

2000/01

schriftliche Abiturprüfung
Grund- und Leistungskurs Mathematik
– Nachtermin –

Vorwort.....	2
Grundkurs.....	2
Prüfungsinhalt.....	2
Pflichtaufgaben.....	2
Teil A: Analysis.....	2
Teil B: Geometrie / Algebra.....	3
Teil C: Stochastik.....	3
Teil D: Wahlaufgaben.....	4
Aufgabe D 1: Analysis.....	4
Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra.....	4
Zusatzaufgaben.....	5
Teil A: Analysis.....	5
Erwartungsbild und Bewertungsmaßstab.....	5
Pflichtaufgaben.....	6
Teil A.....	6
Zusatzaufgabe.....	7
Teil A.....	7
Teil B.....	9
Teil C.....	10
Teil D: Wahlaufgaben.....	11
Aufgabe D 1.....	11
Aufgabe D 2.....	12
Leistungskurs.....	14
Prüfungsinhalt.....	14
Pflichtaufgaben.....	14
Teil A: Analysis.....	14
Teil B: Geometrie / Algebra.....	15
Teil C: Stochastik.....	15
Teil D: Wahlaufgaben.....	16
Aufgabe D 1: Analysis.....	16
Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra.....	17
Zusatzaufgabe.....	17
Teil A: Analysis.....	17
Erwartungsbild und Bewertungsmaßstab.....	18
Pflichtaufgaben.....	19
Teil A.....	19
Zusatzaufgabe - Teil A.....	21
Teil B.....	23
Teil C.....	26
Teil D: Wahlaufgaben.....	28
Aufgabe D 1.....	28
Aufgabe D 2.....	29

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer privaten Homepage befinden, die sich auf dem [Sächsischen Schulserver](#) befindet und dem dortigen Layout unterordnet. Insbesondere ist dies *keine Seite* des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2001.
- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich. Ich habe versucht, den grafikfähigen Taschenrechner (GTR) besonders häufig einzusetzen. Eingesetzte Programme finden Sie auf diesen Seiten dokumentiert und anhand von Beispielen erklärt.
- Die offiziellen Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Das Nachabitur wird in der Regel erst nach dem Ablauf der Klausuren unter abiturähnlichen Bedingungen (Vorabitur) des Folgejahres veröffentlicht.
- Die angegebenen Zusatzaufgaben in diesem Text wurden vor dem Nachabiturtermin durch das Kultusministerium gestrichen und durch die angegebenen Originalaufgaben ersetzt. Sie lagen also *nicht* im Abitur des Nachtermins vor. Trotzdem sollten sie die Anforderungen an Abituraufgaben erfüllen und zur Übung geeignet sein.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: [F. Müller](#) (Mathe-Lehrer).
- Wenn Sie Fehler finden, teilen Sie sie mir bitte mit.

Grundkurs

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben ist eine Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{3}{8}x$ ($x \in \mathbf{R}$).

- a) Geben Sie für die Funktion f die Nullstellen, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und die Art der Extrema an.
Begründen Sie, dass der Graph der Funktion f genau einen Wendepunkt hat, und geben Sie die Koordinaten dieses Wendepunktes an.

Erreichbare BE-Anzahl: 9

- b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $P\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{48}\right)$.

Die Tangente t und die Koordinatenachsen begrenzen ein Dreieck vollständig.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

- c) Geben Sie den Inhalt der Fläche an, die vom Graphen der Funktion f und der x -Achse vollständig begrenzt wird.
Bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion von f , deren Graph durch den Punkt

A (0; 1) verläuft. Es existiert eine Zahl a ($a \in \mathbf{R}, a > 0$) so, dass das bestimmte Integral

$$\int_0^a f(x) dx = 1 \text{ ist.}^1$$

Erreichbare BE-Anzahl: 6

- d) Eine Gerade g ist durch die Punkte A(0; 1) und B(4; 2,5) bestimmt. Es existieren Tangenten an den Graphen der Funktion f, die parallel zur Geraden g verlaufen.

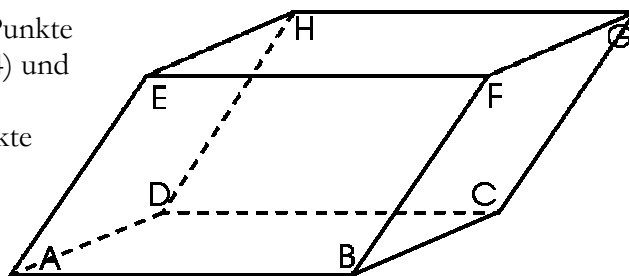
Ermitteln Sie die Abszissen der Berührungspunkte dieser Tangenten mit dem Graphen der Funktion f.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(2; 1; -1), B(6; 4; -2), C(5; 6; 0), D(1; 3; 1), F(4; 6; 4) und H(-1; 5; 7) gegeben.

Die Punkte A, B, C, D, E, F, G und H sind Eckpunkte eines schiefen Prismas mit der Grundfläche ABCD (vergl. Abbildung).



- a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte G und E an.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Abbildung 0 (nicht maßstäblich)

- b) Weisen Sie nach, dass die Grundfläche des Prismas ein Rechteck ist.

Untersuchen Sie, welche beiden Seitenflächen des Prismas den größten Flächeninhalt haben.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

- c) Untersuchen Sie, ob sich alle Raumdiagonalen des Prismas in genau einem Punkt schneiden. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes dieser Diagonalen.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- d) Eine zur Grundfläche parallele Ebene zerlegt das Prisma in zwei Teilkörper mit gleichen Volumina. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene in parameterfreier Form.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- e) Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Punkt P(3; 4; 1) im Inneren des Prismas liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil C: Stochastik

In einer Urne befinden sich 25 gleich große Kugeln, die mit den Zahlen 1 bis 25 gekennzeichnet sind.

- a) Für das einmalige Ziehen einer Kugel interessieren folgende Ereignisse:

Ereignis A: Die Quersumme der Zahl auf der gezogenen Kugel ist 4.

Ereignis B: Die Zahl auf der gezogenen Kugel ist durch 2 oder durch 3 teilbar.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse an.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

- b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim zweimaligen Ziehen mit Zurücklegen mindestens eine der gezogenen Zahlen größer als 18 ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

- c) Es werden sieben Ziehungen mit Zurücklegen durchgeführt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den sieben gezogenen Kugeln höchstens 5 mit einer geraden Zahl befinden.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

- d) Bei einem Gewinnspiel wählt der Spieler eine natürliche Zahl von 1 bis 25. Danach wird aus der beschriebenen Urne 2 mal mit Zurücklegen gezogen. Wird die gewählte Zahl gezogen, erhält er

¹ Hier fehlt noch die Aufforderung zur Berechnung oder Bestimmung von a. Fragen Sie in solchem Fall ihrer „Bewacher“. Sie werden sich um die Ergänzung des Textes bemühen. (Anm. d. Autor)

jeweils 100 €, bei jeder anderen Zahl hat er jeweils 4 € zu zahlen.

Würden Sie ein derartiges Spiel spielen? Begründen Sie Ihre Entscheidung rechnerisch.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- e) Wir betrachten folgenden Zufallsversuch: Aus der beschriebenen Urne werden nacheinander Kugeln gezogen. Nach jeder Ziehung wird die Zahl festgestellt, mit der die Kugel gekennzeichnet ist. Ist diese Zahl gerade, ist der Versuch beendet. Ist sie ungerade, wird diese Kugel beiseite gelegt und dafür in die Urne eine weitere Kugel mit einer geraden Zahl gegeben. Nach maximal vier Ziehungen ist der Versuch unabhängig vom Ergebnis der 4. Ziehung beendet.

Berechnen Sie, mit wie vielen Ziehungen man durchschnittlich pro Versuch rechnen muss.

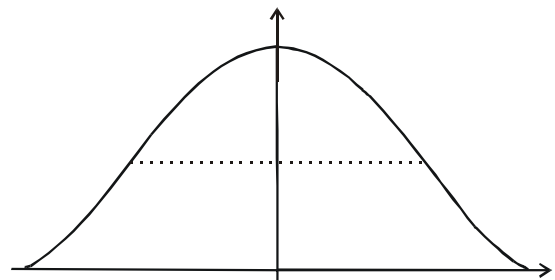
Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Der symmetrische Giebel eines Barockhauses soll rekonstruiert werden. Der Giebel ist in der Abbildung in einem Koordinatensystem dargestellt. Eine für alle x ($x \in \mathbf{R}$) definierte, gerade, ganzrationale Funktion f beschreibt im entsprechenden Intervall den oberen Giebelrand. Die x -Achse ist Tangente an den Graphen der Funktion f in den Punkten $P_1(-4; 0)$ und $P_2(4; 0)$ (1 Einheit = 1 m).



Die maximale Höhe des Giebels über der Dachkante (x -Achse) beträgt 4,0 m. (siehe Abbildung - nicht maßstäblich).

- a) Begründen Sie, dass die Funktion f eine Funktion mindestens 4. Grades sein muss.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

- b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion f .

Erreichbare BE-Anzahl: 4

- c) Ein Architekt beschreibt einen solchen Giebelrand durch den Graphen der Funktion g mit $y =$

$$g(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 - 2 \right)^2 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Dieser Giebel soll durch eine waagerechte Linie in zwei flächengleiche Teile zerlegt werden.

Während der untere Teil des Giebels mit Ornamenten verziert wird, ist beabsichtigt, im oberen Teil des Giebels Fenster anzubringen.

Ermitteln Sie auf Dezimeter genau, bis zu welcher Höhe der Giebel mit Ornamenten versehen werden soll.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1; 5; -3)$, $C(-3; -9; -3)$ sowie für jedes t ($t \in \mathbf{R}$) eine Gerade g_t durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} -t+1 \\ 2t-3 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($r, s \in \mathbf{R}$) gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass der Punkt A auf der Geraden g_8 liegt.

Ermitteln Sie den Wert t , für den der Punkt C auf der zugehörigen Gerade g_t liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

- b) Alle Geraden g_t liegen in einer Ebene E .

Geben Sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene E an.

Beschreiben Sie die Lage der Ebene E im kartesischen Koordinatensystem.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

- c) Begründen Sie, dass keine der Geraden g_t durch den Koordinatenursprung verläuft.
Es gibt genau eine Gerade g_v , die vom Koordinatenursprung einen minimalen Abstand besitzt.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- d) Es existieren ein Punkt B auf der Geraden g_{17} und ein Punkt D auf der Geraden g_8 , so dass das Viereck ABCD ein Quadrat mit der Diagonale \overline{AC} ist.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B und D.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Zusatzaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f durch $y = f(x) = x^2/9 + 9/x^2$ ($x \in \mathbf{D}_f$) und g durch $y = g(x) = x^2/9$ ($x \in \mathbf{R}$).

- a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f an.
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Symmetrie.
Geben Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f sowie deren Art an.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph der Funktion f keine Wendepunkte besitzt.
- Erreichbare BE-Anzahl: 6
- b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t, die den Graphen der Funktion f im Punkt $P(6; f(6))$ berührt.
- Erreichbare BE-Anzahl: 3
- c) Die Parallele zur x-Achse durch den Punkt $P(6; f(6))$ und der Graph der Funktion f begrenzen im 1. Quadranten eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.
- Erreichbare BE-Anzahl: 2
- d) Bestimmen Sie alle Werte x, für die sich die Funktionswerte $f(x)$ und $g(x)$ um weniger als 0,001 unterscheiden.
- Erreichbare BE-Anzahl: 2
- e) Die Graphen der Funktionen f und g sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = 3$ und $x = k$ ($k \in \mathbf{R}$, $k > 3$) begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von k.
Ermitteln Sie den Grenzwert dieses Flächeninhaltes für $k \rightarrow \infty$
- Erreichbare BE-Anzahl: 3
- f) Für jedes u ($u \in \mathbf{R}$, $u > 0$) sind die Punkte $A_u(u; f(u))$, $B_u(-u; f(-u))$ und der Koordinatenursprung $O(0;0)$ die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks.
Zeigen Sie rechnerisch, dass es genau einen Wert u gibt, für den der Flächeninhalt dieses Dreiecks minimal wird.
Geben Sie für diesen Fall die Koordinaten der Punkte A_u und B_u sowie den Flächeninhalt an.
- Erreichbare BE-Anzahl: 6
- g) Gegeben ist die Funktion h mit $y = h(x) = -x^3/27 + x$ ($x \in \mathbf{R}$). Die Graphen der Funktionen f und h besitzen genau zwei gemeinsame Punkte.
Ermitteln die Koordinaten dieser gemeinsamen Punkte.
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Graphen der Funktionen f und h in genau einem dieser gemeinsamen Punkte den gleichen Anstieg haben.
- Erreichbare BE-Anzahl: 3

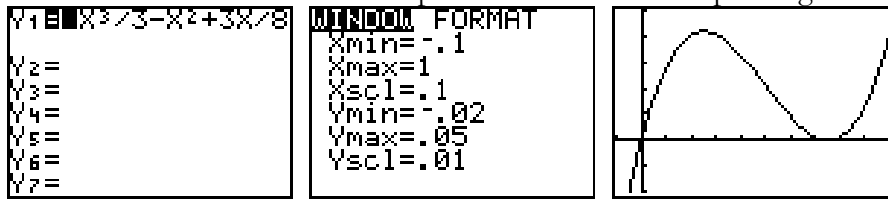
Erwartungsbild und Bewertungsmaßstab

Das Erwartungsbild beinhaltet nur ausgewählte Ergebnisse. Auf die Angabe von Zwischenergebnissen, Graphen von Funktionen und Zeichnungen wurde verzichtet, auch wenn diese bewertet werden sollen.

Pflichtaufgaben

Teil A

- a) Variante I: Ablesen im GTR-Graphen – erfordert die Anpassung der Window-Einstellungen.



Variante II: Verwendung von GTR-Funktionen oder Calc-Menü

NST: solve(Y1,X,0.75) \rightarrow 0,75 (andere Startwerte führen zu anderen Nullstelle)

Extrema: solve(nDeriv(Y1,X,X),X,.5) \rightarrow 0,7500 und solve(nDeriv(Y1,X,X),X,.2) \rightarrow 0,2500 außerdem Y1(.75 \rightarrow 0 und Y1(.25 \rightarrow 0,0417

Wendepunkt: solve(nDeriv(nDeriv(Y1,X,X),X,X),X,.5) \rightarrow 0,5000 und Y1(.5 \rightarrow 0,0208

Variante III: rechnerisch – ist hier wohl genau so schnell ausführbar, wie das Verwenden des Taschenrechners.

