , so ändert sich lediglich der Stellungsvektor von  $g_a$  nicht der Richtungsvektor.

Ansatz für Wert t: 
$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wert a:  $a = -3$

- b) Ansatz für Nachweis: Das Dreieck, das durch die Punkte A, M und den, in der Aufgabenstellung gegebenen Punkt B, gebildet wird, ist gleichseitig.

Nachweis für gegebenen benachbarten Punkt:  $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{AB} = 2$

Koordinaten des anderen benachbarten Punktes:  $(3 \mid -3 \mid 0) = F$

Zum Beispiel  $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BM}$ , denn das Viereck ABMF ist ein Parallelogramm.

- c) Flächeninhalt der Grundfläche:  $A_G = 6 \cdot A_{\Delta ABM} = 6\sqrt{3}$

$V = 1/3 A_G h$

Höhe:  $h = \pm 9$  und die gesuchten Spitzen liegen auf  $g_3$  in der Höhe  $z = \pm 9$

Ansatz für Koordinaten der Punkte: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \pm 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koordinaten der Punkte  $S_1$  und  $S_2$ :  $S_1(21 \mid -28 \mid 9)$ ,  $S_2(-15 \mid 26 \mid -9)$  für  $r_1 = 12$  und  $r_2 = -6$

## Leistungskurs

### Pflichtaufgaben

#### Teil A: Analysis

Gegeben sind Funktionen  $f_k$  und  $g_k$  durch die Gleichungen

$$y=f_k(x)=x^2 e^{1-kx} \quad \text{und} \quad y=g_k(x)=x e^{1-kx} \quad (k \in \mathbf{R}, k > 0; x \in \mathbf{R})$$

a) Geben Sie für die Funktionen  $f_k$  die Nullstellen an.

Weisen Sie nach, dass für die 2. Ableitung der Funktionen  $f_k$  gilt:  $f_k''(x)=e^{1-kx}(k^2x^2-4kx+2)$  ( $k \in \mathbf{R}$ ,  $k > 0$ ;  $x \in \mathbf{R}$ ).

Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Funktionen  $f_k$  und untersuchen Sie die Art der Extrema.

Zeigen Sie, dass eine Funktion existiert, auf deren Graph alle lokalen Extrempunkte der Graphen der Funktionen  $f_k$  liegen.

Erreichbare BE-Anzahl: 12

b) Für jedes  $k$  besitzt der Graph der Funktion  $f_k$  genau zwei Wendepunkte.

Berechnen Sie die Wendestellen.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Für jedes  $k$  haben die Graphen der Funktionen  $f_k$  und  $g_k$  genau zwei gemeinsame Punkte.

Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

Geben Sie den Wert  $k$  an, für den sich die zugehörigen Graphen im Punkt  $Q(1 \mid 1)$  schneiden.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Für jedes  $k$  existiert die Tangente an den Graphen der Funktion  $f_k$  an der Stelle  $x = 1$ .

Ermitteln Sie den Wert  $k$ , für den der Anstiegswinkel dieser Tangente  $45^\circ$  beträgt und geben Sie für diesen Fall eine Gleichung dieser Tangenten an.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

e) Für jedes  $u$  ( $u \in \mathbf{R}$ ;  $u > 0$ ) sind der Koordinatenursprung und der Punkt  $R_u(u \mid f_1(u))$  Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes  $R_u$  so, dass der Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks maximal wird.

Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

f) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Stammfunktion  $G_k$  der Funktion  $g_k$ .

Der Graph der Funktion  $g_1$ , die  $x$ -Achse und die Gerade mit der Gleichung  $x = 4$  begrenzen eine Fläche vollständig.

Für jedes  $a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ,  $0 < a < 4$ ) zerlegt die Gerade mit der Gleichung  $x=a$  diese Fläche in zwei Teilflächen.

Ermitteln Sie den Wert  $a$ , für den beide Teilflächen den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

#### Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte  $A(8 \mid 0 \mid -5)$ ,  $B(5 \mid 8 \mid 0)$ ,  $C(-4 \mid 4 \mid 1)$ ,

$D(-1 \mid -4 \mid -4)$  und für jedes  $a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$ ) der Punkt  $S_a(2 + 2a \mid 2 - 3a \mid -2 + 6a)$  gegeben.

Für jedes  $a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$ ) sind die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  und  $S$ , Eckpunkte einer Pyramide mit der Grundfläche  $ABCD$ .

- a) Weisen Sie nach, dass jede Pyramide  $ABCD S_3$ , eine gerade, quadratische Pyramide ist.  
Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide  $ABCD S_3$ .  
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $S_a$  für den die Pyramide  $ABCD S_a$  ein Volumen von  $38 \frac{1}{9}$  hat.  
Erreichbare BE-Anzahl: 13
- b) Ermitteln Sie die Größe des Schnittwinkels der Ebene einer Seitenfläche der Pyramide  $ABCD S_3$  mit der Ebene der Grundfläche dieser Pyramide.  
Erreichbare BE-Anzahl: 3
- c) Der Kreis  $k$  ist Umkreis der Grundfläche der Pyramide  $ABCD S_3$ . Ermitteln Sie das Volumen des Kreiskegels, der durch den Kreis  $k$  und den Punkt  $S_3$  als Spitze bestimmt ist.  
Erreichbare BE-Anzahl: 3
- d) Die  $x$ - $y$ -Koordinatenebene teilt die Pyramidengrundfläche  $ABCD$  in zwei Teilflächen.  
Geben Sie jeweils die Art der entstehenden Teilflächen an und begründen Sie Ihre Entscheidung.  
Berechnen Sie den Flächeninhalt derjenigen Teilfläche, die den Punkt  $C$  als Eckpunkt enthält.  
Erreichbare BE-Anzahl: 6

### Teil C: Stochastik

Eine Firma stellt Heizelemente mit einer Leistung von 1000 W her.

