

Helmut König

## Zum Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen in mathematischen Arbeitsgemeinschaften für die Klassenstufen 3 und 4

### Vorbemerkungen

Das „Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler“ (BKC) wurde 1991 gegründet. Wir haben uns neben dem Aufbau der Begabtenförderung an Gymnasien zunächst mit der Überarbeitung des von 1972 an entwickelten Materials zur außerunterrichtlichen Förderung von Schülern aus den Klassenstufen 5 bis 10 befasst, die 1997 abgeschlossen war. Das Ziel dieser Förderung besteht vor allem im Entwickeln der *Fähigkeit zum problemlösenden Denken* durch Vermitteln *heuristischer Vorgehensweisen*.

Da u.E. das Finden und effektive Fördern mathematisch begabter Kinder in der Grundschule beginnen muss, haben wir anschließend analoges Material für die Klassenstufen 3 und 4 entwickelt, wobei uns in der außerunterrichtlichen Förderung erfahrene Grundschullehrerinnen unterstützt haben.

Dieses Material (vgl. etwa KÖNIG [1] und KÖNIG/PÖRNIG [1]) wird in unserer Homepage [www.bezirkskomitee.de](http://www.bezirkskomitee.de) zum Kauf angeboten.

### 1. Einige Bemerkungen zur Heuristik

Hinsichtlich der Heuristik teilen wir voll die Ansichten von GEORG POLYA, die dieser erstmals in dem 1948 erschienenen Werk POLYA [1] geäußert und dann in POLYA [2] weiter entwickelt hat. Für didaktisch besonders wertvoll halten wir seinen Entschluss, auf das Definieren von heuristischen Vorgehensweisen zu verzichten und diese stattdessen durch *Fragen* und *Impulse* zu charakterisieren.

Für heuristische Vorgehensweisen ist charakteristisch, dass sie *vom konkreten Inhalt* der zu lösenden problemhaften Aufgabe *unabhängig* sind und dass sie den Aufgabenlöser zum Aufbau von Suchräumen für effektive Lösungsvarianten bei *beliebigen* Aufgaben befähigen sollen. Sie können einen Lösungserfolg nicht garantieren, sondern sie erhöhen lediglich die Wahrscheinlichkeit, eine Lösung zu finden.

Es gibt auch kritische Stimmen, die befürchten, dass durch das Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen die Entwicklung der Kreativität der Schüler beeinträchtigt werden kann. Wir sind überzeugt, dass dies bei entsprechendem didaktischem Vorgehen nicht eintritt. Natürlich sind vor allem hochbegabte Schüler in der Lage, beim selbständigen Lösen problemhafter Aufgaben heuristische Vorgehensweisen selbst zu entdecken, und man sollte ihnen hierfür auch ausgiebig Gelegenheit geben. Es wäre jedoch sehr ineffektiv, sich hierauf zu beschränken. Unterschiede in Hinsicht auf Leistungsfähigkeit und Begabung der Schüler müssen durch unterschiedliche Vermittlung heuristischer Vorgehensweisen berücksichtigt werden. Zweifellos lassen sich fehlende Intuition oder mangelnde geistige Beweglichkeit durch den Einsatz heuristischer Vorgehensweisen teilweise kompensieren.

In KÖNIG [1] wird versucht, die Ideen von POLYA für die außerunterrichtliche Förderung von Schülern aus den Klassenstufen 5 bis 10 anzuwenden. Dabei gehen wir von folgenden **Grundannahmen** aus:

- (1) Es gibt allgemeine heuristische Vorgehensweisen, deren Anwendung die Wahrscheinlichkeit, bei einer *beliebigen* problemhaften mathematischen Aufgabe zu einer Lösung zu gelangen, stark erhöht.
- (2) Solche Vorgehensweisen lassen sich in Form von Fragen oder Impulsen festhalten und auf diese Weise auch weitervermitteln. Dabei handelt es sich nicht um Impulsfolgen, sondern vielmehr um „*Impulsblöcke*“, bei denen die Auswahl und die Reihenfolge der Impulse nicht fest vorgeschrieben sind.
- (3) Es ist möglich, diese Impulse so zu formulieren, dass die *Gemeinsamkeiten* des Vorgehens beim Suchen nach der Lösung von inhaltlich sehr unterschiedlichen Aufgaben für den Aufgabenlöser deutlich sichtbar werden.
- (4) Es ist möglich, aus solchen Impulsblöcken „Regelsysteme“ zusammenzustellen, die eine Orientierung für das Vorgehen beim Lösen von Aufgaben einer klar abgegrenzten Aufgabenklasse geben. Darüber hinaus ist es möglich, Hierarchien solcher Regelsysteme zu schaffen, so dass ein „*allgemeines Regelsystem*“ mehrere „*spezielle Regelsysteme*“ umfasst.
- (5) Eine besonders effektive Möglichkeit, das Lösen problemhafter Aufgaben zu lehren, besteht im *bewussten* Vermitteln solcher heuristischer Vorgehensweisen als *Verfahrenkenntnis*. Dabei ist dies nicht durch theoretische Belehrungen, sondern stets nur im Prozess der Tätigkeit, d.h. beim Aufgabenlösen zu erreichen.