Faktorisieren: $f(x) = x \cdot (2/3 x^2 - x + 3/8)$ und Nullstellenberechnung für $2/3 x^2 - x + 3/8 = 0$ z. B. mit GTR [PrgmQuadAllg](#).

erste Nullstelle: $x_{01} = 0$

zweite Nullstelle: $x_{02} = 0,75$

$f'(x) = 2x^2 - 2x + 3/8$; $f'(x_E) = 0 \Rightarrow x_{E1} = 0,25$ und $x_{E2} = 0,75$

Koordinaten des lokalen Minimumpunktes: $P_{\text{MIN}}(0,75; 0)$

Koordinaten des lokalen Maximumpunktes: $P_{\text{MAX}}(0,25; 0,04)$

$f''(x) = 4x - 2$; $f''(0,25) = -1$ und $f''(0,75) = 1$

Art der Extrema

Ansatz für Begründung: $f''(x_W) = 0 \Rightarrow x_W = 0,5$ oder

mit Kurvenverhalten begründen oder

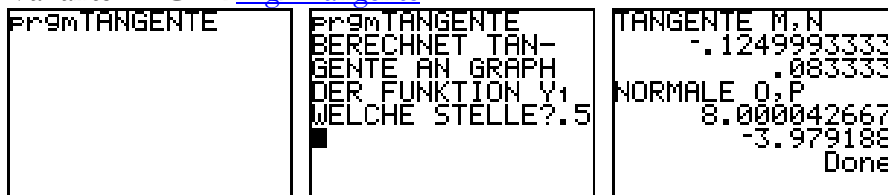
mit Grad des Polynoms in der 2. Ableitung: In $f(x)$ finden wir ein Polynom 3. Grades. Durch Ableitung verringert sich der Grad. Die 2. Ableitung hat Grad 1 und auch damit genau eine Nullstelle

Begründung

1. Ableitung

Koordinaten des Wendepunktes: $P_W(0,5; 0,02)$

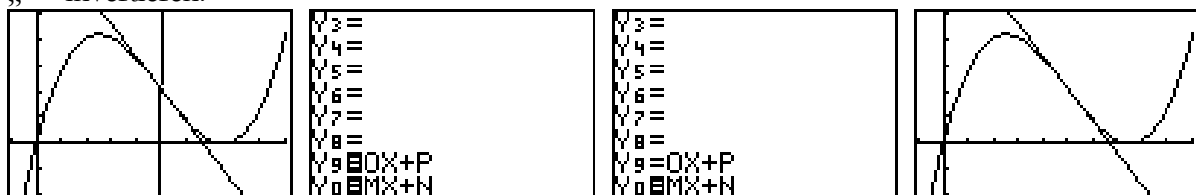
- b) Variante I – GTR [PrgmTangente](#):



Nach der Ausführung des Programms werden Tangente und Normale im Graphen angezeigt.

Wenn Sie einen oder beide Graphen nicht mehr sehen möchten, gehen Sie zum $\boxed{\text{Y=}}$ -Menü und

löschen dort Funktion 9 bzw. 0 oder Sie schalten die Darstellung aus, indem Sie die Markierung des „=“ invertieren.




Anstieg der Tangente: m

Ansatz

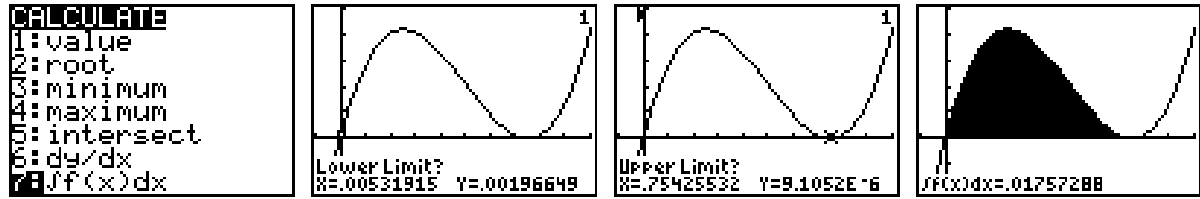
Gleichung der Tangente: $y = -1/8 x + 1/12$

Nullstelle der Tangente: $x_0 = 2/3$

Ansatz für Flächeninhalt: rechtwinkliges Dreieck $A = \frac{1}{2} n \cdot x_0$

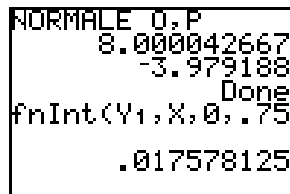
Flächeninhalt: $A = 1/24$ 

c) GTR Calc-Menü:



GTR Math-Menü: $\text{fnInt}(Y1, X, 0, .75) \rightarrow 0,0176$

Geht schneller und ist genauer als Lösung im Graphen, da die Intervallgrenzen genauer angegeben werden können.



Flächeninhalt: $A = 0,018$

Stammfunktion $F_c(x) = \frac{x^4}{6} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{16} + C$

Ansatz: $F_c(0)=1 \Rightarrow C = 1$

spezielle Stammfunktion: $F(x) = \frac{x^4}{6} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{16} + 1$

Ansatz für Wert: ist schon in Aufgabenstellung enthalten $\int_0^a f(x) dx = 1$

weiter mit GTR: $\text{solve}(\text{fnInt}(Y1, X, 0, A) - 1, A, 2) \rightarrow 2,1073$

Zur Berechnung benötigt der GTR etwas Zeit. Machen Sie solange etwas anderes.

Wert a: $a = 2,1$

Ausschluss der zweiten Lösung

d) Ansatz für Gleichung der Geraden g

Es reicht der Anstieg m von g: $m = \frac{3}{8}$

Anstieg der Geraden g

Ansatz für Abszissen der Punkte: $f(x_g) = \frac{3}{8}$

Lösung der Gleichung: $2x^2 - 2x + \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$

Abszissen der Punkte: $x_1 = 0, x_2 = 1$

Zusatzaufgabe

Teil A

a) Definitionsbereich: $D_f = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$

Untersuchung auf Symmetrie: Achsensymmetrie zur y-Achse – es gilt $f(x) = f(-x)$

GTR z. B.: $\text{solve}(nDeriv(Y1, X, X), X, 3) \rightarrow 3$; $Y1(3) \rightarrow 2$ und $nDeriv(nDeriv(Y1, X, X), X, 3) \rightarrow 0,8888$ oder Ablesen im Graphen

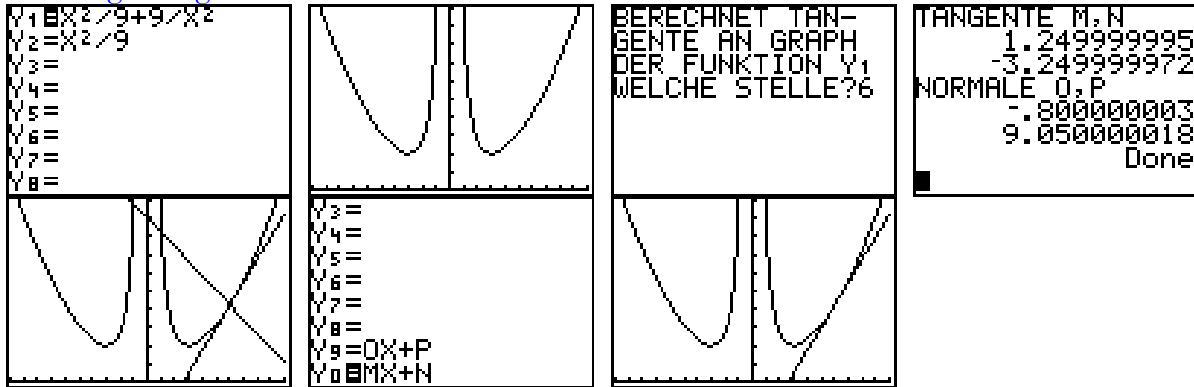
Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte: $P_{\text{MIN}1}(-3; 2), P_{\text{MIN}2}(3; 2)$

1. Ableitung: $f'(x) = \frac{2}{9}x - \frac{18}{x^3}$

2. Ableitung: $f''(x) = \frac{2}{9} + \frac{54}{x^4}$

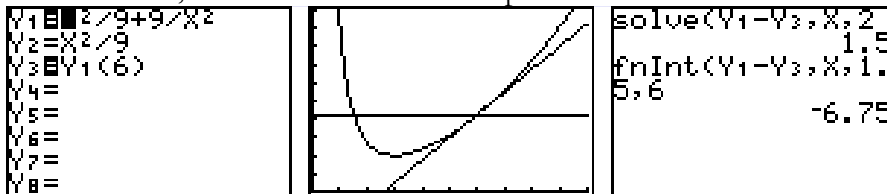
Nachweis: $f''(x_w) = 0 \Rightarrow x^4 = -243$ hat keine Lösung

b) GTR **PrgmTangente:**



y-Koordinate des Punktes P
 Ansatz für Gleichung der Tangente
 Gleichung der Tangente: $y = 1,25x - 3,25$

c) GTR: Bestimmung der linken Intervallgrenze durch $f(x)=f(6) - \text{solve}(Y1-Y3, X, 2) \rightarrow 1,5$
 Bestimmung des Flächeninhaltes zwischen zwei Funktionen – $\text{fnInt}(Y1-Y3, X, 1.5, 5) \rightarrow -6,75$
 und Beachten, dass Flächeninhalte stets positiv sind



Ansatz für Flächeninhalt
 Flächeninhalt A: $A = 6,75$

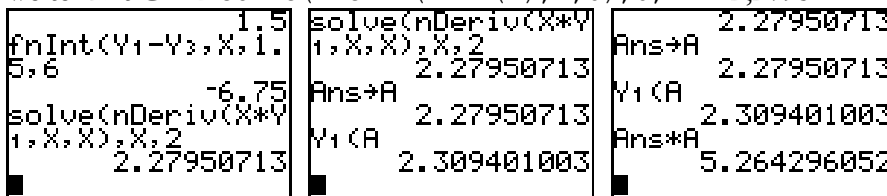
d) Ansatz für Werte x: $d(x) = |f(x)-g(x)| < 0.001 \Rightarrow 9000 < x^2$
 Werte x: $|x| > \sqrt{9000}$

e) Ansatz für Flächeninhalt $A(k) = \left| \int_3^k f(x) - g(x) dx \right|$

Flächeninhalt A(k): $A(k) = 3 - 9/k$
 Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow \infty} A(k) = 3$

f) Aufgrund des Symmetrieverhaltens, lässt sich schlussfolgern, dass es ausreichen würde das Dreieck im 1. Quadranten zu minimieren (A^*).

Zielfunktion: $A^*(u) = 1/2 u \cdot f(u)$; $A(u) = 2 A^*(u) = u \cdot f(u)$ ist einfacher
 weiter mit GTR: $\text{solve}(nDeriv(X*Y1(X), X, U), U, 2) \rightarrow 2,2795$



oder rechnerisch

1. Ableitung: $A'(u) = u^2/3 - 9/u^2$

Extremstelle

Nachweis des Minimums – mit GTR: $nDeriv(nDeriv(X*Y1, X, X), X, 2.2795) \rightarrow 2,2222$

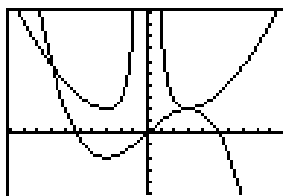
Koordinaten der Punkte A_u und B_u : $A_u = \left(\sqrt[4]{27}; \frac{4}{\sqrt{3}} \right)$, $B_u = \left(-\sqrt[4]{27}; \frac{4}{\sqrt{3}} \right)$

minimaler Flächeninhalt A: 5,26

g) Mit GTR
 · Ablesen im Graphen

```
Y1=2/9+9/X^2
Y2=-X^3/27+X
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
Y8=
```

```
WINDOW FORMAT
Xmin=-10
Xmax=10
Xscl=1
Ymin=-5
Ymax=10
Yscl=1
```



· Math-Menü: solve(Y1-Y2,X,-7) → -6,9742 und Y1(Ans) → 5,5894

Koordinaten der gemeinsamen Punkte: P₁(-6,9742 | 5,5894) und P₂(3 | 2) = P_{MIN2}

Aussage zum Anstieg im ersten gemeinsamen Punkt: P₁ ist echter Schnittpunkt (siehe Graph)

Aussage zum Anstieg im zweiten gemeinsamen Punkt und Schlussfolgerung: P₂ ist Hochpunkt von h(x) und Tiefpunkt von f(x). Damit ist dort der Anstieg 0.

Teil B

- a) Koordinaten des Punktes E: E(0; 3; 5) $\vec{AE} = \vec{OA} + \vec{BF}$ mit $\vec{BF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Koordinaten des Punktes G: G(3; 8; 6)

- b) Nachzuweisen ist z. B. I: $\vec{AB} = \vec{DC}$ II: $\vec{AD} = \vec{BC}$ und ein rechter Winkel III: $\vec{AB} \perp \vec{AD}$

Nachweis für gegenüberliegende Seiten

Nachweis der Orthogonalität und Schlussfolgerung

Inhalt einer Seitenfläche oder Vergleich der Seitenlängen

mit GTR **PrgmGeometri**: Berechnung der Dreiecksfläche (ist gerade Hälfte der Parallelogrammfläche)

```
ANALYT. GEOMETRIE
1: ABSTAEHNDE
2: SCHNITTWINKEL
3: VEKTORPRODUKT
4: DREIECK
5: EBENENGLEICHUNG
6: SPIEGELUNG
7: DURCHSTOSSPKT
Z=?-2
EINGABE PKT. R3
X=?4
Y=?6
Z=?4
FLAECHEN
16.43167673
EINGABE PKT. R3
X=?2
Y=?1
Z=?-1
EINGABE PKT. R3
X=?1
Y=?3
Z=?1
```

```
EINGABE PKT. R3
X=?2
Y=?1
Z=?-1
EINGABE PKT. R3
X=?6
Y=?4
Z=?-2
ANDERE ANGABEN
1: JA
2: NEIN
EINGABE PKT. R3
X=?1
Y=?3
Z=?1
EINGABE PKT. R3
X=?-1
Y=?5
Z=?1
```

```
EINGABE PKT. R3
X=?6
Y=?4
Z=?-2
EINGABE PKT. R3
X=?4
Y=?6
Z=?4
EINGABE PKT. R3
X=?1
Y=?-1
Z=?-1
EINGABE PKT. R3
X=?5
Y=?7
Z=?7
FLAECHEN
4.242640687
```

```
DREIECK
1: SEITENLAENGE
2: WINKEL
3: FLAECHEN
4: NORMALE
5: UMKREIS
6: WEITERE
7: ENDE
```

$F(\Delta_{ABF}) = 16,43 > F(\Delta_{ADH}) = 4,24$

Inhalt der zweiten Seitenfläche oder Vergleich der Winkel

Schlussfolgerung: Die Flächen ABFE und DCGH haben den größten Flächeninhalt.