- a) Zwei Kontrolleure  $K_1$  und  $K_2$  überprüfen die in der Firma produzierten Heizelemente auf Mängel. Kontrolleur  $K_1$  prüft 65% und Kontrolleur  $K_2$  prüft 35% der Produkte. Bekannt ist, dass Mängel durch Kontrolleur  $K_1$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,85 und durch Kontrolleur  $K_2$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,90 entdeckt werden.  
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein mangelhaftes Heizelement erkannt wird.  
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bei der Kontrolle nicht erkanntes, mangelhaftes Heizelement von Kontrolleur  $K_1$  geprüft wurde.  
Erreichbare BE-Anzahl: 5
- b) Das Heizelement und ein weiteres Teil bilden die für das Funktionieren eines elektrischen Gerätes verantwortlichen Bestandteile. Im Verlauf eines Jahres fällt das Heizelement mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,10 und das andere Teil mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,08 aus. Die Ausfälle sind voneinander unabhängig. Die Reparatur des Heizelements kostet 25 € und die des anderen Teils 15 €.  
Führen Sie eine Zufallsgröße ein, die die im Verlauf eines Jahres auftretenden Reparaturkosten beschreibt und berechnen Sie die im Jahr pro produziertes Gerät zu erwartenden Reparaturkosten.  
Erreichbare BE-Anzahl: 3
- c) Die Leistung der in der Firma produzierten genormten Heizelemente (Nennleistung 1000 W) sei normalverteilt mit einer Standardabweichung von 100 W.  
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen, welcher Anteil der produzierten Heizelemente eine Leistung zwischen 950 W und 1050 W aufweist.  
Erreichbare BE-Anzahl: 3
- d) 60% aller Heizelemente werden auf Maschine  $M_1$ , die restlichen auf Maschine  $M_2$  gefertigt.  
Berechnen Sie den Anteil der fehlerhaften Teile an der Gesamtproduktion der Firma unter den Voraussetzungen, dass 90% der auf Maschine  $M_1$  produzierten Teile fehlerfrei sind und dass 58% aller fehlerfreien Teile von dieser Maschine kommen.  
Erreichbare BE-Anzahl: 4

### Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

#### Aufgabe D 1: Analysis

Gegeben ist die Funktion  $y = f(t) = 5 e^{-(1/4)t} - \sin(\pi t)$  ( $t \in \mathbf{R}, t \geq 0$ ).

Der Graph der Funktion  $f$  beschreibt eine gedämpfte Schwingung eines Federschwingers.

Der Wert  $f(t)$  entspricht der Auslenkung (Elongation) des Schwingers zum Zeitpunkt  $t$ .

a) In dieser Teilaufgabe wird der Verlauf der Schwingung dieses Federschwingers im Zeitintervall  $0 \leq t \leq 2$  betrachtet.

Geben Sie die Nullstellen, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und die Art der Extrema an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Weisen Sie nach, dass keine Extremstelle der Funktion  $f$  das arithmetische Mittel der jeweils benachbarten Nullstellen ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Die Funktionswerte  $f(n + 1/2)$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) können näherungsweise als momentane maximale Auslenkungen der Schwingung des Federschwingers betrachtet werden.

Weisen Sie nach, dass die Folge der Beträge dieser Funktionswerte eine geometrische Zahlenfolge ist.

Ermitteln Sie, wie viele aufeinander folgende Glieder dieser Folge zu addieren sind, damit die Summe erstmals größer als 19 ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

#### Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

Der Bearbeitungstisch einer Bohranlage (Ausgangslage ABCD) kann mithilfe einer Hydraulik um die Höhe  $h$  angehoben und um den Neigungswinkel  $\alpha$  ( $\alpha \leq 90^\circ$ ) um die Achse  $\overline{FhGh}$  gekippt werden. Beide Bewegungen sind miteinander kombinierbar.

Bei einer bestimmten Lage des Bohrtisches befinden sich die vier Eckpunkte

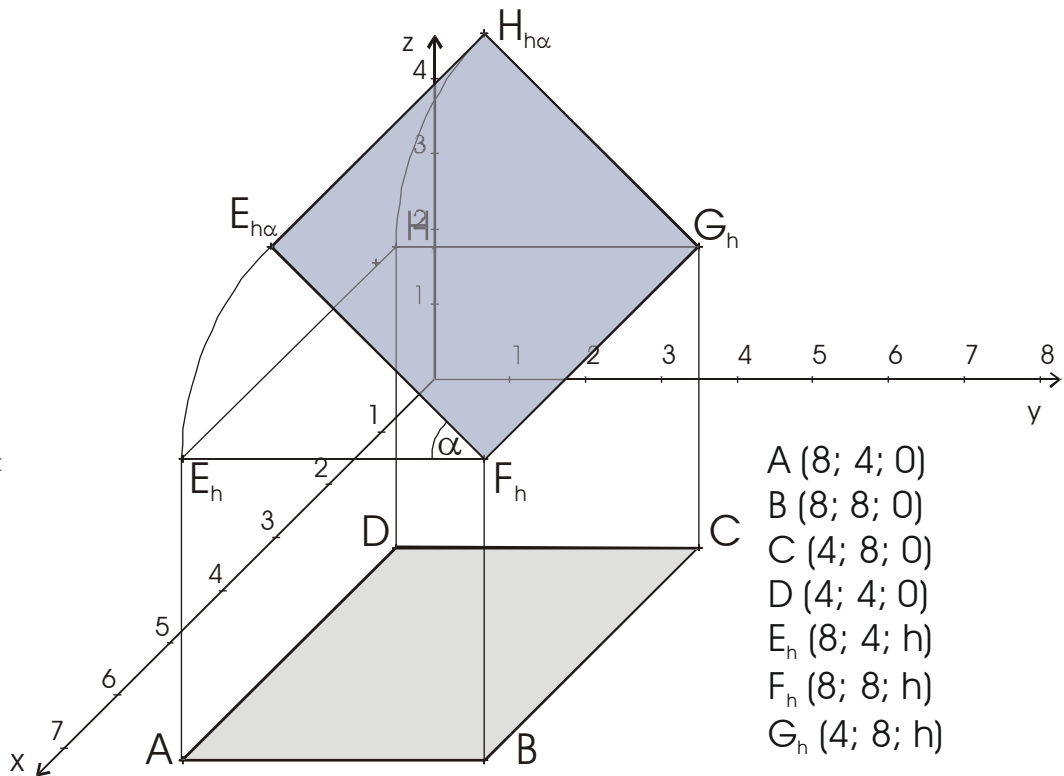


Abbildung 7: (Skizze nicht maßstäblich)

- A (8; 4; 0)
- B (8; 8; 0)
- C (4; 8; 0)
- D (4; 4; 0)
- $E_h$  (8; 4;  $h$ )
- $F_h$  (8; 8;  $h$ )
- $G_h$  (4; 8;  $h$ )

der Tischplatte  $E_{h\alpha}$ ,  $F_h$ ,  $G_h$  und  $H_{h\alpha}$  in der Ebene  $E$  mit der Gleichung  $y + z = 12$ .

- a) Berechnen Sie, um welche Höhe  $h$  der Bohrtisch angehoben ist.  
Berechnen Sie den Neigungswinkel  $\alpha$ .

