Sächsisches Staatsministerium
für Kultus

Schuljahr **2000/01**

Geltungsbereich:
- Allgemein bildendes Gymnasium
- Abendgymnasium und Kolleg
- Schulfremde Prüfungsteilnehmer

Schriftliche Abiturprüfung
Grundkursfach Mathematik

- Ersttermin -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **240 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A**, **B** und **C** sowie dem **Wahlteil D**.
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Insbesondere müssen an den entsprechenden Stellen in der Lösungsdarstellung die gegebenenfalls verwendeten GTR-Programme genannt werden.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	25 BE,
im Teil B	15 BE,
im Teil C	10 BE,
im Teil D	10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:
1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierb. Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System (GTR)
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = e^x \cdot (2 - 0{,}5x) \quad (x \in R)$.

a) Geben Sie die Nullstelle der Funktion f und die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen mit der y-Achse an.
Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen der Funktion f und geben Sie die Art des Extremums an.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph der Funktion f genau einen Wendepunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

b) Gegeben ist die Funktion F durch $y = F(x) = e^x \cdot (2{,}5 - 0{,}5x) \quad (x \in R)$.
Weisen Sie nach, dass die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist.
Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion der Funktion f, deren Graph den Graphen der Funktion f auf der y-Achse schneidet.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Im Punkt R(0; f(0)) wird die Tangente t an den Graphen der Funktion f gelegt.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente.
Der Graph der Funktion f und die Gerade t begrenzen eine Fläche vollständig.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Für jedes $u\,(u \in R,\ 0 < u < 4)$ existiert ein Punkt $C_u(u; f(u))$.
Die Punkte $A(-1; 0)$, $B(4; 0)$ und C_u sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C_u so, dass der Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks maximal wird.
Geben Sie diesen maximalen Flächeninhalt an.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

e) Die Gerade g mit der Gleichung $y = g(x) = 1{,}5x + 2$ berührt im Punkt R(0; f(0)) den Graph der Funktion f. Sie berührt in diesem Punkt gleichzeitig einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf dem positiven Teil der x-Achse liegt.
Bestimmen Sie den Radius des Kreises.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(2; 1; 0), B(10; -1; 0) und C(11; 3; 0) gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC rechtwinklig, aber nicht gleichschenklig ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
Ermitteln Sie eine Gleichung des in der x-y-Ebene liegenden Umkreises dieses Dreiecks.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

b) Es gibt Punkte P_i ($i \in N$), so dass A, P_i und C Eckpunkte eines in der x-y-Ebene liegenden rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $\overline{AC}$ sind.
Wie viele solcher Punkte kann es geben? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
Geben Sie die Koordinaten eines solchen Punktes an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Es existiert genau ein Punkt D, so dass das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

d) Der Punkt S(11; 3; 8) ist die Spitze der Pyramide ABCS. Die zur x-y-Ebene parallele Ebene durch den Mittelpunkt $M_{\overline{AS}}$ der Strecke $\overline{AS}$ zerlegt die Pyramide ABCS in einen Pyramidenstumpf und eine Restpyramide.
Berechnen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil C: Stochastik

Jeder der sechs Buchstaben des Wortes „ABITUR“ ist auf genau einen von sechs geichartigen Tischtennisbällen geschrieben, die in einer Lostrommel liegen. Vor jeder Ziehung aus der Trommel wird gut gemischt. Der auf dem jeweiligen gezogenen Tischtennisball befindliche Buchstabe wird notiert, so dass mehrere Ziehungen dann „Wörter“ ergeben.

Betrachtet werden zunächst das dreimalige Ziehen aus dieser Lostrommel und die folgenden daraus resultierenden Ereignisse:

Ereignis E_1: Das Wort „ABI“ entsteht, d.h., die Buchstaben A, B und I werden in dieser Reihenfolge gezogen.

Ereignis E_2: Das entstandene „Wort“ besteht aus drei gleichen Buchstaben.

a) Der gezogene Ball werde nach jeder Ziehung in die Lostrommel zurückgelegt.
Ermitteln Sie für die Ereignisse E_1 und E_2 jeweils die Wahrscheinlichkeit.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Der gezogene Ball werde nicht in die Lostrommel zurückgelegt.
Ermitteln Sie für die Ereignisse E_1 und E_2 jeweils die Wahrscheinlichkeit.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Im Folgenden wird der Zufallsversuch „18faches Ziehen aus der beschriebenen Lostrommel mit Zurücklegen“ betrachtet.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens so viele Bälle mit dem Buchstaben A gezogen werden, wie zu erwarten sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Wort entsteht, welches mit 4 Buchstaben A beginnt und an dessen restlichen 14 Stellen je ein von A verschiedener Buchstabe steht.

Erläutern Sie, wie Sie diese Wahrscheinlichkeit nutzen können, um die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses E_3 zu ermitteln.

Ereignis E_3: Das entstandene Wort enthält genau viermal den Buchstaben A.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

e) Als Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein entstandenes „Wort“ höchstens 17-mal den Buchstaben A enthält, zeigt ein Taschenrechner den Wert 1 an. Katharina schlussfolgert daraus, dass das Ereignis das sichere Ereignis dieses Zufallsversuches sei.
Werten Sie die Schlussfolgerung Katharinas.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Gegeben sind Funktionen f_t durch $y = f_t(x) = \frac{x-4}{x} - 2x + t$ $(t \in R,\ x \in D_{f_t})$.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gleichung der Funktion f_8 in der Form

$y = f_8(x) = \frac{-2x^2 + 9x - 4}{x}$ $\left(x \in D_{f_8}\right)$ geschrieben werden kann.

Geben Sie für die Funktion f_8 den Definitionsbereich sowie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion F_8 der Funktion f_8, für die gilt $F_8(1) = 0$.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Jede Funktion f_t besitzt genau ein lokales Maximum.

Geben Sie die Koordinaten des lokalen Maximumpunktes in Abhängigkeit von t an.

Zeigen Sie, dass die erste Ableitung $f_t'(x)$ von t unabhängig ist, und deuten Sie den Sachverhalt geometrisch.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Ermitteln Sie alle reellen Zahlen p und q, für die die quadratische Funktion g mit der Gleichung $y = g(x) = x^2 + px + q$ an den Stellen $x_1 = 0{,}5$ und $x_2 = 4$ die gleichen Funktionswerte wie die Funktion f_8 hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(0; 0; 1), B(4; 3; 9) und C(0; 0; 9) gegeben. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Zentimeter. Bei Rotation des Dreiecks ABC um die z-Achse entsteht ein gerader Kreiskegel.

a) Begründen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
Berechnen Sie das Volumen des Kreiskegels.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Die y-z-Ebene ist eine Symmetrieebene des Kreiskegels. In dieser Ebene gibt es Geraden, die den auf dem Mantel des Kreiskegels liegenden Punkt P(0; 2,5; 5) enthalten und die teilweise im Inneren des Kreiskegels verlaufen.
Zeigen Sie zeichnerisch, dass eine solche Gerade existiert, bei der die Länge der im Inneren verlaufenden Strecke minimal wird.
Geben Sie den Messwert für die Länge dieser Strecke an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Punkt $Q\left(\frac{9}{8}; \frac{3}{2}; 4\right)$ auf der Mantelfläche des Kreiskegels liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3