- c) Aufgrund von Symmetrieeigenschaften eines Prismas müssen sich die Diagonalen halbieren². Es reicht also nachzuweisen, dass die Mittelpunkte der Diagonalen identisch sind.

$M_{AG} = (5/2 | 9/2 | 5/2); M_{BH} = (5/2 | 9/2 | 5/2); M_{DF} = (5/2 | 9/2 | 5/2) = M$

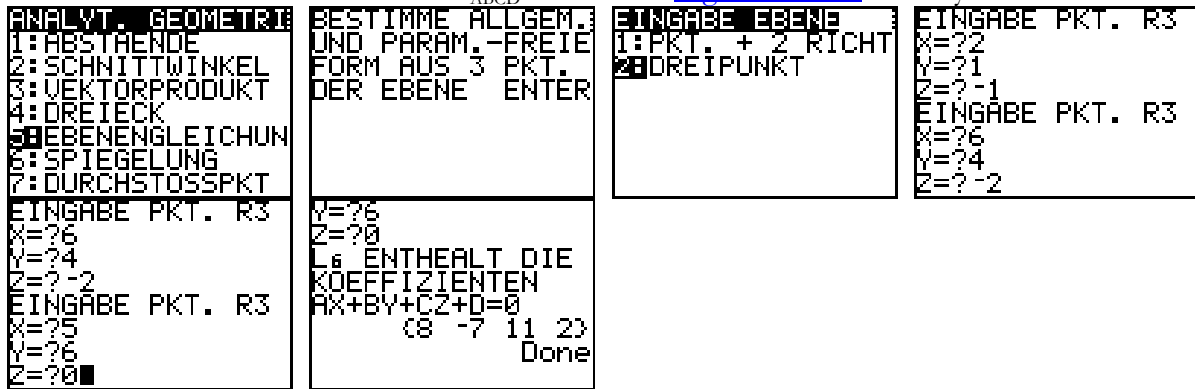
Aussage zur Existenz des Schnittpunktes

Ansatz für Koordinaten des Schnittpunktes

Koordinaten des Schnittpunktes S: S(2,5; 4,5; 2,5)

² Denken Sie an die Ebenen in denen jeweils zwei Diagonalen liegen und Sie finden Parallelogramme. Die Diagonalen von Parallelogrammen halbieren sich. Also halbieren sich jeweils zwei Diagonalen, also halbieren sich alle Diagonalen.

d) Koordinatenform der Grundebene E_{ABCD} – mit GTR [PrgmGeometri](#): $8x - 7y + 11z + 2 = 0$



Koordinaten eines Punktes der Ebene

Ansatz für Gleichung der Ebene: $8x - 7y + 11z + D = 0$ mit $M \in E \Rightarrow$

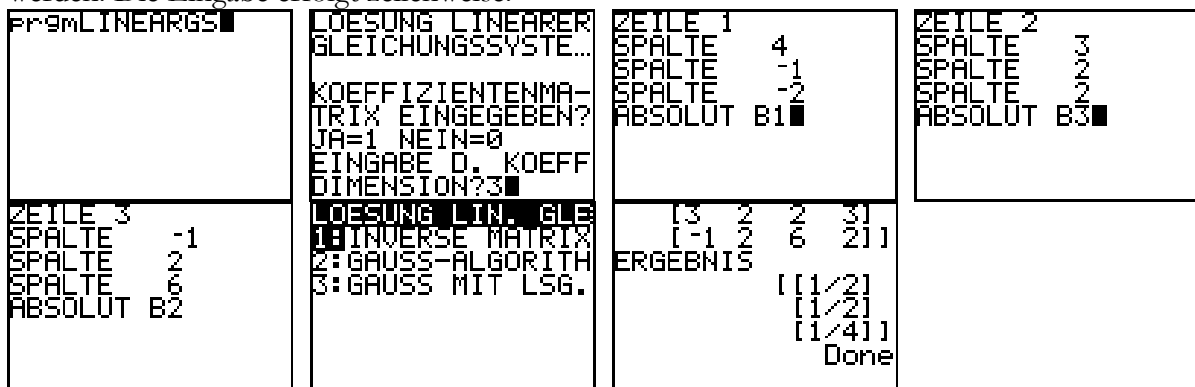
$$D = -(8 \cdot 5/2 - 7 \cdot 9/2 + 11 \cdot 5/2) = -16$$

Gleichung der Ebene in parameterfreier Form: $8x - 7y + 11z = 16$

e) Zunächst bemerkt man, dass der Punkt relativ nahe M liegt. Nur die z-Komponente weicht etwas mehr ab. Der Unterschied von 1,5 LE scheint aber in Relation mit dem z-Abstand von B und F von 6 LE nicht entscheidend. Ähnlich könnte man für die anderen Längen argumentieren.

Mathematischer ist folgender Ansatz: $\vec{AP} = r\vec{AB} + s\vec{AD} + t\vec{AE}$ mit $r, s, t \in \mathbf{R}$ und der Punkt liegt im Inneren falls gilt: $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq s \leq 1$ und $0 \leq t \leq 1$ (Bedingung 1).

Das Gleichungssystem $r \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ kann mit dem GTR [PrgmLinearGS](#) gelöst werden. Die Eingabe erfolgt zeilenweise.



Die Koeffizienten $r = 1/2$; $s = 1/2$ und $t = 1/4$ erfüllen die Bedingung 1.

Ansatz für Untersuchung

Schlussfolgerung: Der Punkt P liegt im Inneren des Prismas.

Teil C

a) $A = \{(4), (13), (22)\};$

$B = \{(2), (3), (4), (6), (8), (9), (10), (12), (14), (15), (16), (18), (20), (21), (22), (24)\}$

Wahrscheinlichkeit $P(A)$: $P(A) = 0,12 = 3/25$

Wahrscheinlichkeit $P(B)$: $P(B) = 0,64 = 16/25$

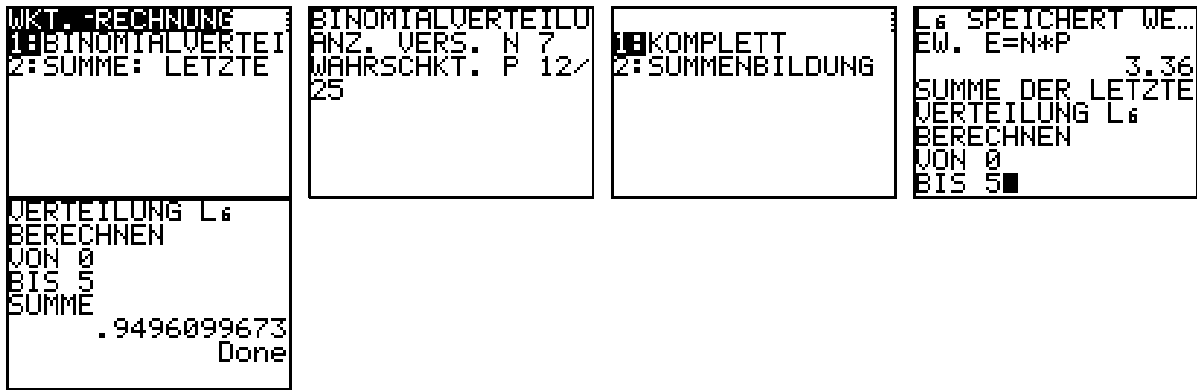
b) Binomialverteilung mit Parameter $n = 2$ und $p_{>18} = 7/25$

Wahrscheinlichkeit: $p = 0,4816 = B_{n,p}(1 \leq k \leq 2) = 1 - B_{n,p}(0)$

c) Binomialverteilung: $n = 7$ und $p_2 = 12/25$

Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $B_{n,p}(0 \leq k \leq 5) = 1 - B_{n,p}(6) - B_{n,p}(7)$

weiter mit GTR [PrgmWahrsche](#):

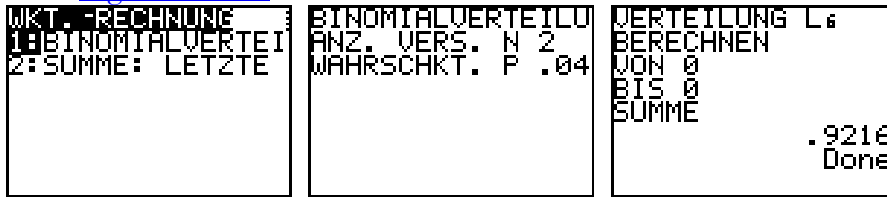


Wahrscheinlichkeit: $p \approx 0,9496$

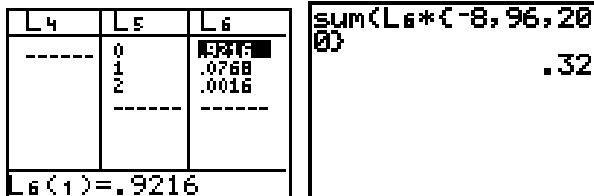
d) $B_{2, .04}$

Verteilung der Zufallsgröße: $p_{+100} = B_{2, .04}(1)$, $p_{+200} = B_{2, .04}(2)$, $p_{-4} = B_{2, .04}(0)$

GTR Prgm Wahrsche:



Die Berechnung der Summen ist hier nicht von Bedeutung und kann übergangen werden. Für uns ist wichtiger, dass die Werte der Binomialverteilung in L_6 abgespeichert werden. Das kann man leicht über das [STAT]-Edit-Menü kontrollieren. Natürlich können Sie die Werte abschreiben und per Hand weiterrechnen. Sie können aber auch aus dem List-Math-Menü die sum-Funktion verwenden.



Erwartungswert für Gewinn: $E = 0,32 \text{ €}$

Schlussfolgerung: Man könnte ein solches Spiel spielen, da der Erwartungswert für den Spieler größer als 0 ist.

e) X – erstmaliges Auftreten einer geraden Kugel und damit für die Anzahl der Ziehungen

$$P(X=1) = 12/25, P(X=2) = (13/25) \cdot (13/25), P(X=3) = (13/25) \cdot (12/25) \cdot (14/25),$$

$$P(X=4) = (13/25) \cdot (12/25) \cdot (11/25) \quad \{\text{da unabhängig von 4. Ziehung}\}$$

$$\text{Ansatz für Erwartungswert: } E(X) = 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) + 4 \cdot P(X=4) = 1,879$$

$$\text{Erwartungswert der Anzahl der Ziehungen: } E(X) \approx 2$$

Teil D: Wahlaufgaben

Aufgabe D 1

a) Begründung: Es gibt mindestens 3 Stellen mit dem Anstieg 0. Die 1. Ableitung von f ist also mindestens 3. Grades. Die Funktion muss also mindestens 4. Grades sein.

b) Variante I:

a) $f(x)$ ist symmetrisch $\Rightarrow f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$)

b) $f(x)$ berührt die x -Achse (dort sind auch Nullstellen) $\Rightarrow (x-4)^2 \cdot (x+4)^2 = ((x-4) \cdot (x+4))^2 = (x^2 - 16)^2$. Dieser Term tritt als Teiler in $f(x)$ auf. $\Rightarrow f(x) = d \cdot (x^2 - 16)^2 = d \cdot (x^4 - 32x^2 + 256)$ ($d \in \mathbf{R}, d \neq 0$)

c. $f(0) = 4 \Rightarrow c = 4$ und wegen $d \cdot 256 = c \Rightarrow d = 1/64$

Variante II – Aufstellen eines Gleichungssystems:

Vorüberlegungen:

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a, b, c, d, e \in \mathbf{R}, a \neq 0$)

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Zur Bestimmung von 5 Unbekannten sind 5 unabhängige Gleichungen erforderlich. Folgende Gleichungen könnte man finden.

a. $f'(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

b. $f(0) = 4 \Rightarrow e = 4$

c. $f'(4) = 0 \Rightarrow 256a + 48b + 8c = 0$

d. $f'(-4) = 0 \Rightarrow -256a + 48b - 8c = 0 \Rightarrow b = 0$

e. $f(4) = 0 \Rightarrow 256a + 16c + 4 = 0$

f. $f(-4) = 0 \Rightarrow 256a + 16c + 4 = 0$

eine Gleichung des Gleichungssystems:

1. Ableitung

eine weitere Gleichung des Gleichungssystems

Gleichung der Funktion f: z.B. $y = f(x) = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

c) Vorüberlegung: Aufgrund der Symmetrie reicht es die Fläche im I. Quadranten zu halbieren.