Erreichbare BE-Anzahl: 4

- b) Zur Kontrolle der Bohrtischlage wird vom Punkt  $L(0; 10; 20)$  aus ein Laserstrahl auf den Bohrtisch gerichtet und bei oben beschriebener Lage am Punkt  $R(6; 6; 6)$  der Bohrtischebene reflektiert. Ein Kontrollsensor für den Empfang des reflektierten Strahles soll an der Wand der Werkhalle, die durch die Gleichung  $y = 13$  beschrieben wird, angebracht werden. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem der Kontrollsensor befestigt werden muss.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Der Bohrtisch sei nun um eine Höhe  $h$  angehoben und um einen Winkel  $\alpha$  gekippt.

- c) Zeigen Sie, dass die Gleichung der Ebene  $\mathcal{E}_{h\pm}$ , in der sich der Bohrtisch in diesem allgemeinen Fall befindet, in der Form

$$(\sin \alpha) y + (\cos \alpha) z = 8 - \sin \alpha + h \cos \alpha$$

angegeben werden kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

## Lösungsvorschläge

### Teil A

- a) Nullstelle:  $x_N = 0$

Ansatz für 1. Ableitung

1. Ableitung:  $f_k(x) = e^{(1-kx)} \cdot (2x - kx^2)$

Ansatz für Nachweis der angegebenen zweiten Ableitung

Nachweis für angegebene zweite Ableitung

Ansatz für lokale Extremstellen:  $f_k'(x_E) = 0$

lokale Extremstellen:  $x_{E1} = 0$ ;  $x_{E2} = 2/k$

Nachweis und Art der Extrema:  $f_k''(0) = 2e \Rightarrow \text{lok. Min.}$ ;  $f_k''(2/k) = -2e \Rightarrow \text{lok. Max.}$

Koordinaten der lokalen Extrempunkte:  $P_{\text{MIN}}(0 \mid 0)$ ;  $P_{\text{MAX}}(2/k \mid 4/(k^2e))$

Ansatz für Gleichung der Funktion, auf deren Graph die lokalen Maximumpunkte liegen

$P_{\text{MAX}}(2/k \mid 4/(k^2e)) \Rightarrow x = 2/k \Rightarrow k = 2/x$  und  $y = 4/(k^2e) = 4/((2/k)^2e)$

Gleichung der Funktion:  $g(x) = y = x^2/e$

Nachweis, dass der lokale Minimumpunkt auf dem Graphen liegt:  $P_{\text{MIN}} \in g(x)$

b) Ansatz für Wendestellen:  $f_k''(x_w) = 0$

Wendestellen:  $x_{w_1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{k}$  ;

$$x_{w_1} = \frac{2 + \sqrt{2}}{k}$$

c) Ansatz für Koordinaten der Schnittpunkte:

$$f_k(x_s) = g_k(x_s)$$

x-Koordinaten der Schnittpunkte:  $x_{s1} = 0$ ;

$$x_{s2} = 1$$

Koordinaten der Schnittpunkte:  $S_1(0 | 0)$ ;

$$S_2(1 | e^{1-k})$$

Wert k:  $k=1$

d)  $t_k: y = mx + n$  mit  $x_s = 1$  (entspricht  $S_2$ )

Anstieg der Tangente:  $m = f_k'(x_s) = (2 - k) \cdot e^{1-k}$

Ansatz für Wert k:  $m = \tan 45^\circ = 1$

$$1 = (2 - k) \cdot e^{1-k} \text{ \{mit GTR} \rightarrow \text{solve-Funktion}\}$$

Wert k:  $k = 1$

y-Koordinate des Berührungspunktes:

$$n = e^{1-k} - e^{1-k} \cdot 1 = 0$$

Gleichung der speziellen Tangente:  $y = x$

e) Ansatz für Zielfunktion:  $A(u) = u \cdot f_1(u)$

Zielfunktion:  $A(u) = u^3 \cdot e^{1-u}$

Extremstelle:  $u = 3$

GTR: `solve(nDerive(A(X), X, X), X, 2)`

maximaler Flächeninhalt:  $A \approx 3,65$

Koordinaten des Punktes  $R_u$ :  $R_u(3; 9/e^2)$

f) Ansatz für partielle Integration:

$$G_k(x) = \int x \cdot e^{1-kx} dx \text{ und}$$

$$\int u v' = u \cdot v - \int u' \cdot v \text{ mit } u = x \text{ und } v' = e^{1-kx}$$

partielle Integration:

$$G_k(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) \cdot e^{1-kx} - \int -\frac{1}{k} \cdot e^{1-kx} dx = -\frac{x}{k} \cdot e^{1-kx} + \frac{1}{k} \cdot \int e^{1-kx} dx$$

Gleichung einer Stammfunktion:  $G_k(x) = e^{1-k} \cdot (-xk^{-1} - k^{-2})$

Ansatz für Flächeninhalt der Gesamtfläche:  $\int_0^a g_1(x) dx = \int_a^4 g_1(x) dx$  (beide positiv)

GTR<sup>2</sup>: `solve(fnInt(g1(x), X, 0, A) - fnInt(g1(x), X, A, 4), A, 2) → 1,53618`