Wir sind überzeugt, dass man bereits in der Grundschule den Schülern *heuristische Vorgehensweisen* vermitteln kann.

Zunächst haben wir sehr zahlreiche problemhafte Aufgaben für mathematische Arbeitsgemeinschaften in den Klassenstufen 3 und 4 in Hinblick auf ihre „*heuristischen Potenzen*“ analysiert um festzustellen, welche heuristischen Vorgehensweisen man mit ihrer Hilfe bereits an der Grundschule vermitteln kann.

Dann wurde für jede dieser Vorgehensweisen eine (dem Schwierigkeitsgrad nach geordnete) Folge von Aufgaben ausgewählt. Dabei gab es natürlich viele Aufgaben, die mehreren heuristischen Vorgehensweisen zugeordnet werden konnten.

Aus diesen insgesamt 112 Aufgaben haben wir schließlich als *Beilage* zu KÖNIG/PÖRNIG [1] „*16 Aufgabenblätter*“ für die Hand des Lehrers zusammengestellt. In diesem Heftchen werden auch 11 Vorgehensweisen mit der zugehörigen Aufgabenfolge festgehalten, wobei wir zwischen *heuristischen Hilfsmitteln* (1. bis 3.), *heuristischen Strategien* (4. bis 7.) und *heuristischen Prinzipien* (8. bis 11.) unterscheiden. Es handelt sich um folgende Vorgehensweisen:

1. Einführen von zweckmäßigen **Bezeichnungen**; Verwenden von **Variablen** (17 Aufgaben)
2. Verwenden von **Tabellen** (17 Aufgaben)
3. Verwenden von **Skizzen** und **Mengendiagrammen** (6 Aufgaben)
4. **Systematisches Probieren**; systematisches Ermitteln aller möglichen Fälle; Einsatz von **Ordnungsprinzipien** (z.B. lexikografisches Ordnen) (30 Aufgaben)
5. **Vorwärtsarbeiten**; **Folgern** aus gegebenen Bedingungen (39 Aufgaben)
6. **Rückwärtsarbeiten** (1 Aufgabe)
7. „**Von rückwärts her rechnen**“ (3 Aufgaben)
8. Das Entdecken (Vermuten) von **Gesetzmäßigkeiten** (12 Aufgaben)
9. Zurückführen auf **Hilfsaufgaben** (5 Aufgaben)
10. **Umformulieren** von Aufgaben (Problemtransformation) (3 Aufgaben)
11. Ausnützen von **Analogien** (4 Aufgaben)

## 2. Zum Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen

Es wurde bereits hervorgehoben, dass beim Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen auf keinen Fall die Entwicklung der Kreativität der Schüler behindert werden darf. Dies lässt sich durch ein angemessenes didaktisches Vorgehen stets erreichen.

Es war mir möglich, von 1962 bis 1996 im Mathematikzentrum der Stadt Chemnitz regelmäßig als Zirkelleiter von überschulischen Arbeitsgemeinschaften in den Klassenstufen 5 bis 10 tätig zu sein. Von 1972 an habe ich zusätzlich im Rahmen der wahlobligatorischen Ausbildung an der jetzigen TU Chemnitz Mathematiklehrerstudenten beim Halten solcher Zirkel betreut. Daher weiß ich aus Erfahrung, dass ab Klassenstufe 5 folgende unter 1. bis 9. angegebenen **didaktischen Regeln** anwendbar sind, ich weiß aber auch, dass man in Arbeitsgemeinschaften der Klasse 5 Zeit und Geduld braucht, um die Schüler an dieses Vorgehen zu gewöhnen. Ob dies - u.U. in modifizierter Form - auch in den Klassenstufen 3 und 4 möglich ist, muss noch erprobt werden. Der Vorschlag, Arbeitsblätter zu verwenden, gilt nur für die Grundschule. Die Regeln lauten:

1. Kein Schüler darf unterfordert werden. Für die leistungsstarken Schüler müssen stets *Zusatzaufgaben* bereit gehalten werden.
2. Es ist abzusichern, dass jeder Schüler die zu lösende problemhafte *Aufgabe voll verstanden* hat. Dies erfordert „Stichproben“ bei den leistungsschwächeren Schülern.
3. Man beginne niemals mit einem Unterrichtsgespräch sondern *stets* mit *selbständiger Stillarbeit*. Wer eine Lösung gefunden zu haben glaubt, hat sich zu melden und bekommt eine *Zusatzaufgabe*.
4. Wenn das Resultat der zu lösenden Aufgabe nicht auch den Lösungsweg verrät, dann darf der Schüler sein Resultat als „*Angebot*“ nennen; es wird vom Lehrer kommentarlos an der Tafel festgehalten. Der nächste Schüler kann sich diesem Angebot anschließen oder ein „*Gegenangebot*“ machen, das ebenfalls an der Tafel festgehalten wird. Welches der unterschiedlichen Angebote die richtige Lösung der Aufgabe ist, wird nicht vom Lehrer sondern von den Schülern entschieden.
5. Wenn eine Aufgabe von den meisten Schülern selbständig gelöst werden konnte, dann ist sie für das Vermitteln einer heuristischen Vorgehensweise ungeeignet. In einem solchen Fall werden nur Fragen der *Lösungsdarstellung* besprochen, und man wird anschließend eine schwierigere Aufgabe desselben Typs stellen.
6. Nach angemessener Zeit beginnt die *Phase der gemeinsamen Auswertung* in Form einer vom Lehrer geleiteten Diskussion. Wer einen *Lösungsweg* kennt, darf ihn *nicht verraten*. Er darf lediglich Fragen stellen, Impulse geben oder auf Fragen des Lehrers antworten.
7. Der Lehrer soll eine „*Impulstechnik*“ anwenden, die absichert, dass die Schüler in ihrer Denktätigkeit nicht gegängelt werden und dass möglichst alle Schüler an der Lösungsfindung beteiligt sind. Man beginne stets mit einem vom konkreten Inhalt der Aufgabe unabhängigen „*Hauptimpuls*“, der im Bedarfsfall durch „*Unterimpulse*“ ergänzt wird. Die Hauptimpulse sollen von den Schülern übernommen und verinnerlicht werden. Sie dienen dem Steuern der geistigen Handlungen beim Suchen nach einem Lösungsweg.
8. Beim Suchen nach einem Lösungsweg soll der Schüler stets „*Schmierpapier*“ verwenden. Was in der „*Reinschrift*“ festgehalten wird, entscheidet der Lehrer. Hierfür sind *Arbeitsblätter* geeignet, die auch die Aufgabenstellungen enthalten.
9. Die verwendeten *Arbeitsblätter* sollten in der Regel nicht zu Beginn des Zirkels sondern erst in den *Phasen der Auswertung* ausgegeben werden.

Außer der bereits erwähnten Beilage „*16 Aufgabenblätter*“ zur Anleitung für AG-Leiter KÖNIG/PÖRNIG [1] wurde noch eine zweite Beilage „*Das Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen*“ erarbeitet, in der anhand von 20 Aufgaben aus „*16 Aufgabenblätter*“ das geschilder-

te Vorgehen, vor allem die „*Impulstechnik*“, erläutert wird. Einige dieser **Beispiele für das Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen** sollen nun vorgestellt werden. Dabei weist z.B. „*Aufgabe 1) [1.4]*“ darauf hin, dass es sich um die 4. Aufgabe des 1. Aufgabenblatts handelt.

Erfahrungsgemäß bevorzugen viele Grundschüler beim Lösen problemhafter Aufgaben das (meist unsystematische) *Probieren* vor dem *Folgern*. Daher ist es wichtig, dass sie zum **systematischen Probieren** befähigt werden. Hierbei können folgende *Impulse* nützlich sein:

- Ermittle systematisch alle möglichen Fälle!
- Nach welchem Ordnungsprinzip (der Größe nach, lexikographisch u.ä.) willst du vorgehen, um mit Sicherheit alle möglichen Fälle zu erfassen?
  - Bei schwierigen Aufgaben kann es wichtig sein, zwei verschiedene Ordnungsprinzipien in günstig gewählter Reihenfolge zu verwenden.