Die Gesamtfläche beträgt $A_G = \int_0^4 g(x) dx$

GTR: $\text{fnInt}((x^2/8-2)^2, x, 0, 4) \rightarrow 8,5333$

Die oberen bzw. unteren Flächen sind dann: $A_o = A_u = 4,2667$

Integrationsgrenzen

Flächeninhalt der Giebelfläche: $A = 17,0667$

Ansatz für Höhe:

$h = f(u)$ mit $u \in \mathbf{R}, 0 \leq u \leq 4$

$A(u) = \int_0^u g(x) dx - u \cdot f(u) = 4,2667$

GTR: $Y1=(x^2/8-2)^2; \text{solve}(\text{fnInt}(Y1, x, 0, u) - u*Y1(u) - 4.2667, u, 3) \rightarrow 2,5726; Y1(\text{Ans}) \rightarrow 1,3753$

Umsetzung der Lösungsidee

Höhe h: $h \approx 1,4$ m

Aufgabe D 2

a) Nachweis der Lage des Punktes A: $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ wahre Aussage mit $r = -2$

$\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t+1 \\ 2t-3 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Lösen des IGS

mit GTR [PrgmLinearGS](#) möglich, falls folgende Umformung vorgenommen wird:

$\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

```

LOESUNG LINEARER
GLEICHUNGSSYSTEME...

KOEFFIZIENTENMAT-
RIX EINGEBEN?
JA=1 NEIN=0
EINGABE 0. KOEFF
DIMENSION?2
[[ -1  -3  -4]
 [ 2   4  -6]]
ERGEBNIS
[[ -17]
 [ 7   ]]
Done
    
```

```

ZEILE 1
SPALTE   -1
SPALTE   -3
ABSOLUT B-4
    
```

```

ZEILE 2
SPALTE    2
SPALTE    4
ABSOLUT B-6
    
```

```

LOESUNG LIN. GLE
1:INVERSE MATRIX
2:GAUSS-ALGORITH
3:GAUSS MIT LSG.
    
```

Wert t: t=-17

b) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -t+1 \\ 2t-3 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ - offensichtlich ist die Ebenengleichung

durch gt bereits vorgegeben. Die Umwandlung in die Koordinatenform kann mit GTR

[PrgmGeometrie](#) erfolgen:

```

ANALYT. GEOMETRIE
1:ABSTAEUNDE
2:SCHNITTWINKEL
3:VEKTORPRODUKT
4:DREIECK
5:EBENENGLEICHUNG
6:SPIEGELUNG
7:DURCHSTOSSPKT
EINGABE RICHTUNG
X=?-1
Y=?-2
Z=?0
EINGABE RICHTUNG
X=?-3
Y=?-4
Z=?0
    
```

```

BESTIMME ALLGEM.
UND PARAM.-FREIE
FORM AUS 3 PKT.
DER EBENE ENTER
Y=?4
Z=?0
L6 ENTHEALT DIE
KOEFFIZIENTEN
AX+BY+CZ+D=0
(0 0 2 6)
Done
    
```

```

EINGABE EBENE
1:PKT. + 2 RICHT
2:DREIPUNKT
L6 ENTHEALT DIE
KOEFFIZIENTEN
AX+BY+CZ+D=0
(0 0 2 6)
Done
L6/2
(0 0 1 3)
    
```

```

EINGABE PKT. R3
X=?1
Y=?-3
Z=?-3
EINGABE RICHTUNG
X=?-1
Y=?-2
Z=?0
    
```

Gleichung der Ebene E: $z = -3$

Beschreibung der Lage der Ebene E:

parallel zur x-y-Ebene des Koordinatensystems in einer „Höhe“ von -3

- c) Begründung: Wie aus b) hervorgeht, haben alle Punkte beliebiger Geraden g_t den z-Wert -3 , mit anderen Worten: kein Punkt einer Gerade g_t hat den z-Wert 0.

Ansatz für Gleichung der Geraden: Die Gerade muss den Punkt $(0 | 0 | -3)$ enthalten.

Gleichung der Geraden $g_{2,5}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbf{R})$

- d) Variante I:

Der Mittelpunkt der Diagonale bildet den Stellungsvektor für eine Ebene mit dem Normalenvektor \vec{AC} . In dieser Ebene muss die Diagonale von B nach D liegen. Außerdem liegt B auf g_{17} und D auf g_8 . Die Punkte B und D sind also Schnittpunkte der Ebene mit der jeweiligen Gerade.

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad g_{-17}(r): \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ -37 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_8(r): \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung der beiden Gleichungen

$$E \cap g_{-17}: \left[\begin{pmatrix} 18 \\ -37 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow r = 9; B: g_{17}(9) \text{ und}$$

$$E \cap g_8 : \left[\begin{pmatrix} -7 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow r = -4; B: g_8(-4) \text{ und}$$

Variante II:

Gesucht sind Punkte auf g_{-17} bzw. g_8 mit dem Abstand $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{2}$ zu Mittelpunkt M: $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}$.

Mit diesem Ansatz findet man die ähnliche Gleichungen wie oben. Zum Beispiel

$$g_{-17} : \left[\begin{pmatrix} 18 \\ -37 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right]^2 = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix}^2 \text{ und gleiche Werte für } r: r = 9 \text{ und } B \text{ für die zweite}$$

Lösung entsteht $r = 7$ und $B^*(-3 \mid -9 \mid -3) = C$.

Variante III:

Da $g_8 \parallel g_{-17}$ ist und Sie über die Diagonalenlänge auch die Kantenlänge finden, können Sie nun auch (jeweils zwei Punkte) auf den Geraden im passenden Abstand finden.

Länge der Diagonale AC oder Gleichung der Geraden durch die Punkte A und C

Ansatz für Koordinaten eines der Punkte B oder D

Koordinaten der Punkte B und D: $B(-9; -1; -3), D(5; -3; -3)$

Leistungskurs

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

- a) Gegeben sind Funktionen f_k durch $y = f_k(x) = e^{-1/x} + k/x$ ($k \in \mathbf{R}; x \in \mathbf{D}_{f_k}$).
Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktionen f_k an.
Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen f_k im Unendlichen.

Geben Sie für die Funktionen f_{-2} und f_2 jeweils Nullstellen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte und die Art der Extrema an.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

- b) Untersuchen Sie die Funktionen f_k auf die Existenz von lokalen Extrempunkten in Abhängigkeit von k .

Erreichbare BE-Anzahl: 5

- c) Zeigen Sie, dass sich die Graphen zweier beliebiger Funktionen der Funktionenschar f_k nicht schneiden.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

In den folgenden Aufgabenteilen wird die Funktion f_2 betrachtet.

- d) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t im Punkt $P(-2; f_2(-2))$ an den Graphen der Funktion f_2 .
Die Tangente t , die Gerade $y = e + 1$ und die y -Achse begrenzen ein Dreieck vollständig. Dieses Dreieck erzeugt bei Rotation um die y -Achse einen Kreiskegel.
Bestimmen Sie das Volumen dieses Kreiskegels.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

- e) Der Graph der Funktion f_2 , die x -Achse und die Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = a$ ($a \in \mathbf{R}, a > 1$) begrenzen für jedes a eine Fläche vollständig.
Bestimmen Sie den Wert a , für den die zugehörige Fläche den Inhalt 1,3 hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

- f) Gegeben ist die Funktion g durch $y = g(x) = x^{-1}$ ($x \in \mathbf{R}, x \neq 0$).
 Es existiert genau ein u ($u \in \mathbf{R}, u < 0$), für das die Differenz der Funktionswerte der Funktionen f_2 und g extrem wird.
 Bestimmen Sie diesen Wert u und geben Sie die Art und den Wert des Extremums an.
 Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_2 und g im II. Quadranten und kennzeichnen Sie in der Skizze Ihre Ergebnisse.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-4; 4; 2)$, $B(1; -1; 0)$, $C(5; 1; 2)$ und $G(1; 7; 14)$ sowie die Ebenen E_a mit $ax - 14y + 8z = 6a - 1$ ($a \in \mathbf{R}$) gegeben.

- a) Durch die Punkte A und C verläuft die Gerade g . Der Punkt D ist Bildpunkt des Punktes B bei Spiegelung an der Geraden g .

Beschreiben Sie ein rechnerisches Verfahren zur Ermittlung der Koordinaten des Punktes D .
 Geben Sie die Koordinaten des Punktes D an.

Geben Sie die Art des Vierecks $ABCD$ an und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

- b) Die Gerade h verläuft durch die Punkte C und G .

Ermitteln Sie den Wert a , für den die Gerade h in der zugehörigen Ebene E_a liegt. Untersuchen Sie, ob ein Wert a existiert, so dass die Gerade h senkrecht zur Ebene E_a steht.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Betrachtet wird nun das schiefe Prisma $ABCDEFGH$ mit der Grundfläche $ABCD$, bei dem die Strecke \overline{CG} eine Seitenkante ist.

- c) Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden durch die Punkte C und G mit der Grundflächenebene des Prismas.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene, in der die Deckfläche $EFGH$ des Prismas liegt.

Berechnen Sie das Volumen des Prismas.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

- d) Durch den Diagonalschnittpunkt $S(2; 2; 2)$ der Fläche $ABCD$ verlaufen Geraden.

Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen dieser Geraden, bei der die im Inneren des Prismas liegende Strecke maximale Länge besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- e) Auf der Seitenkante \overline{CG} existiert ein Punkt P , der von der Grundfläche den Abstand von $\frac{23}{\sqrt{35}}$ besitzt.

Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil C: Stochastik

Eine sächsische Firma stellt Drahtzaun her³. Dieser wird in Form von Rollen ausgeliefert. Es ist bekannt, dass 4% aller Rollen Ausschuss sind. Die Ausschussrollen treten unabhängig voneinander auf.

- a) Der laufenden Produktion werden 20 Rollen Drahtzaun entnommen. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der dabei auftretenden Ausschussrollen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

Ereignis A: Keine der entnommenen Rollen ist Ausschuss.

Ereignis B: Mindestens 2, aber höchstens 4 Rollen sind Ausschuss.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- b) Entscheiden Sie, welche der Aussagen (1) bis (3) falsch sind, und begründen Sie für diese Fälle Ihre Entscheidung.

³ Dieses komische Deutsch entstammt der Aufgabenstellung.

- (1) In jeder Lieferung von 200 Rollen sind acht Rollen Ausschuss.
- (2) Im Durchschnitt sind in einer Lieferung von 200 Rollen mindestens acht Ausschussrollen zu erwarten.
- (3) Im Durchschnitt sind in einer Lieferung von 200 Rollen acht Ausschussrollen zu erwarten.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- c) Eine Rolle ist Ausschuss, wenn sie mindestens einen der beiden Fehler F_1 : "Fehler in Qualität des Drahtes" oder F_2 : "Fehler im Drahtgeflecht" hat. Andere Fehlerarten kommen nicht vor. Beide Fehler treten unabhängig voneinander auf. Die Wahrscheinlichkeit für Fehler F_1 beträgt 0,025. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Fehler F_2 auftritt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

- d) Der Verkauf des Drahtes erfolgt zu gleichen Anteilen über die Vertriebszentren Dresden, Leipzig und Auerbach. 20% der Lieferungen des Vertriebszentrums Dresden, 25% der Lieferungen des Vertriebszentrums Leipzig und 10% der Lieferungen des Vertriebszentrums Auerbach sind unpünktlich. Im Rahmen einer Schulung für Verkäufer will die Firmenleitung die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer unpünktlichen Auslieferung mithilfe einer geeigneten Simulation (z.B. mit einem GTR oder mit einem Urnenmodell) plausibel machen. Beschreiben Sie, wie eine solche Simulation durchgeführt werden kann. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, mit der eine zufällig ermittelte Auslieferung unpünktlich ist. Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine unpünktliche Auslieferung aus dem Vertriebszentrum Auerbach stammt.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

- e) Bei einer für die Herstellung von Drahtzaun benötigten Drahtsorte wird die Drahtstärke durch die Zufallsgröße Z beschrieben. Diese ist normalverteilt mit einem Erwartungswert von 6 mm und einer Standardabweichung von 0,5 mm. Berechnen Sie die kleinste Zahl c auf 0,1 mm genau, für die gilt: $P(Z > c) \leq 0,025$.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Die Abbildung zeigt den halben Querschnitt eines Gefäßes, das die Gestalt eines Rotationskörpers besitzt.

Abbildung (nicht maßstäblich)

Die innere seitliche Begrenzungsfläche wird durch die Rotation des Graphen der Funktion f_a

mit $f_a(x) = \frac{1}{10} \sqrt{ax + 9} \cdot (5a - x)$ ($a \in \mathbf{R}, a > 4$;

$x \in \mathbf{R}, 0 \leq x \leq 4a$) um die x -Achse gebildet.

Die äußere seitliche Begrenzungsfläche wird durch die Rotation des Graphen der Funktion g_a mit $g_a(x) = f_a(x) + 1$ ($a \in \mathbf{R}, a > 4$; $x \in \mathbf{R}, 0 \leq$

$x \leq 4a$) um die x -Achse bestimmt. Eine Längeneinheit entspricht jeweils einem Zentimeter.

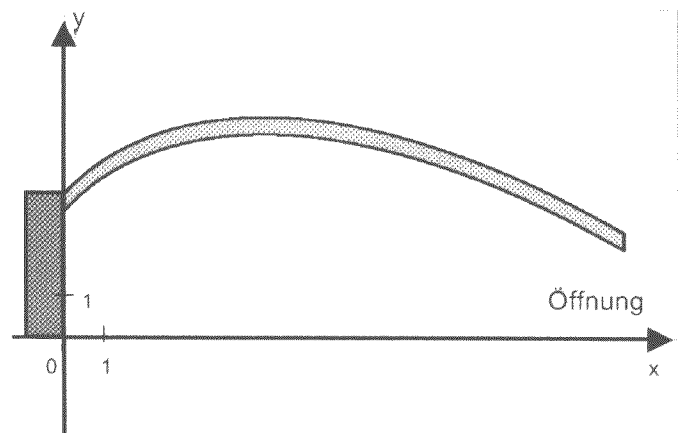
Der angesetzte Boden des Gefäßes ist eine zylinderförmige Scheibe mit der Höhe 1,0 cm und dem Radius $r_a = g_a(0)$ (siehe Abbildung).

- a) Berechnen Sie das Volumen des Gefäßbodens.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

- b) Geben Sie für $a = 10$ den maximalen Außendurchmesser des Gefäßes und den Durchmesser der Öffnung an.

Ermitteln Sie den Wert a , für den der Durchmesser der Öffnung 26,0 cm ist.



Erreichbare BE-Anzahl: 4

- c) Die Dichte des Materials beträgt $\rho = 2,5 \frac{g}{cm^3}$.
Ermitteln Sie die Masse des Gefäßes für $a = 10$.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

- d) Berechnen Sie den Wert a , für den das Fassungsvermögen des Gefäßes 100 Liter beträgt. Gehen Sie davon aus, dass das Gefäß bis zum Rand gefüllt werden kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

Zur Beschreibung der Position von Flugzeugen im Luftraum werde ein kartesisches Koordinatensystem benutzt. Die als eben angenommene Erdoberfläche liege in der x - y -Ebene. Die Flugbahn des Flugzeuges F_1 verläuft geradlinig durch die Punkte $P(0; 15; 8)$ und $Q(2; 13; 8)$. Für jedes k ($k \in \mathbf{N}$, $0 < k \leq 20$) verläuft eine mögliche geradlinige Flugbahn des Flugzeuges F_2 durch die Punkte $S_k(15; -2,5; k/2)$ und $T_k(30; -10; k)$.

- a) Zeigen Sie, dass für $k = 12$ die beiden Flugzeuge auf den Bahnen kollidieren können.
Erreichbare BE-Anzahl: 2
- b) Das Flugzeug F_2 befindet sich auf einer der möglichen Flugbahnen im Punkt S_k . Untersuchen Sie, ob das Flugzeug F_2 in jedem Fall von der im Punkt $O(0; 0; 0)$ befindlichen Bodenstation gesehen werden kann, wenn die Sichtweite 18 Längeneinheiten beträgt.
Erreichbare BE-Anzahl: 2
- c) Von einem "Beinahezusammenstoß" spricht man, wenn der Abstand zweier Flugzeuge weniger als eine Längeneinheit beträgt. Für welche Werte von k kann es auf den Bahnen der Flugzeuge F_1 und F_2 zu einem "Beinahezusammenstoß" kommen?