Flächeninhalt der Gesamtfläche:  $A_G \approx 2,47$

Ansatz für Wert a

Wert a:  $a \approx 1,54$

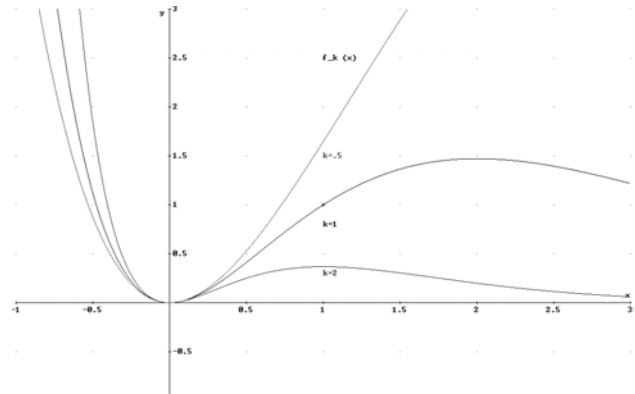


Abbildung 8:  $f_k(x)$  für  $k=1; 2; 0,5$

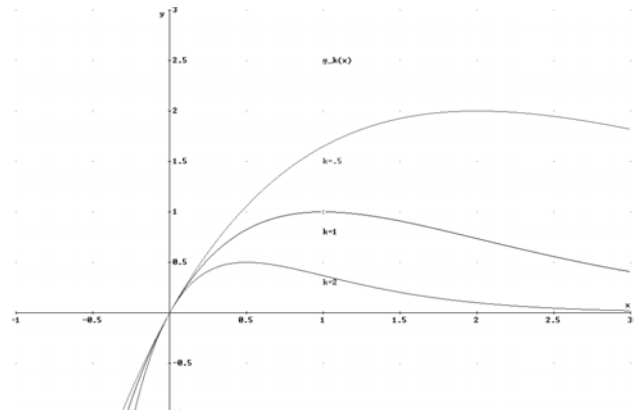


Abbildung 9:  $g_k(x)$  für  $k=1; 2; 0,5$

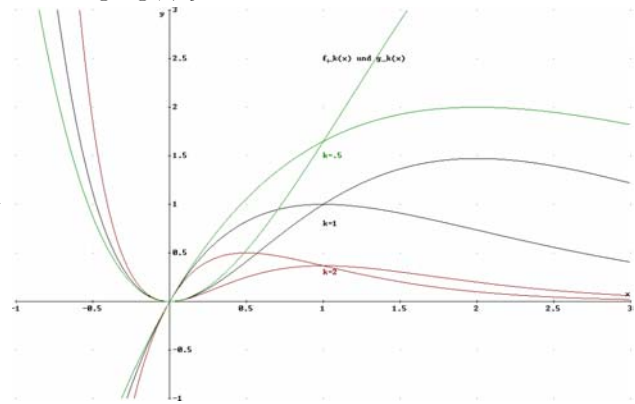


Abbildung 10: beide Funktionen gemeinsam

2 Diese Variante führt direkt zum Ziel. Außerdem fließen keine Zwischenergebnisse, die möglicherweise falsch sind, in die Rechnung ein.

**Teil B**

- a) Nachweis der Parallelität gegenüberliegender Seiten  
 Nachweis der gleichen Streckenlänge eines Paares benachbarter Seiten  
 Nachweis der Orthogonalität zweier anliegender Seiten:

z. B.:  $\vec{AB} = \vec{DC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$  ;  $\vec{AD} = \vec{BC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$

Ansatz für Nachweis:

M = (2 | 2 | -2) ist Mittelpunkt des Quadrates und damit Lotfußpunkt jeder Pyramide  
 Nachweis der Eigenschaft „gerade Pyramide“:

1.  $M = S_0$

2. Jeder Punkt  $S_a$  liegt auf einer Gerade:  $s_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

3. Der Normalenvektor der Grundfläche  $E_{ABCD}$   $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 28 \\ -42 \\ 84 \end{pmatrix}$  kann mit GTR bestimmt werden, zum Beispiel mit [prgmGeometri](#) → Vektorprodukt.

4. Der Richtungsvektor von  $s_a$  ist parallel zum Normalenvektor. Deshalb liegt jede Spitze  $S_a$  senkrecht über M. Damit ist die Pyramide gerade.

Flächeninhalt der Grundfläche:  $A_G = (7 \cdot \sqrt{2})^2$

Gleichung der Ebene der Grundfläche

Höhe der Pyramide  $ABCDS_3$ :  $h = |\vec{S}_3 \vec{M}| = 21$

Volumen der Pyramide  $ABCDS_3$ :  $V = 686$

Ansatz für Höhe der Pyramide  $ABCDS_a$ :  $h(a) = |\vec{S}_a \vec{M}| = \left| \begin{pmatrix} 2a \\ -3a \\ 6a \end{pmatrix} \right| = 7a \ (a > 0)$

Umformungen

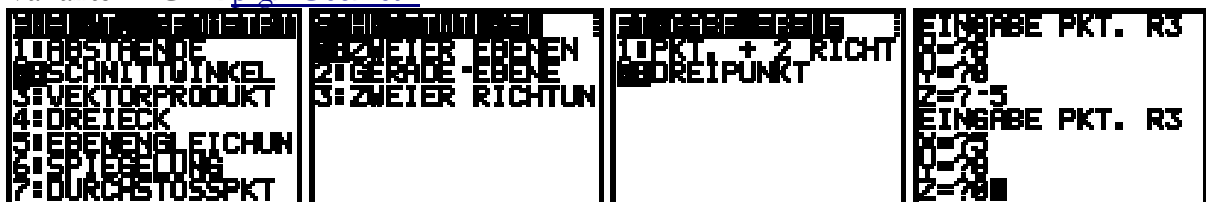
Ansatz für Koordinaten des Punktes  $S_a$ :  $V(a) = 98/3 \cdot 7a = 343/9$

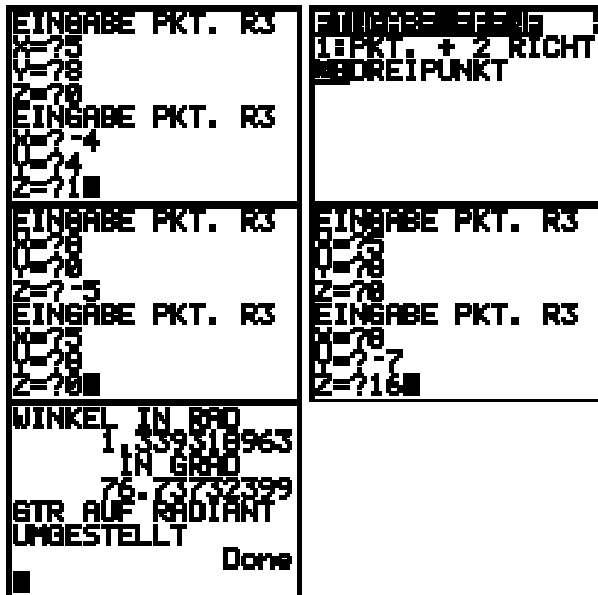
Koordinaten des Punktes  $S_a$ :  $S_{\frac{1}{6}} \left( \frac{7}{3} \mid \frac{3}{2} \mid -1 \right)$

- b) Variante I: elementargeometrisch (Abbildung 11 – gelbes Dreieck)

$$\alpha = \arctan\left(\frac{h}{|\vec{M} \vec{M}_{BC}|}\right) = \arctan\left(\frac{21}{\frac{7}{2}\sqrt{2}}\right)$$

Variante II: GTR [prgmGeometri](#)





Ansatz für Größe des Winkels  
 Normalenvektor der Ebene einer Seitenfläche  
 Größe des Winkels:  $\alpha \approx 76,7^\circ$