Erreichbare BE-Anzahl: 6

- d) Die geradlinig verlaufende Grenze zum Nachbarland geht durch die Punkte $G(0; -33; 0)$ und $H(100; -83; 0)$. Die Grenze des Luftraumes ist eine zur Erdoberfläche (x - y -Ebene) senkrechte Ebene, die die Landesgrenze enthält. Aus Sicherheitsgründen muss sich ein Flugzeug bei Annäherung an das Nachbarland spätestens bei dessen Bodenstation anmelden, wenn der Abstand zur Luftraumgrenze 10 Längeneinheiten beträgt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem sich Flugzeug F_1 welches sich im Punkt P befindet und sich der Luftraumgrenze des Nachbarlandes nähert, spätestens bei der Bodenstation des Nachbarlandes anmelden muss.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Zusatzaufgabe

Teil A: Analysis

Gegeben sind eine Funktion g durch $y = g(x) = \frac{(x-2) \cdot (x+4)^2}{x}$ ($x \in \mathbf{D}_g$) sowie Funktionen f_k durch y

$$= f_k(x) = x^2 + 3kx - \frac{4k^3}{x} \quad (k \in \mathbf{R}, k > 0; x \in \mathbf{R}, x \neq 0).$$

- a) Geben Sie für die Funktion g die Nullstellen und die Polstelle an.
Geben Sie das Verhalten der Funktion g im Unendlichen an.
Berechnen Sie den Wert k , für den $g(x) = f_k(x)$ gilt.
Erreichbare BE-Anzahl: 7
- b) Zeigen Sie, dass für jedes k die Funktion f_k an der Stelle $x = k$ eine Nullstelle besitzt, und berechnen Sie alle weiteren Nullstellen dieser Funktion f_k . Weisen Sie nach, dass für jedes k die Funktion f_k an der Stelle $x = -2k$ eine lokale Extremstelle besitzt.
Begründen Sie, dass es kein k gibt, für das der Graph der Funktion f_k achsensymmetrisch zur y -Achse ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

- c) Für jedes k ist die Gerade t_k Tangente und die Gerade n_k Normale an den Graphen der Funktion f_k im Punkt $P_k(k; 0)$. Jede Gerade n_k schneidet die y -Achse im Punkt R . Zeigen Sie, dass die Koordinaten des Punktes R von k unabhängig sind.
Für jedes k begrenzen die Geraden t_k und n_k und die y -Achse ein Dreieck.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

- d) Für jedes k begrenzen der Graph der Funktion f_k , die x -Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = -k$ eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Wert k , für den der Inhalt dieser Fläche $-\frac{13}{48} + \frac{1}{2} \cdot \ln 2$ beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

- e) Berechnen Sie den Wert k , für den die Tangenten an den Graphen der Funktion f_k an den Stellen $x_1 = 4$ und $x_2 = -2$ zueinander parallel sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

- f) Ermitteln Sie für die Funktion f_2 die Abszisse desjenigen Punktes des Graphen, der dem Koordinatenursprung am nächsten liegt.
Geben Sie diesen minimalen Abstand an.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Erwartungsbild und Bewertungsmaßstab

Das Erwartungsbild beinhaltet nur ausgewählte Ergebnisse. Auf die Angabe von Zwischenergebnissen, Graphen von Funktionen und Zeichnungen wurde verzichtet, auch wenn diese bewertet werden sollen.

Pflichtaufgaben

Teil A

a) größtmöglicher Definitionsbereich $D_{f_k} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Verhalten für $x \rightarrow \infty$: $\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$

Verhalten für $x \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \infty$

Nullstelle der Funktion f_2 : $x_N \approx -1,13$

Aussage zu Nullstellen der Funktion f_2

Wie aus dem Verhalten im Unendlichen und der Abbildung 3 geschlossen werden kann, gibt es keine Nullstellen.

Aussage zu lokalen Extrema der Funktion f_2

Aus Abbildung 1 kann man ablesen, dass für $x < 0$ und $0 < x$ die Funktion jeweils streng monoton fallend ist.

Koordinaten und Art des lokalen

Extrempunktes der Funktion f_2 : $P_{\text{MIN}}(-1,41; 3,44)$

GTR: $Y1 = e^{-.5X} + K/X; -1 \rightarrow K;$

solve(nDeriv(Y1, X, A), A, -1) $\rightarrow -1,4069$

und Y1 (Ans $\rightarrow 3,4423$)

b) 1. Ableitung: $f'_k(x) = -\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2} - \frac{k}{x^2}$

Ansatz: $f'_k(x) = 0 \Rightarrow 2ke^{\frac{x}{2}} + x^2 = 0$

Aussage für $k > 0$: es gibt keine lokalen Extrema

Aussage für $k = 0$: $x_E = 0 \notin D_f$ – kein Extrema

Aussage für $k < 0$: siehe Abbildung 4

Offensichtlich sind bis zu 3 lokale Extremstellen auffindbar. Im Bild ist das anhand der entstehenden Schnittpunkte zu erkennen, denn diese Stellen sind gerade die Lösungen der angegebenen Gleichung. Da

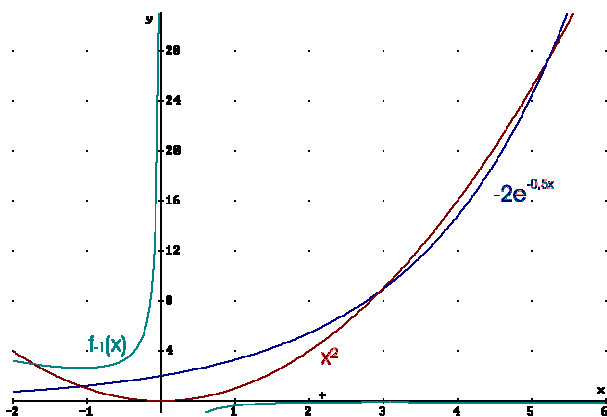


Abbildung 4: Darstellung der Funktion $f_1(x)$ im Zusammenhang mit der zu lösenden Gleichung $2e^{\frac{x}{2}} = x^2$.

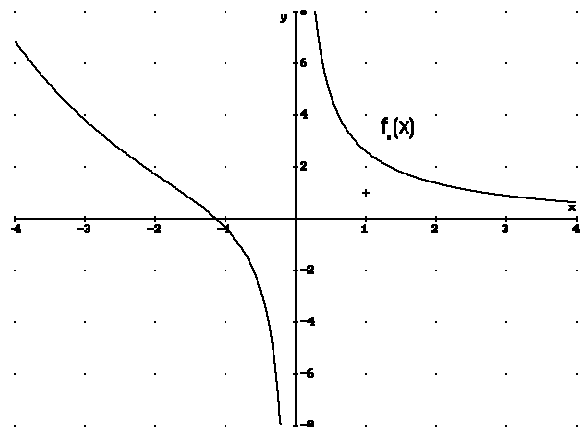


Abbildung 1: $f_2(x)$

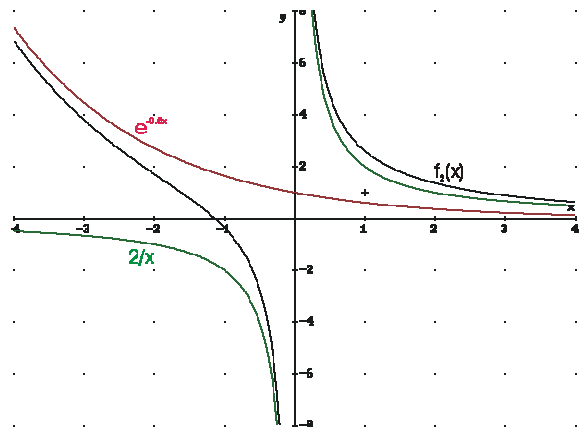


Abbildung 2: Zeigt den Zusammenhang zwischen $f_2(x)$ und den Funktionen der einzelnen Summanden des Funktionsterms.

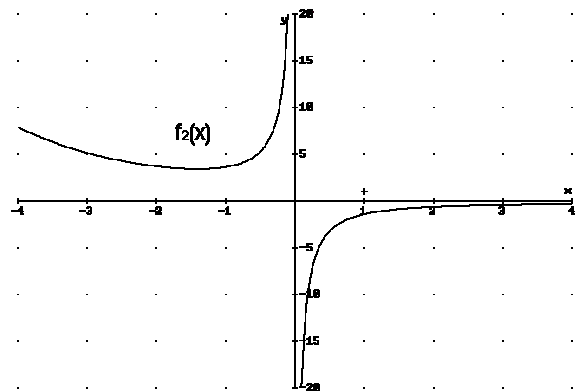


Abbildung 3: $f_2(x)$

die e-Funktion ab einer Stelle immer schneller wächst als x^2 , kann es also 1, 2 oder 3 Extrema geben.

c) Ansatz: $f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x)$ führt für alle $k_1 \neq k_2$ ($k_1, k_2 \in \mathbb{R}$) zu einem Widerspruch.

Interpretation: $\frac{k_1}{x} = \frac{k_2}{x}$ ist nur dann wahr, wenn

$x \neq 0$ bzw. $k_1 = k_2$ gilt.


Schlussfolgerung Folglich haben je zwei verschiedene Funktionen keine gemeinsamen Punkte.

d) **Ansatz:** $f'_{-2}(x) = -\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2} + \frac{2}{x^2}$;

$$m = f'_{-2}(-2) = \frac{1-e}{2}$$

Ansatz für Gleichung der Tangente: $y = mx + n$

mit $n = f_{-2}(-2) - m \cdot (-2)$

Gleichung der Tangente: $y = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e) x +$ 

Radius des Kreiskegels: $r = -2$

Ansatz für Höhe des Kreiskegels: $h = y_h - 2$

Höhe: $h = e - 1$

Ansatz für Volumen:

$$V = \frac{1}{3} A_G h = \frac{\pi}{3} (-2)^2 h$$

Volumen: $V \approx 7,2$

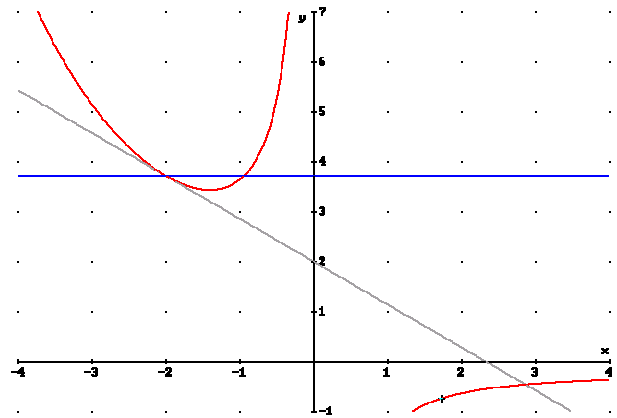


Abbildung 5: $f_{-2}(x)$ mit Tangente t und $y_h = e + 1$

e) **Ansatz:** $\left| \int_1^a f_{-2}(x) dx \right| = 1,3$

GTR: `solve(abs(fnInt(Y1,X,1,A))-1.3,A,2)` $\rightarrow 2,7168$ (ist ein universaler Ansatz und geht am schnellsten) oder

Vorzeichen des bestimmten Integrals: $F_{-2}(x) = -2 \cdot \left(e^{-\frac{x}{2}} + \ln(x) \right)$

Umformungen

Wert a: $a \approx 2,7$

f) Ansatz: $d(x) = f_2(x) - x^{-1}$

Zielfunktion: $d'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{e^{-x}}{2}$

besser mit GTR:

solve (nDeriv (Y1-X⁻¹, X, A) , A, -2)

→ -1,6298

Extremstelle u: $u \approx -1,6$

Art des Extremums: entweder lokales Minimum oder lokales Maximum

z. B. GTR: nDeriv (nDeriv (Y1-X⁻¹

¹, X, X) , X, Ans) → 1,95 ⇒ kleinster Abstand

Extremwert der Differenz d: entweder $d \approx -4,1$

oder $d \approx 4,1$ (Je nach dem, in welcher Reihenfolge die Differenz gebildet wurde.)

Skizze⁴ - Abbildung 6

Kennzeichnung von u

Kennzeichnung von d

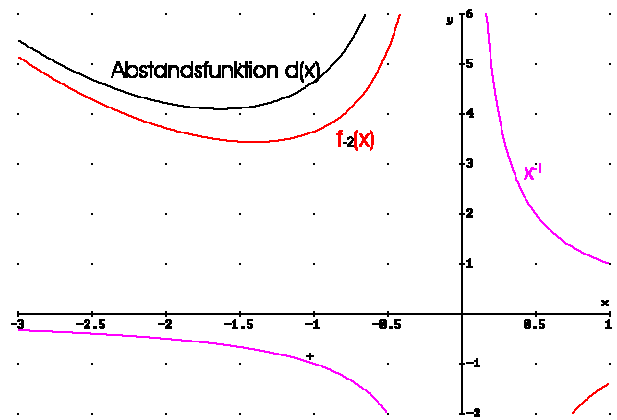


Abbildung 6

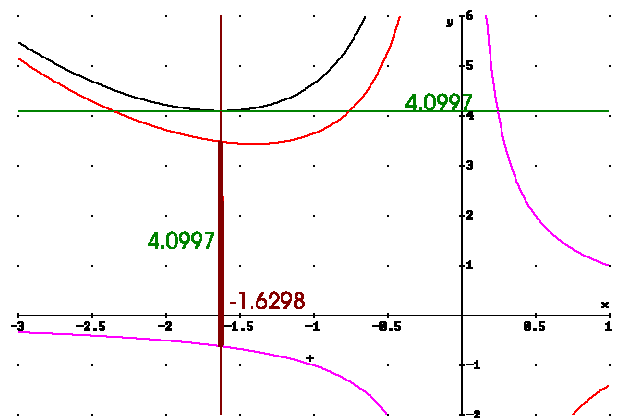


Abbildung 7: Graphen der Funktionen wie oben

Zusatzaufgabe - Teil A

a) erste Nullstelle

zweite Nullstelle: $x_{N1} = 2; x_{N2} = -4$

Polstelle: $x_p = 0$

Verhalten für $x \rightarrow \infty: \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

Verhalten für $x \rightarrow -\infty: \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$

Ansatz für Wert k: $g(x) = \frac{x^3 + 6x^2 - 32}{x} \Rightarrow 6 = 3k$

Wert k: $k = 2$

7 BE

b) Nachweis: $f_k(k) = k^2 + 3k^2 - 4k^2 = 0$

Polynomdivision: $f_k(x) = \frac{x^3 + 3kx^2 - 4k^3}{x}$ mit $x_{N1} = k$

$(x^3 + 3kx^2 - 4k^3) : (x-k) = x^2 + 4kx + 4k^2$

$\frac{x^3 - kx^2}{4kx^2} - 4k^3$

$\frac{4kx^2 - 4k^2x}{-4k^2x - 4k^3}$

$\frac{-4k^2x - 4k^3}{-4k^2x - 4k^3}$

$\frac{0}{0}$

und Lösung der quadratischen Gleichung: $x^2 + 4kx + 4k^2 = (x+2k)^2$ bzw.