- c) Ansatz für Radius:  $r = |\vec{AM}| = 7$   
 Radius des Kreises  $k$   
 Volumen des Kreiskegels:  $V = 1078$
- d) Arten der Teilflächen: Dreieck und Trapez  
 Begründung: Punkt C ist oberhalb der Ebene mit  $z = 0$ , Punkt B liegt auf dieser Ebene und die Punkte B und D liegen unterhalb (Abbildung 12)  
 Ansatz für dritten Eckpunkt des Dreiecks:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{OC} + s \cdot \vec{CD} \Rightarrow s = 1/5$$

Koordinaten des dritten Eckpunktes des Dreiecks:  
 $P(-3,4 \mid 2,4 \mid 0)$

Ansatz für Flächeninhalt:  $A = \frac{1}{2} \overline{PC} \cdot \overline{BC}$

Flächeninhalt:  $A = 9,8$

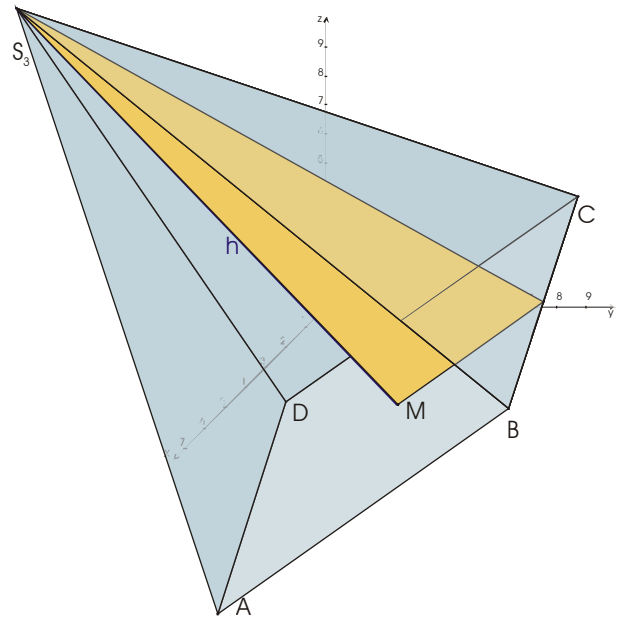


Abbildung 11

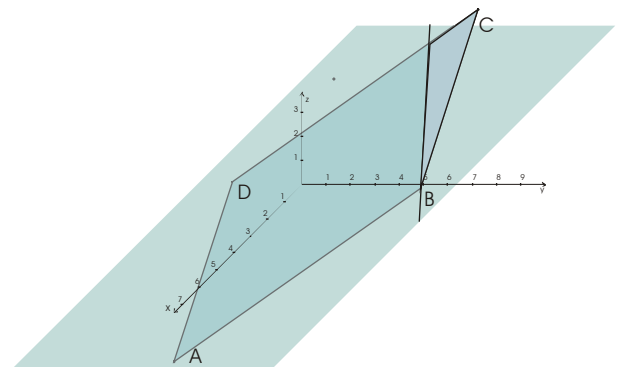


Abbildung 12

**Teil C**

- a) Ansatz für Wahrscheinlichkeit  
 Variante I: Baumdiagramm (Abbildung 13)  
 Variante II: Gegebenes und Gesuchtes notieren  
 Zufallsgröße M – Mangel entdeckt  
 Zufallsgröße  $K_i$  – Kontrolleur  $i$  hat geprüft mit  $i \in \{1, 2\}$   
 $P(K_1) = 0,65$ ;  $P(K_2) = 0,35$   
 $P_{K_1}(M) = 0,85$   
 $P_{K_2}(M) = 0,9$   
 ges.:  
 $P(M)$  und  $P_{\overline{M}}(K_1)$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:  $P(M) = P(K_1) \cdot P_{K_1}(M) + P(K_2) \cdot P_{K_2}(M)$

Wahrscheinlichkeit, dass ein mangelhaftes Heizelement erkannt wird:  $p = 0,8675$

bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$$P(K_1 \cap \bar{M}) \text{ und } P(\bar{M})$$

Anwenden des Satzes von Bayes:

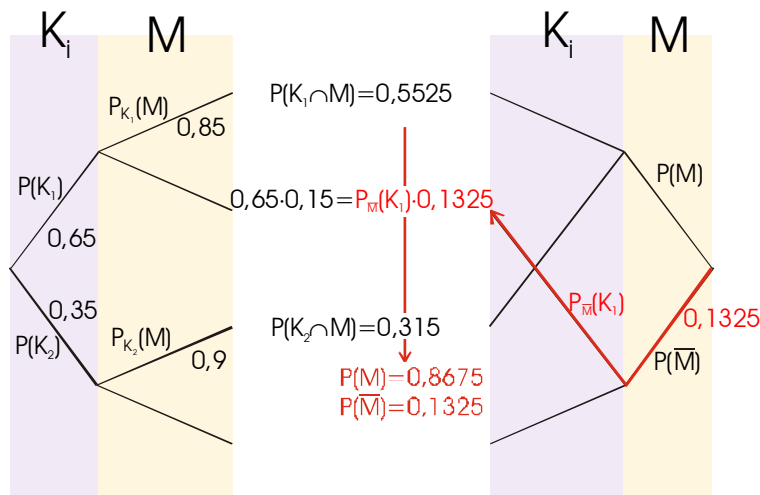


Abbildung 13

$$P_{\bar{M}}(K_1) = \frac{P(K_1 \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{0,65 \cdot 0,15}{1 - 0,8675}$$

Wahrscheinlichkeit, dass das Heizelement von Kontrolleur  $K_1$  geprüft wurde:  $p \approx 0,7358$

b) Werte der Zufallsgröße

$X$  – Zufallsgröße, die die anfallenden Reparaturkosten beschreibt

Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(X=25) = 0,1 \cdot 0,92; P(X=15) = 0,9 \cdot 0,08; P(X=40) = 0,1 \cdot 0,08; P(X=0) = 0,92 \cdot 0,9;$$

Erwartungswert:  $E(X) = 3,70 \text{ €}$

c) Ansatz für Anteil:  $\mu = 1000; \sigma = 100;$

$$P(950 \leq X \leq 1050) \approx \Phi(0,5) - \Phi(-0,5)$$

Umformungen

Anteil:  $\approx 38\%$

$$\text{oder GTR: } \text{fnInt}(e^{-\frac{(X-1000)^2}{20000}}, X, 950, 1050) / (100 \sqrt{2\pi}) \rightarrow 0,3829$$

$$\text{ergibt sich aus: } P(950 \leq X \leq 1050) = \int_{950}^{1050} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{X-\mu}{\sigma} \right)^2} dx$$

d) Ansatz für Wahrscheinlichkeit eines fehlerfreien Heizelementes von Maschine  $M_2$

Wahrscheinlichkeit eines fehlerfreien Heizelementes von Maschine  $M_2$

Ansatz für Anteil

Anteil:  $\approx 7\% = 1 - 0,931$

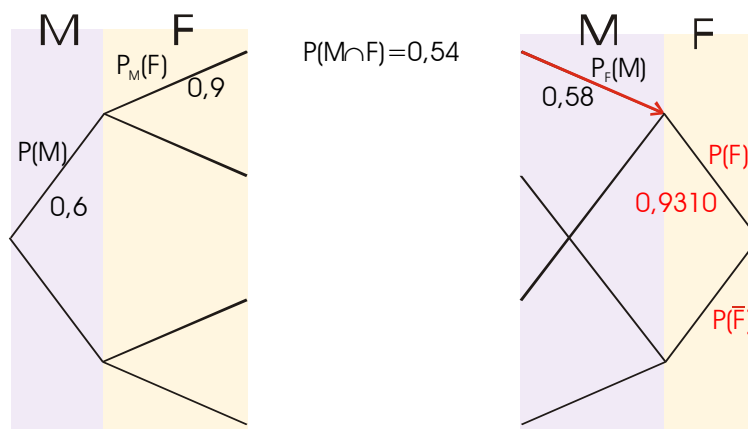


Abbildung 14

### Aufgabe D 1

a) Nullstellen:  $t_{N1} = 0; t_{N2} = 1; t_{N3} = 2$

Koordinaten der lokalen Extrempunkte:  $P_{\text{MAX}}(0,47; 4,43); P_{\text{MIN}}(1,47, -3,45)$

Die Ränder sollten auch genannt werden:  $P_{\text{MIN,R}}(0 | 0); P_{\text{MAX,R}}(2 | 0)$ . Sie bringen jedoch keine Bewertungseinheiten bzw. bei Nichtangabe werden keine BE abgezogen.

Art der Extrema

b) Nullstellen:  $x_{0n} = n$  mit  $n \in \mathbf{N}$

arithmetisches Mittel zweier benachbarter Nullstellen:  $x_{m\ n} = n + \frac{1}{2}$

1. Ableitung:  $f'(t) = 5 e^{\frac{1}{4}t} [-\frac{1}{4} \sin(\pi t) + \pi \cos(\pi t)]$

Ansatz für Nachweis:

Variante I:  $f'(n+\frac{1}{2}) \neq 0$

Variante II:  $f'(t_e) = 0$

Nachweis:

Variante I:

$$f'(n+\frac{1}{2}) = 5 \cdot e^{\frac{1}{4}(n+\frac{1}{2})} \cdot \left[ -\frac{1}{4} \sin\left(\pi \cdot \left(n+\frac{1}{2}\right)\right) + \pi \cdot \cos\left(\pi \cdot \left(n+\frac{1}{2}\right)\right) \right]$$

$$f'(n+\frac{1}{2}) = \underbrace{5 \cdot e^{\frac{1}{4}(n+\frac{1}{2})}}_{\neq 0} \cdot \left[ \underbrace{-\frac{1}{4} \cos(\pi \cdot n)}_{=\mp \frac{1}{4}} - \underbrace{\pi \cdot \sin(\pi \cdot n)}_{=0} \right]$$

$$f'(n+\frac{1}{2}) = \mp \frac{5}{4} \cdot e^{\frac{1}{4}(n+\frac{1}{2})} \neq 0$$

Da die Ableitung an den untersuchten Stellen nicht Null ist, findet sich dort kein Extrempunkt.

Variante II:

$$f'(t_e) = \underbrace{5 \cdot e^{\frac{1}{4}t_e}}_{\neq 0} \cdot \left[ -\frac{1}{4} \sin(\pi t_e) + \pi \cdot \cos(\pi t_e) \right] = 0 \Rightarrow \sin(\pi t_e) = 4 \pi \cos(\pi t_e)$$

$\Rightarrow \tan(\pi t_e) = 4 \pi \Rightarrow \pi t_e = \text{atan}(4\pi) + k\pi$  mit  $k \in \mathbf{Z}$  (Hier gilt die Einschränkung  $k \in \mathbf{N}$ )

$\Rightarrow t_e = \text{atan}(4\pi)/\pi + k \approx .47472 + k$

Die Extremstellen der Funktion befinden sich bei  $.47472 + k$  und nicht bei  $\frac{1}{2} + k$ , wie irrtümlich zu vermuten wäre.

c) Glied  $a_n$

Glied  $a_{n+1}$

Ansatz für Nachweis: zum Beispiel durch Umformung der Funktion  $f(n+\frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} f\left(n+\frac{1}{2}\right) &= 5 \cdot e^{\frac{1}{4}(n+\frac{1}{2})} \cdot \sin\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) & \sum_{n=0}^k |f\left(n+\frac{1}{2}\right)| \\ &= 5 \cdot e^{\frac{1}{4}(n+\frac{1}{2})} \cdot \left(\underbrace{-\cos(\pi n)}_{=\pm 1}\right) & = a_0 \cdot \frac{|q|^{k+1} - 1}{|q| - 1} \\ &= \mp 5 \cdot e^{\frac{1}{4}n} \cdot \frac{1}{8} = \underbrace{5 \cdot e^{\frac{1}{8}}}_{a_0} \cdot \underbrace{\left(\mp e^{\frac{1}{4}}\right)^n}_{=q} & = 5 \cdot e^{\frac{1}{8}} \cdot \left(\frac{e^{\frac{1}{4}(k+1)} - 1}{e^{\frac{1}{4}} - 1}\right) > 19 \end{aligned}$$

Nachweis

Glied  $a_0$

Ansatz für Anzahl

Variante I: allgemeine Lösung

$$\left(\frac{5 \cdot e^{\frac{1}{8}}}{1 - e^{\frac{1}{4}}}\right) \cdot \left(1 - e^{\frac{1}{4}(k+1)}\right) > 19$$

$$1 - e^{\frac{1}{4}(k+1)} > \frac{19 \cdot (1 - e^{\frac{1}{4}})}{5 \cdot e^{\frac{1}{8}}}$$

$$e^{\frac{1}{4}(k+1)} < 1 - \frac{19 \cdot (1 - e^{\frac{1}{4}})}{5 \cdot e^{\frac{1}{8}}}$$

$$-\frac{1}{4}(k+1) < \ln\left(1 - \frac{19 \cdot (1 - e^{\frac{1}{4}})}{5 \cdot e^{\frac{1}{8}}}\right)$$

$$k > -4 \cdot \ln\left(1 - \frac{19 \cdot (1 - e^{\frac{1}{4}})}{5 \cdot e^{\frac{1}{8}}}\right) - 1$$