$x_{1/2} = -2k \pm \sqrt{4k^2 - 4k^2}$

zweite Nullstelle: $x_{N2} = -2k$

1. Ableitung: $f'_k(x) = 2x + 3k + \frac{4k^3}{x^2}$

Prüfung der notwendigen Bedingung: $f'_k(-2k) \stackrel{?}{=} 0$ (wahre Aussage)

2. Ableitung: $f''_k(x) = 2 - \frac{8k^3}{x^3}$

2. Ableitung an der Stelle $x = -2k: f''_k(-2k) = 3 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum bei $E_{\text{Min}}(-2k | 0)$

⁴ Die Aufgabenstellung ist hier ungenau. Die Beschränkung auf den II. Quadranten führt zu einer unzureichenden Darstellung des Problems. Aus diesem Grund sollte die Darstellung des II. und III. Quadranten erfolgen.

Begründung: Version I: Achsensymmetrie liegt vor, wenn gilt: $f_k(x) = f_k(-x)$, was zu einem Widerspruch führt. Zum Beispiel ist $6kx^2 = 8k^3$ für $k > 0$ und $x \in \mathbb{R}$; $x \neq 0^5$ nicht lösbar.

Version II: angenommen, es gibt ein solches k , dann müsste auch $E_1(2k | 0)$ ein Minimum sein. Da aber $f_k'(2k) = 8k \neq 0$ für $k > 0$ gilt und folglich dort keine Extremstelle sein kann, ist die Annahme falsch. Die Funktion $f_k(x)$ ist keinesfalls achsensymmetrisch.

- c) Anstieg der Tangente: $m_t = f_k'(k) = 9k$
 Anstieg der Normalen: $m_n = -1/m_t$; $n = 0 + k/(9k) = 1/9$ und $n(x): y = -1/(9k)x + 1/9$
 Ordinate des Punktes R: $R(0 | 1/9)$
 Schlussfolgerung: R hängt nicht von k ab.

Ansatz für Flächeninhalt:

Variante I: Bestimmung des Absolutgliedes der Tangentengleichung $t_k(x): y = 9kx - 9k^2$
 Variante II: Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck ausnutzen (siehe Abbildung): mit $A = 1/2 gh$; $g = p + q$ und $h^2 = pq$ ergibt sich

$$A_k = \frac{1}{2} \left(p + \frac{h^2}{p} \right) h \text{ und mit } p = 1/9 \text{ bzw. } h = k$$

Flächeninhalt A: $A = 9/2 k^3 + k/18$

- d) Ansatz für Flächeninhalt:

$$\left| \int_{-2k}^{-k} f_k(x) dx \right| = |F_k(-k) - F_k(-2k)| = -\frac{13}{48} + \frac{1}{2} \ln(2)$$

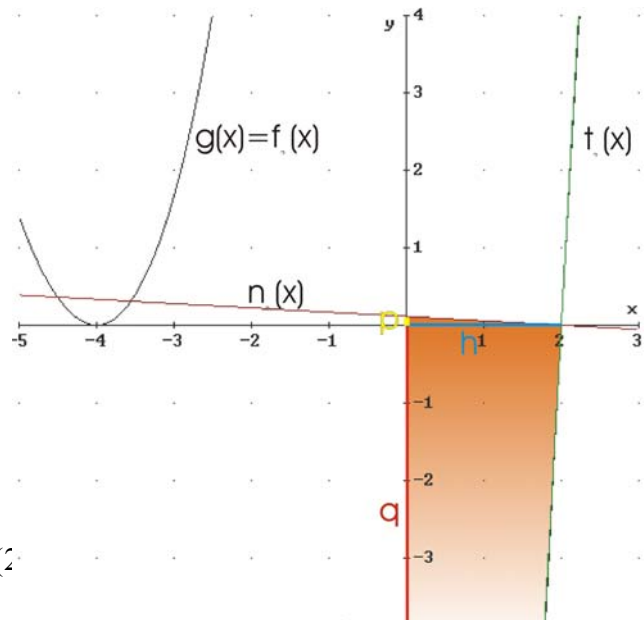


Abbildung 8

Stammfunktion:

$$F_k(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3kx^2}{2} - 4k^3 \ln(x)$$

$$|F_k(-k) - F_k(-2k)| = k^3 \left(\left(\frac{10}{3} - 4 \ln(-2k) \right) - \left(\frac{7}{6} - 4 \ln(-k) \right) \right)$$

Umformungen: mit $\ln(-2k) = \ln 2 + \ln(-k)$

$$= k^3 \left(\left(\frac{13}{6} - 4 \ln 2 \right) \right) = k^3 \left(-\frac{13}{6} + 4 \ln 2 \right) \stackrel{n.Vor.}{=} \frac{13}{48} - \frac{1}{2} \ln 2 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(-\frac{13}{6} + 4 \ln 2 \right)$$

Flächeninhalt in Abhängigkeit von k: $A_k = |F_k(-k) - F_k(-2k)|$

Ansatz zur Bestimmung von k: $k^3 \left(-\frac{13}{6} + 4 \ln 2 \right) = \frac{13}{48} - \frac{1}{2} \ln 2$

Wert k: $k = 1/2$

- e) Ansatz für Wert k: $f_k'(4) = f_k'(-2)$
 1. Ableitung an der Stelle $x = 4$: $f_k'(4) = 1/4 k^3 + 3k + 8$
 1. Ableitung an der Stelle $x = -2$: $f_k'(-2) = k^3 + 3k - 4$
 Wert k: $k = \sqrt[3]{16} \approx 2,52$

- f) Ansatz für Zielfunktion: $d^2(x) = x^2 + f_2^2(x)$
 Zielfunktion: $d^2(x) = x^2 + g^2(x)$
 weiter mit GTR: $Y1=g(x)$; $\text{solve}(nDeriv(X^2+Y1^2, X, X), X, 1) \rightarrow 1.9939$ und
 $\sqrt{(Ans^2+Y2(Ans)^2)} \rightarrow 1.9969$

⁵ Die Argumente x können jeden beliebigen Wert aus dem Definitionsbereich annehmen.

globale Minimumstelle: $x_{\text{MIN}} \approx 2,0$
 minimaler Abstand d: $d \approx 2,0$

Teil B

a) Rechnerisches Verfahren

Variante O: Nur für die Weitsichtigen: im Teil d) der Aufgabe wird der Diagonalschnittpunkt von ABCD mit $S = (2 \mid 2 \mid 2)$ angegeben. Selbstverständlich ist $S = L$, da ja vom Punkt D ausgegangen wird. Nun ist D mit $\overline{BL} = \overline{LD}$ leicht zu ermitteln.

Variante I⁶: Finden des Lotfußpunktes⁷ L von B auf g_{AC} . Aus $\overline{BL} = \overline{LD}$ ergibt sich D.

Variante II: Lösen des Gleichungssystems, das sich aus folgenden Tatsachen ergibt: I: $L \in g_{AC}$ II: $\overline{BL} \perp \overline{AC}$ III: $\overline{BL} = \overline{LD}$ (sehr ähnlich Variante I) und

Variante III: Finden einer Ebene $E_o \perp g_{AC}$ mit $B \in E_o$. Zum Beispiel durch Angabe der Normalenform. Bestimmung des Lotfußpunktes: $L = E_o \cap g_{AC}$. Anschließend führt $\overline{BL} = \overline{LD}$ zur Berechnung von D.

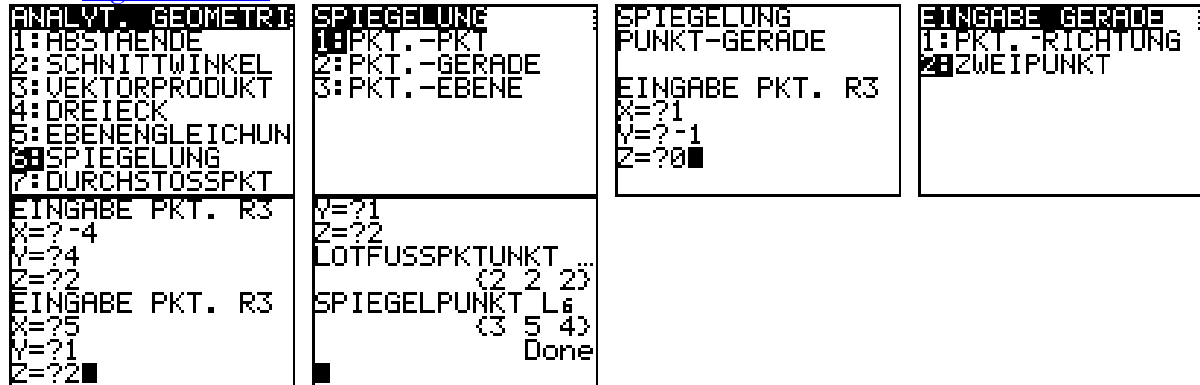
Aussage zum Finden der zur Geraden g orthogonalen Ebene

Aussage zum Finden des Lotfußpunktes

Aussage zum Finden der Koordinaten des Punktes D

Koordinaten des Punktes D: $D(3; 5; 4)$

GTR [PrgmGeometri](#):



Vierecksart: I: Diagonale \overline{BD} wird durch L halbiert, L liegt zwischen A und C und \overline{BD} steht senkrecht auf Diagonale $\overline{AC} \Rightarrow$ mindestens Drachenviereck ($\Delta_{ABC} \cong \Delta_{ADC}$). II: Mittelpunkt $M_{AC} (\frac{1}{2} \mid 5/2 \mid 2) \neq L \Rightarrow$ Drachenviereck (keine Raute). III: $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -6 \neq 0 \Rightarrow$ kein Sehnenviereck

Ansatz für Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$ oder $A = 2 A(\Delta_{ABC}) = \left| \overline{AB} \times \overline{BC} \right|$

Flächeninhalt A: $A = 6 \sqrt{35}$

b) Ansatz für Wert a:

$$h_{CG} : \vec{x} = \overline{OC} + s \cdot \overline{CG} \quad (s \in \mathbf{R})$$

⁶ Das rechnerische Verfahren ist etwas unvollständig dargestellt. Es sollte die folgende Fußnotentext unbedingt mit genannt werden. Anderenfalls verliert man vermutlich 1 BE.

Dazu folgende persönliche Anmerkung: da der Spiegelpunkt D auch durch Verwendung eines GTR-Programms ermittelt werden kann, ist es nicht wirklich notwendig den beschriebenen Weg zu verfolgen. Aus diesem Grund ist es, den eigenen Zielen bei der Anfertigung des schriftlichen Abiturs folgend, vielleicht besser auf diese eine Bewertungseinheit zu verzichten.

⁷ Der Lotfußpunkt ergibt sich aus I: $\overline{OL} = \overline{OA} + r \cdot \overline{AC}$ und II: $\overline{BL} \cdot \overline{AC} = 0 \Rightarrow$ III: $(\overline{BA} + r \cdot \overline{AC}) \cdot \overline{AC} = 0$ durch umstellen von III und Einsetzen in I ergibt sich: $\overline{OL} = \overline{OA} + \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AC}^2} \cdot \overline{AC}$. Achtung das Skalarprodukt ist nicht assoziativ, d. h. Sie können hier nicht weiter vereinfachen.

Aus I: $\vec{CG} \perp \vec{n}_{E_a}$ (Normalenvektor von E_a) folgt $h_{CG} \parallel E_a$, aber noch nicht $h_{CG} = h_{CG} \cap E_a$. Erst aus z. B. II: $C \in E_a$ ist sicher, dass ein solcher Wert a gefunden wurde.

Zu I: $\vec{CG} \cdot \vec{n}_{E_a} = 12 - 4k = 0$ und zu III: $3 \cdot 5 - 14 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 6 \cdot 3 - 1$ ist eine wahre Aussage⁸.

Wert a : $a = 3$

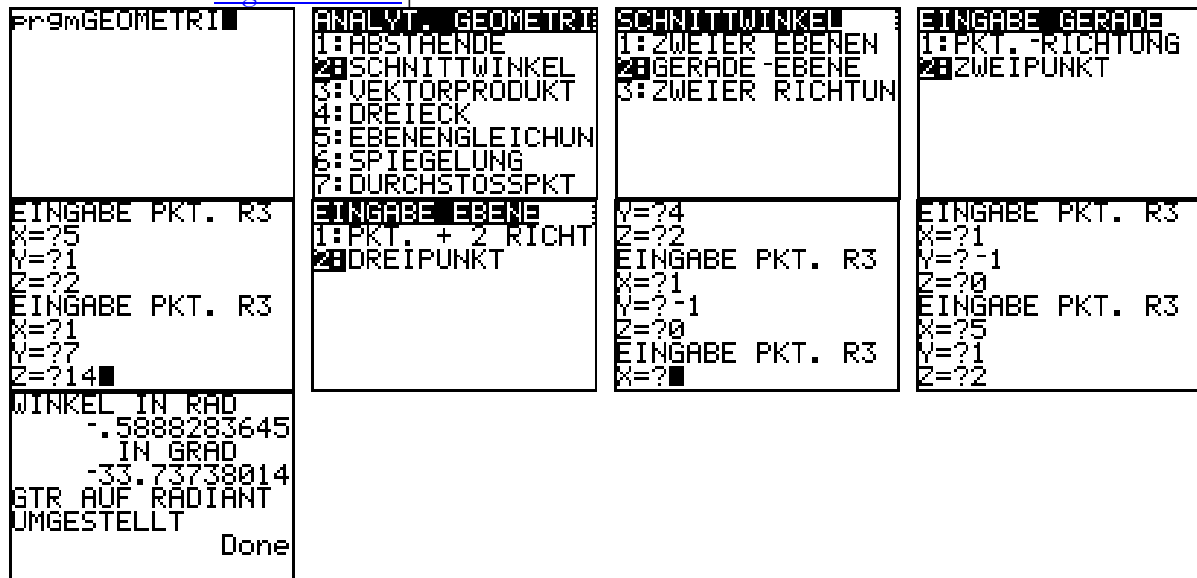
Ansatz für Prüfung auf Orthogonalität: gesucht sind Werte a , für die gilt: $\vec{CG} \parallel \vec{n}_{E_a}$

Schlussfolgerung: Es existiert kein solcher Wert a .