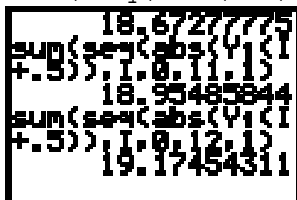
Variante II: GTR

$$Y1 = 5e^{(-.25X)} \cdot \sin(\pi X)$$

zum Beispiel

1. Berechnung der Summe einer Liste von Funktionswerten z. B. von 0 bis 10:

```
sum(seq(abs(Y1(I+.5)), I, 0, 10, 1))
```

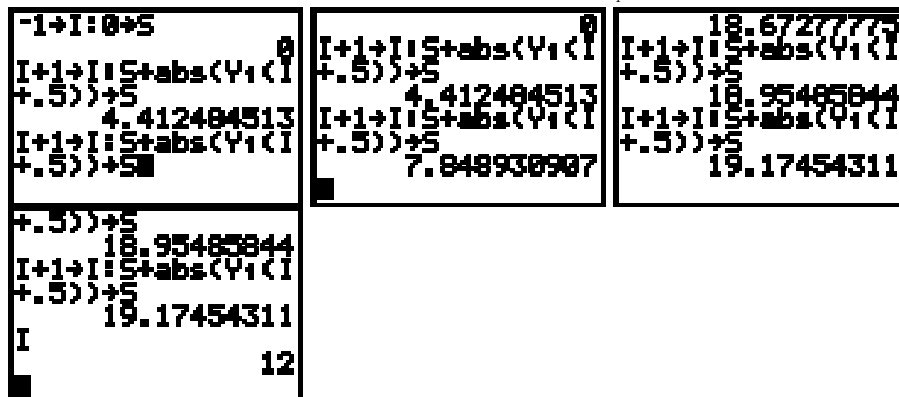


2. iterativ:

1. -1 → I: 0 → S

2. I+1 → I: S+abs(Y1(I+.5)) → S

Dieser Befehl muss mittels „Entry“ wiederholt ausgeführt werden. S gibt dann die jeweils um den i-ten Funktionswert vermehrte Teilsumme S<sub>i</sub> an



3. Summieren von Hand:

Eine erste Abschätzung der Anzahl sollte dieser Variante vorangehen, denn zur Addition sehr vieler Werte reicht die Zeit nicht.



$$\begin{matrix} 1(2.5) - \sqrt{1(3.5) + y} \\ 1(4.5) - \sqrt{1(5.5) + y} \\ 1(6.5) - \sqrt{1(7.5) + y} \\ 1(8.5) - \sqrt{1(9.5) + y} \\ 1(10.5) - \sqrt{1(11.5)} \end{matrix}$$

10.95405844

Anzahl der Glieder: 13

### Aufgabe D 2

a) Ansatz für Höhe:  $G_h \in \mathcal{E}: y + z = 12$

Höhe  $h: h = 4$

Ansatz für Neigungswinkel:  $E_{4\alpha} \in \mathcal{E}$  mit

$E_{h\alpha} (8 \mid 8 - 4 \cos \alpha \mid h + 4 \sin \alpha)$  und  $h = 4 \Rightarrow$