- c) Normalenvektor der Ebene der Grundfläche
 GTR [PrgmGeometri](#) | Ebenengleichung:

$$E_{ABCD}: -x - 3y + 5z = 2 \text{ und } \angle \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \right) = \arccos \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \right\|}$$

Probe mit GTR [PrgmGeometri](#) | Schnittwinkel:



Schnittwinkel α : $\alpha \approx 33,7^\circ$

Ansatz für Gleichung der Ebene der Deckfläche: da $G \in E_{EFGH}$ und $E_{ABCD} \parallel E_{EFGH}$ gilt:

$$E_{EFGH}: -x - 3y + 5z = -1 - 3 \cdot 7 + 5 \cdot 14 = 48$$

Gleichung der Ebene der Deckfläche: z.B. $x + 3y - 5z = -48$

Ansatz für Höhe des Prismas: nach Normierung der Koordinatengleichung für E_{ABCD} gilt:

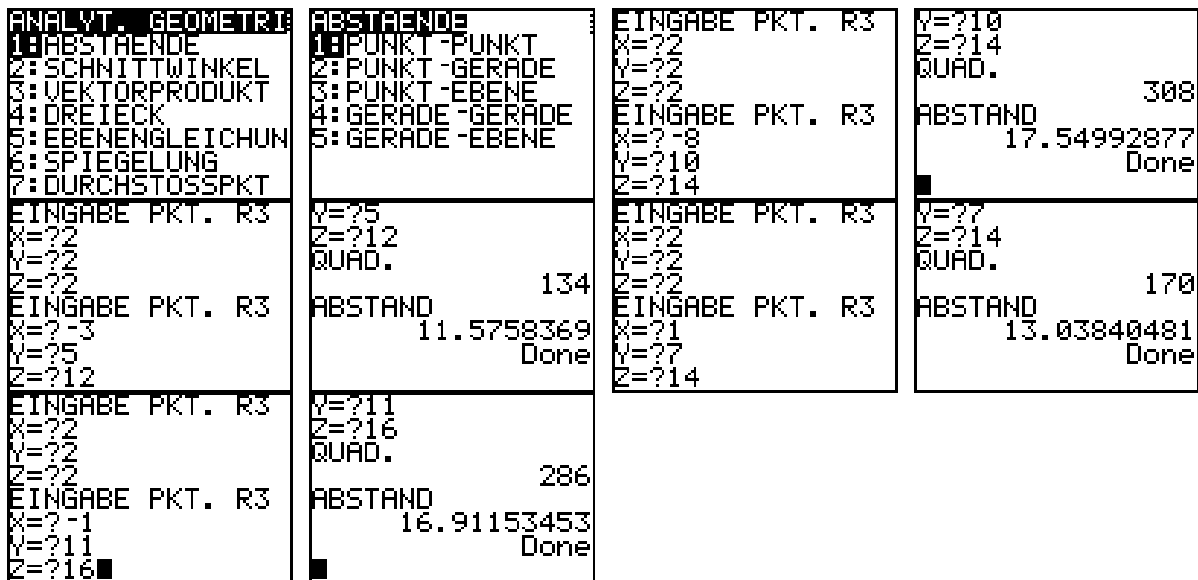
$$\frac{-x - 3y + 5z - 2}{\sqrt{35}} = 0 \text{ und } h = \frac{-1 - 3 \cdot 7 + 5 \cdot 14 - 2}{\sqrt{35}}$$

Höhe des Prismas: $h = 46/\sqrt{35}$

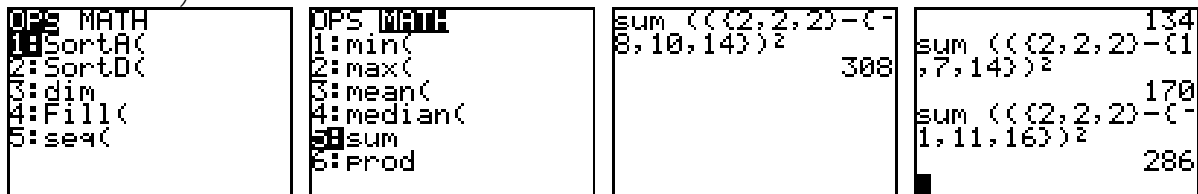
Volumen V : $V = 276$

- d) Koordinaten infrage kommender Eckpunkte der Deckfläche:
 Eckpunkte sind $E(-8 | 10 | 14)$, $F(-3 | 5 | 12)$, G , $H(-1 | 11 | 16)$
 Abstände dieser Punkte zum Diagonalschnittpunkt der Grundfläche
 z. B. GTR [PrgmGeometri](#) | Abstände:

⁸ Da es offensichtlich nur genau einen solchen Wert k gibt, kann man gemäß der Aufgabenstellung unterstellen, dass die Bedingung II automatisch wahr ist.



oder GTR „SUM“-Funktion für Listen zur Ermittlung es Abstandquadrats (Aufruf über LIST-Menü + Math)



Gleichung der Geraden: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$

e) Koordinaten des Punktes P in Abhängigkeit von einem Parameter

$\vec{OP} = \vec{OC} + s \cdot \vec{CG}$ ($s \in \mathbf{R}$ und $0 < s < 1$, da P zwischen C und G liegen soll)

Ansatz für Berechnung des Parameters

Variante I:

Aufgrund des „besonderen“ Abstandes $h = 23/\sqrt{35}$, der gerade die Hälfte des Abstandes der Grundfläche von der Deckfläche des Prismas ist, kann man auf $s = 1/2$ schließen.

Variante II:

Aus der Geradengleichung $\vec{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ und der Ebenengleichung in Normalenform

$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$ folgt unter Verwendung des gegebenen Abstandes von Punkt P zur Ebene

$s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \pm \frac{23}{\sqrt{35}}$ mit einer Lösung $s = 1/2$ und P

Wert des Parameters

Koordinaten des Punktes P: P(3 ;4; 8)

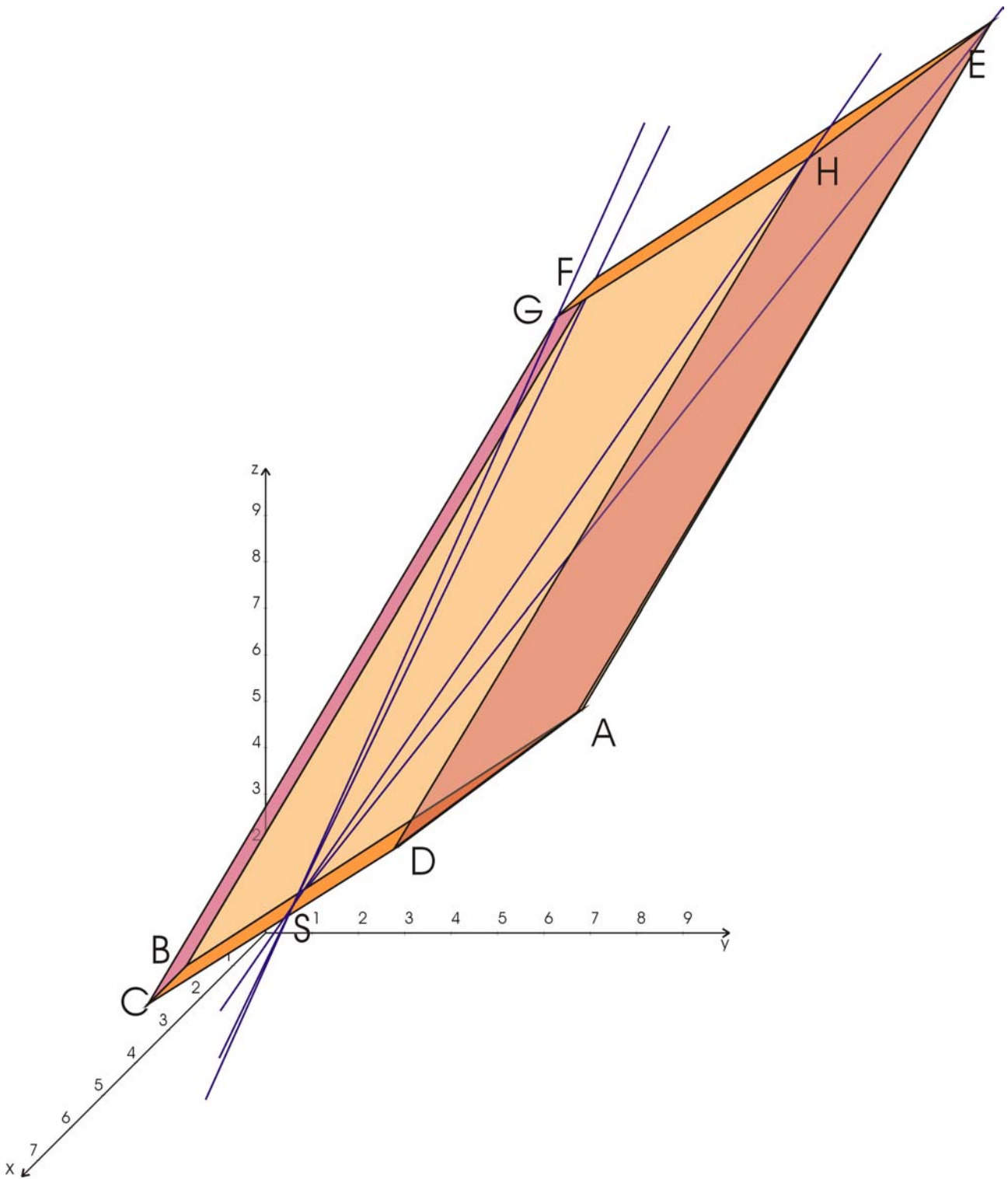


Abbildung 9

Teil C

a) $p_{\text{Ausschuss}} = p_A = 0,04$

Parameter der binomialverteilten Zufallsgröße X: $X \sim B_{20; 0,04}(X)$

GTR PrgmWahrsche:

```

PrgmWAHRSCHE

```

```

WKT. RECHNUNG
1:BINOMIALVERTEIL
Z:SUMME: LETZTE

```

```

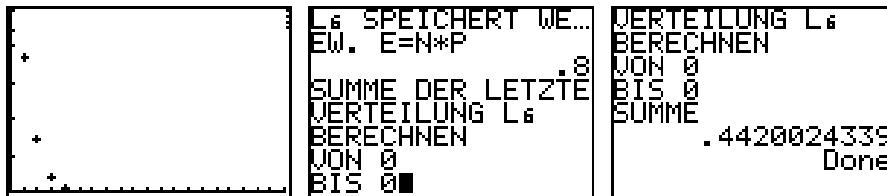
BINOMIALVERTEILU
ANZ. VERS. N 20
WAHRSCHT. P .04

```

```

KOMPLETT
Z:SUMMENBILDUNG

```



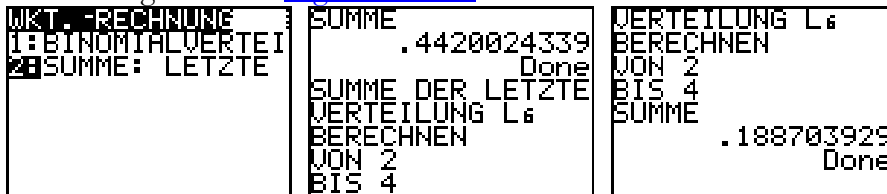
Wahrscheinlichkeit P(A): $P(A) \approx 0,4420 \approx B_{20;0,04}(0)$

Die Werte der Binomialverteilung werden in L6 gespeichert (STAT-Menü + Edit)

L4	L5	L6
-----	0	.4420024339
	1	.36834
	2	.1458
	3	.03645
	4	.00645
	5	8,6E-4
	6	9E-5

L6(1) = .44200243...

Fortsetzung mit GTR [PrgmWahrsche](#):



Wahrscheinlichkeit P(B): $P(B) \approx 0,1887 \approx B_{20;0,04}(2 \leq X \leq 4)$

- b) Erkennen der falschen Aussagen: (1) und (2)

Begründung für Aussage (1): Es wird die 100%-ige Eintrittswahrscheinlichkeit der Aussage unterstellt, welche natürlich nicht gegeben ist.

Begründung für Aussage (2): Der Erwartungswert beträgt bei den vorgegebenen Parametern zwar 8, aber das heißt, dass im Durchschnitt 8 Ausschussrollen zu erwarten sind (nicht mindestens 8).

- c) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $p_{F1} = 0,025$

Tritt kein Fehler auf folgt: $1 - p_A = (1 - p_{F1})(1 - p_{F2})$ und $p_{F2} = 1 - (1 - 0,04)/(1 - 0,025)$

Wahrscheinlichkeit P(F2): $P(F2) \approx 0,0154$

- d) Aussage zur Zusammensetzung der Urne(n) bzw. der Menge der verwendeten Zufallszahlen

Beispiel 1: Das Experiment besteht aus 4 Urnen. Urne 1 enthält nur 3 unterschiedliche Kugeln, auf denen die Auslieferstandorte vermerkt sind. Die Urnen 2 bis 4 enthalten Kugeln, die die einzelnen Standorte repräsentieren. So sind zum Beispiel in Urne 2 eine schwarze und vier weiße Kugeln unterzubringen (schwarz für unpünktlich, weiß für pünktlich). Entsprechende Verhältnisse für die weiteren Urnen: 3 – Leipzig – 1 schwarz, 3 weiß; 4 – Auerbach – 1 schwarz, 9 weiß. Es wird erst aus Urne 1 gezogen. Die gezogene Kugel legt fest aus welcher der weiteren Urnen gezogen werden soll.

Beispiel 2: Das Experiment besteht aus einer großen Urne mit insgesamt 60 Kugeln. Es gibt 3 Grundfarben: rot – Dresden, grün – Leipzig, blau – Auerbach und von diesen Grundfarben jeweils helle und dunkle Kugeln (hell – pünktlich, dunkel – unpünktlich). Aus der Tabelle ist die Verteilung der Kugeln zu entnehmen.