$$8 - 4 \cos \alpha + 4 + 4 \sin \alpha = 12$$

Neigungswinkel  $\alpha: \alpha = 45^\circ$

und  $E_{h45^\circ} (8 \mid 8 - 2\sqrt{2} \mid h + 2\sqrt{2})$

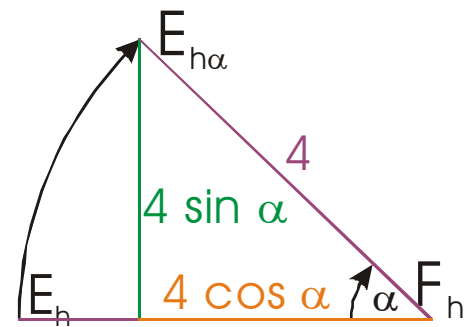


Abbildung 15

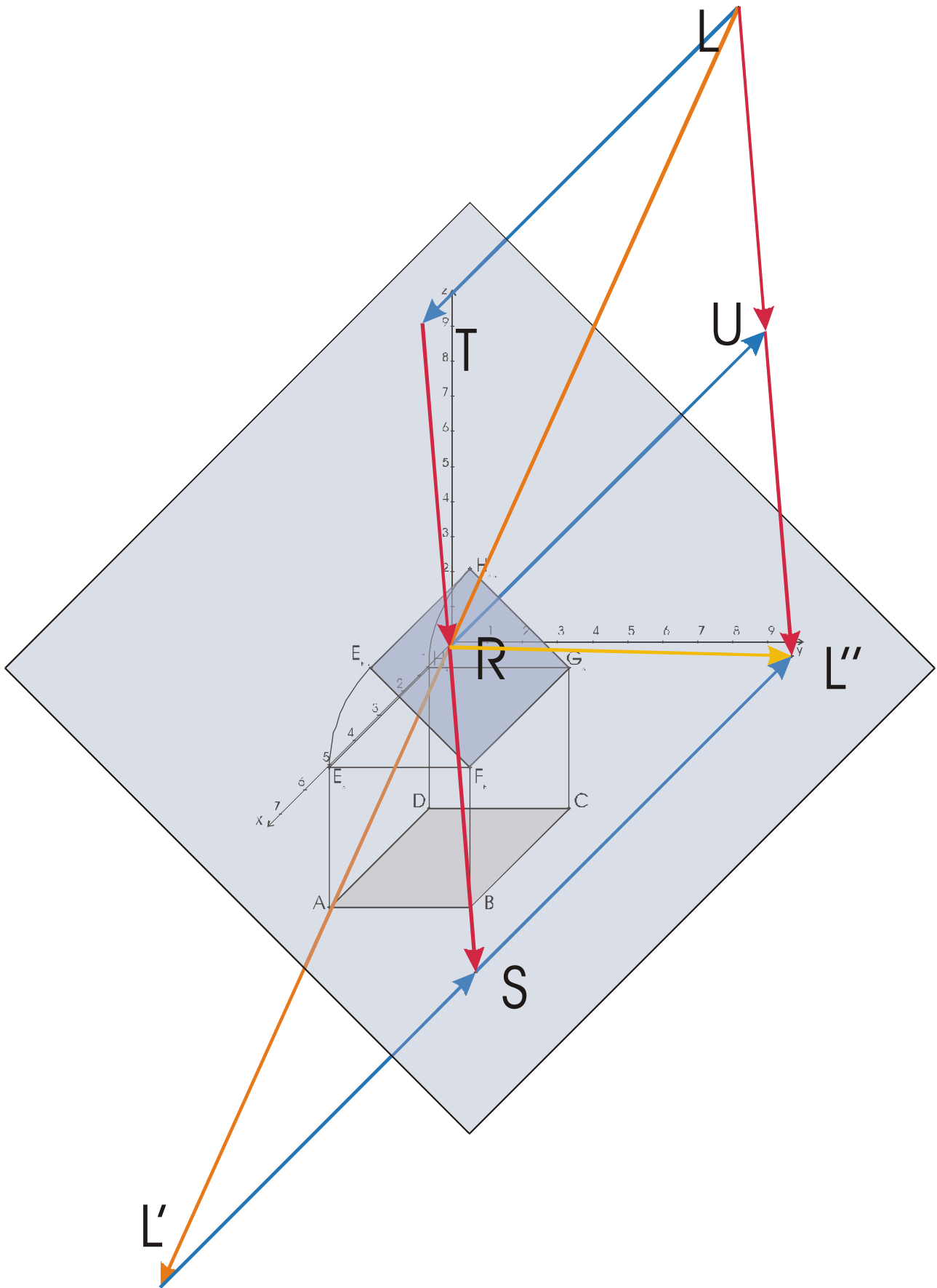


Abbildung 16: Teil D2 b)

b) Wahl eines zu spiegelnden Punktes<sup>3</sup>: siehe Abbildung 16

Der Normalenvektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  kann aus der Koordinatenform der Ebene  $y + z = 12$  herausge-

lesen werden.

Variante I:

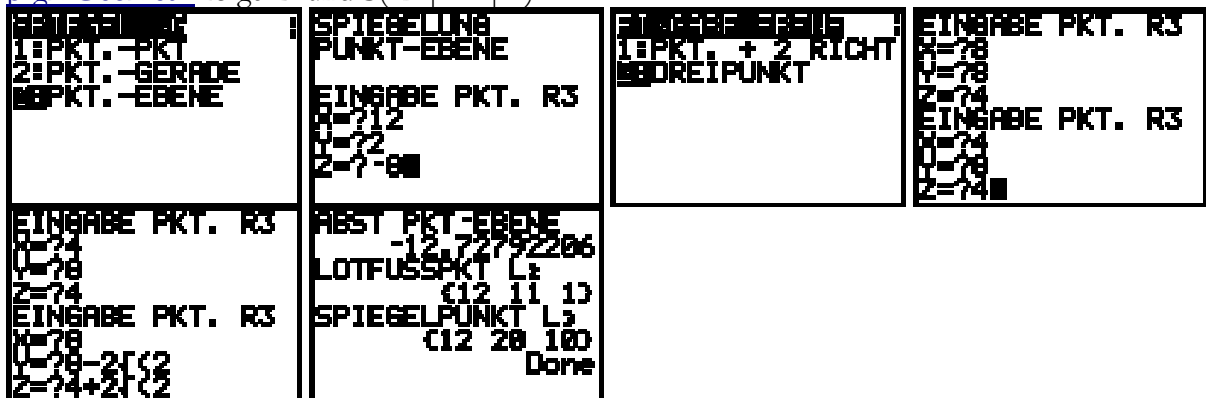
Geradenspiegelung von L an der Ebenennormalen  $g_{normal}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  durch R führt

über U direkt zu L". GTR [prgmGeometri](#) ergibt U(6 | 15 | 15) und L"(12 | 20 | 10).



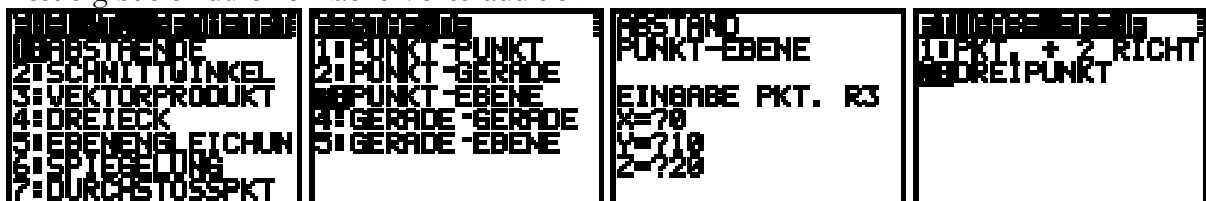
Variante II:

ähnlich wie beim Billardspielen wird in der Verlängerung von  $\vec{LR}$  der Punkt L' ermittelt und dieser an der Ebene  $\mathcal{E}$  mit dem Lotfußpunkt S zu L" gespiegelt. Mit L'(12 | 2 | -8) und GTR [prgmGeometri](#) folgt L" und S(12 | 11 | 1)



Variante III:

Aufsuchen des Lotfußpunktes T von L auf  $\mathcal{E}$ . Anschließend wird S als Lotfußpunkt von L" auf  $\mathcal{E}$  ermittelt und anschließend L" selbst bestimmt. Mit GTR [prgmGeometri](#) folgt T(0 | 1 | 11) und der Rest ergibt sich durch einfache Vektoraddition.



3 Dieser Ausdruck ist nicht ganz zutreffend. Der zu spiegelnde Punkte ist immer L, besser sollte es heißen: „Wahl einer Variante“.



Ansatz für Koordinaten des Spiegelpunktes: S

Koordinaten des Spiegelpunktes: L"(12 | 20 | 10)

Gleichung einer Geraden des reflektierten Strahles:  $g_{RL^n}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ansatz für Koordinaten des Punktes des Kontrollensors:

$$g_{RL^n}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 13 \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow t = 1/2 \text{ und}$$

Koordinaten des Punktes des Kontrollensors: K (9 | 13 | 8)

c) ein Richtungsvektor

Ansatz für zweiten Richtungsvektor

Koordinaten des zweiten Richtungsvektors

Ansatz für Gleichung der Ebene

Gleichung der Ebene und Nachweis

mit dem bereits ermittelte Wert von  $E_{h\alpha}$  ( $\uparrow$  Abbildung 15) ist der Nachweis leicht:

Es ist zu zeigen, dass  $F_h, G_h, E_{h\alpha} \in \mathcal{E}$  gilt.

Zum Beispiel gilt  $E_{h\alpha} \in \mathcal{E}$  weil  $(8 - 4 \cos \alpha) \cdot \sin \alpha + (h + 4 \sin \alpha) \cdot \cos \alpha = 8 \sin \alpha + h \cos \alpha$  zu einer wahren Aussage führt.