Ort	dunkel	hell	Summe
Rot	4	16	20
Grün	5	15	20
Blau	2	18	20
Σ	11	49	

Aussage zur relativen Häufigkeit und zum Schließen auf die Wahrscheinlichkeit

$p_{\text{unpünktlich}} = 11/60$ (siehe Tabelle aus Beispiel 2)

Wahrscheinlichkeit für unpünktliche Lieferung: $p \approx 0,1833$

Ansatz für Wahrscheinlichkeit: wie in der Tabelle zu sehen ist, kommen 2 von 60 Lieferungen und

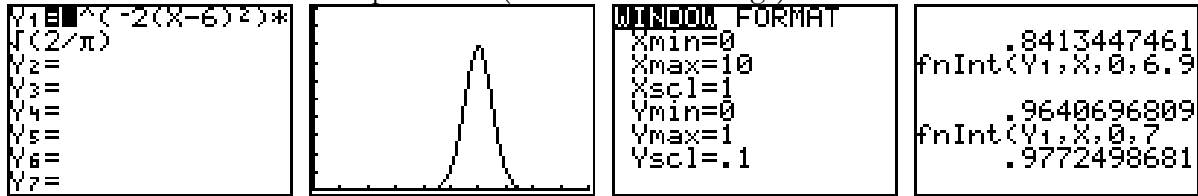
2 von 11 unpünktlichen Lieferungen aus Auerbach.

Wahrscheinlichkeit, dass eine unpünktliche Lieferung aus Auerbach stammt: $p \approx 0,1819$ ↑⁹

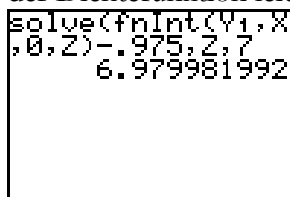
e) $\mu = 6, \sigma = 0,5$; Verteilungsfunktion Normalverteilung $P(Z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$

Ansatz für Zahl c: $P(Z > c) \leq 0,025 \Rightarrow P(Z \leq c) > 0,975 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^Z e^{-2(x-6)^2} dx > 0,975$

Variante I – GTR: durch Ausprobieren (siehe Bild 4 der Folge)



Zu beachten ist, dass als linke Grenze statt $-\infty$ Null eingetragen wurde. Das ist mit dem Graphen der Dichtefunktion leicht zu erklären: die Fläche von $-\infty$ bis 0 beträgt fast 0.



Variante II – GTR: Einsatz der solve-Funktion im Zusammenhang mit der fnInt-Funktion, lässt ein direktes Umsetzen des Ansatzes zu. Die Berechnung ist relativ langwierig – also nicht die Geduld verlieren.

Variante III: aus dem Ansatz ergibt sich $\Phi(1,96) = 0,975$ und $Z_{0,1} \leq c_{0,1} = 1,96$. Mit $c_{0,1} = (c_{\mu,\sigma} - \mu) / \sigma \Rightarrow c_{\mu,\sigma} = 6,98$ und mit der erforderlichen Toleranz von 0,1

Zahl c: $c = 7,0$ mm

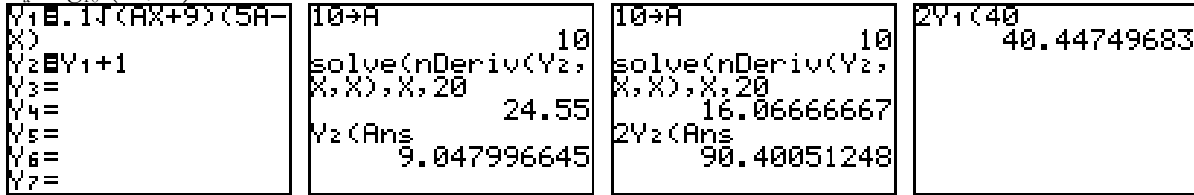
Teil D: Wahlaufgaben

Aufgabe D 1

- a) Ansatz für Volumen des Bodens: $V_B := A_G \cdot h = \pi g_a^2(0) \cdot 1$
 Volumen des Bodens: $V_B = \pi (3/2 a + 1)^2 \text{ cm}^3$

⁹ Die falsche Rundung entstammt dem Erwartungsbild, dass zur Bewertung durch die Fachlehrer ausgegeben wurde. Ihnen sollte so etwas nicht passieren.

- b) GTR: $Y1 = .1\sqrt{(AX+9)(5A-X)}$, $Y2 = Y1 + 1$, $10 \rightarrow A$ und $\text{solve}(nDeriv(Y2, X, X), X, 20) \rightarrow 24,55$;
 $d_a = g_{10}(24,55)$



maximaler Außendurchmesser d_a : $d_a \approx 90,4$ cm:

Durchmesser der Öffnung d_o : $d_o \approx 40,4$ cm

Ansatz für Wert a: $f_a(4a) = 13$

GTR: $\text{solve}(Y1(4A) - 13, A, 10) \rightarrow 7,9928$

Wert a: $a \approx 8$

- c) $m = \rho \cdot V_{\text{ges}}$; $V_{\text{ges}} = V_B + V_{\text{außen}} - V_{\text{innen}}$; $V_{\text{Rotationskörper}} = \pi \cdot \int_b^a f^2(x) dx$

$V_{\text{innen}} = \pi \cdot \int_0^{40} f_{10}^2(x) dx$ mit GTR: $\pi \text{fnInt}(Y1^2, X, 0, 40) \rightarrow 180062,5764$

$V_{\text{außen}} = \pi \cdot \int_0^{40} g_{10}^2(x) dx$ mit GTR: $\pi \text{fnInt}(Y2^2, X, 0, 40) \rightarrow 170860,7525$

Ansatz für Volumen des „Mantels“

Volumen des „Mantels“

Gesamtvolumen: $V_{\text{ges}} = 10006$

$m_{\text{ges}} = 25015$ g

Masse m: $m \approx 25$ kg¹⁰

- d) Ansatz für Volumen: $100 \text{ dm}^3 = 10^5 \text{ cm}^3 = \pi \cdot \int_0^{4a} f_a^2(x) dx$

Umformung

Stammfunktion

Ansatz für Wert a – Lösung mit GTR: $\text{solve}(\text{fnInt}(Y1^2, X, 0, 4A) - 100000, A, 10) \rightarrow 8,9539$

Variante II: Volumenfunktion vereinfacht: $\pi a^3 \cdot (38a^2 + 279) / 75$ und weiter mit GTR

Wert a: $a \approx 8,95$

Aufgabe D 2

- a) $F_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $F_{2,k}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ -10 \\ k \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -7,5 \\ k/2 \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbf{R}$; $k \in \mathbf{N}$ und $0 \leq k \leq 20$)

Ansatz für Nachweis: $SP_{12} = F_1 \cap F_{2,12}$

Nachweis

Variante I: Die Lösung des Gleichungssystems $\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -7,5 \\ 6 \end{pmatrix}$ wird nicht

bewertet. (Wie bereits an der erreichbaren BE-Anzahl von 2 zu erkennen ist.)

Variante II – GTR [PrgmGeometri](#) | Abstände: $SP_{12} = (20 \mid -5 \mid 8)$

- b) Ansatz für Untersuchung: $d^2(k) := 15^2 + (-2,5)^2 + k^2/4 \leq 18^2 \Rightarrow k \leq 19,26$
 Schlussfolgerung: Im Fall $k = 20$ kann das Flugzeug nicht gesehen werden.

- c) Ansatz für Abstand windschiefer Geraden:

Finden von zwei parallelen Ebenen (Normalenform), die die beiden Geraden enthalten.

¹⁰ In den Hinweisen zur Bewertung durch die Fachlehrer ist der Wert offensichtlich sehr stark gerundet. Damit soll wahrscheinlich Raum für „Ermitteln Sie ...“ geschaffen werden.

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \\ -7,5 \\ k/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ -15 \end{pmatrix}$

normierter Normalenvektor: $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2k^2 + 225}} \begin{pmatrix} k \\ k \\ -15 \end{pmatrix}$

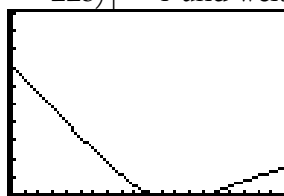
$F_1 \subset E_1: \begin{pmatrix} k \\ k \\ -15 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} \right) = 0$

Abstand in Abhängigkeit von k: $d(k) = \frac{1}{\sqrt{2k^2 + 225}} \begin{pmatrix} k \\ k \\ -15 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 30 \\ -10 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$

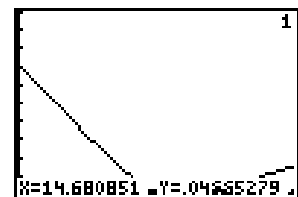
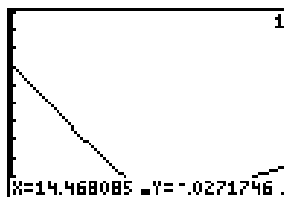
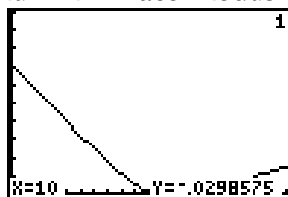
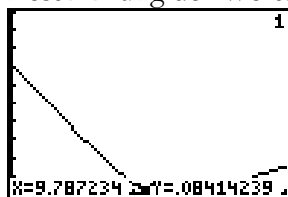
Ansatz für Werte k: $|d(k)| = |10 \cdot (k - 12) / \sqrt{2 \cdot k^2 + 225}| < 1$ und weiter mit GTR

```
Y1=bs(10*(X-12)
sqrt(2*X^2+225))-1
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
```

```
WINDOW FORMAT
Xmin=0
Xmax=20
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=10
Yscl=1
```

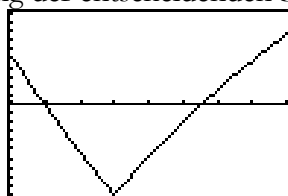


Bestimmung der Werte für k im Trace-Modus:



oder durch Vergrößerung der entscheidenden Stellen im Graphen:

```
WINDOW FORMAT
Xmin=9
Xmax=17
Xscl=1
Ymin=-1
Ymax=1
Yscl=.1
```



oder rechnerisches Lösen der Ungleichung $|10 \cdot (k - 12)| < \sqrt{2 \cdot k^2 + 225}$ führt zu

i) für $k < 12$ gilt $10 \cdot (12 - k) < \sqrt{2 \cdot k^2 + 225} \Rightarrow 100 \cdot (12 - k)^2 < 2 \cdot k^2 + 225$

ii) sonst gilt $10 \cdot (k - 12) < \sqrt{2 \cdot k^2 + 225} \Rightarrow 100 \cdot (k - 12)^2 < 2 \cdot k^2 + 225$ und Lösung der Ungleichungen¹¹

Werte k: $k \in \{10; 11; 12; 13; 14\}$

- d) Der Abstand zur Luftraumgrenze ist in der x-y-Ebene zu erkennen, d. h. es reicht, mit $P(0 | 15)$ und $Q(2 | 13)$ zu rechnen. Trotzdem ist die Lösung im Dreidimensionalen nicht viel schwerer. Gleichung der Ebene der Grenze des Luftraumes oder der Spurgeraden

Variante I – von der Ebene ausgehend: $E_G: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -33 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

¹¹ Die Angabe der Rechenschritte scheint mir nicht unbedingt notwendig zu sein. Aus Zeitgründen würde ich mit für die GTR- Variante entscheiden.

Der normierter Normalenvektor $\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ führt zu einem Punkt auf der Grenze

$$\vec{OI} = \begin{pmatrix} 0 \\ -33 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \frac{10}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und nach Passieren der Ebene } E_B: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \frac{10}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 0 \text{ muss sich}$$

die Crew spätestens anmelden. Die Umwandlung zur Koordinatenform bietet sich an: $x + 2y \pm 10\sqrt{5} + 66 = 0$. Damit sind wir wieder auf der x-y-Ebene. Hätten wir gleich im Zweidimensionalen gerechnet, wären wir auf nichts Anderes gekommen.

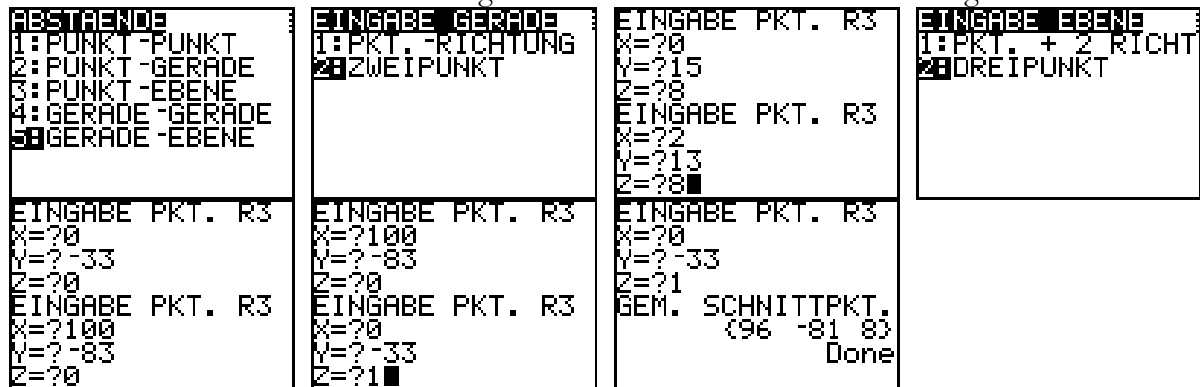
Ansatz für Abstand 10: Gesucht ist nun der Schnittpunkt der beiden Geraden zugehörige Gleichungen: $g_{\text{Grenze}}: x + 2y \pm 10\sqrt{5} + 66 = 0$ und $g_{F1}: y = 15 - x$

Günstigerweise ist die Flughöhe von Flugzeug F1 immer 8 LE.

Variante II – von der Geradengleichung F1 ausgehend:

Der Schnittpunkt SP der Geraden F1 mit Ebene $E_G: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -33 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 0$ kann leicht mit GTR

bestimmt werden. Dazu muss allerdings noch ein Punkt auf der Grenzebene gefunden werden.



Nun wird derjenige Punkt gesucht, der P näher ist und der von SP (96, -81, 8) den Abstand 10 hat. Dazu wird der Richtungsvektor aus g_{F1} so normiert, das er senkrecht zur Grenzebene betrachtet genau 1 LE beträgt. Daraus ergibt sich die Gleichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 96 \\ -81 \\ 8 \end{pmatrix} + 10\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ denn die Richtung ist nun klar (von Q nach P).}$$

Entscheidung für eine der beiden Lösungen
 Koordinaten des Punktes S: S(73,64; -58,64; 8,00)