Natürlich wird man den Schülern nicht verraten, welches Vorgehen (systematisches Probieren oder Folgern) am günstigsten zum Ziel führt, sondern dies erst in der Phase der Auswertung feststellen lassen.

Bei den Aufgaben 1), 2) und 3) erweisen sich auch **Tabellen** als ein nützlich Hilfsmittel.

*Aufgabe 1) [1.4]* [siehe auch Arbeitsblatt 1, Aufgabe 4)]

Schreibe alle Möglichkeiten auf, wie du einen 10 €- Schein wechseln kannst.

Es stehen dazu ausreichend viele 5 €- Scheine, 2 € und 1 €-Stücke zur Verfügung.

Du brauchst nicht immer alle Sorten von Münzen/Scheinen zu verwenden.

Trage die gefundenen Möglichkeiten in eine Tabelle ein.

Die Spalteneingänge sollte man vorgeben, nicht aber die Anzahl der benötigten Zeilen. Nur wenn einige Schüler (durch unsystematisches Probieren) nicht alle **10 Lösungen** gefunden haben, sollte man ihnen durch heuristische *Impulse* helfen.

- *Welches Ordnungsprinzip willst du verwenden?*

[Der Größe nach, von „groß“ zu „klein“]

*Lösung:*

	5 €	2 €	1 €		5 €	2 €	1 €
	2	0	0		0	4	2
	1	2	1		0	3	4
	1	1	3		0	2	6
	1	0	5		0	1	8
	0	5	0		0	0	10

*Aufgabe 2) [3.4]* [siehe auch Arbeitsblatt 3, Aufgabe 3)]

Karsten behauptet, dass man einen Preis von 10 Cent mit 8 verschiedenen Zusammenstellungen von Münzen bezahlen kann. Uta behauptet, es ginge nur auf 6 Arten, während Peter sogar 11 Möglichkeiten kennen will.

Wer hat hier Recht?

Nur wenn viele Schüler nicht von sich aus eine *Tabelle* benutzen, sollte man helfen:

- *Welches Hilfsmittel könnte hier nützlich sein?*

In der Phase der Auswertung sollte man feststellen, welche Schüler bemerkt haben, dass die Aufgabe 1) mit Ausnahme der Einkleidung fast identisch mit der Aufgabe 2) ist. Wählt man „Cent“ anstelle von „€“, dann erhält man die oben angegebenen 10 Lösungen und muss nur noch beachten, dass die 10 Cent - Münze selbst auch eine Lösung ist und es daher **11 Lösungen** gibt. Dies sollte in der Phase der Auswertung hervorgehoben werden:

- *Kennst du eine analoge („ähnliche“) Aufgabe, die du bereits gelöst hast?*  
*Wenn ja, dann gehe bei der Suche nach einem Lösungsweg analog vor!*

*Aufgabe 3) [12.4] [siehe auch Arbeitsblatt 12, Aufgabe 3)]*

Ein Vater gibt seinem Sohn für jede gelöste Aufgabe 10 Cent in die Sparbüchse. Für jede falsch gelöste Aufgabe muss der Sohn 5 Cent zurückzahlen. Nach dem Lösen von 20 Aufgaben bleiben dem Sohn 80 Cent.

Wie viele Aufgaben löste der Sohn richtig, wie viele fehlerhaft?

In der *Phase der Auswertung* wird man hervorheben, dass hier das *systematische Probieren* zum Ziel führt, die *Tabelle* ein günstiges Hilfsmittel ist und dass folgende *Impulse* hilfreich sein können:

- Rate: Welche Anzahl kommt der gesuchten Anzahl der richtig gelösten Aufgaben möglichst nahe? [z.B. die Hälfte 10 der 20 Aufgaben].
- Überprüfe, ob diese Anzahl die gestellte Bedingung erfüllt. [Nein, sie ist zu klein]
- Überprüfe der Reihe nach die nächst größeren oder kleineren Anzahlen, bis du die gesuchte Anzahl gefunden hast.

Nebenstehende Tabelle hält die Lösung fest.

Dabei ist die Angabe der letzten Zeile wichtig, um nachzuweisen, dass die gefundene Lösung die einzige Lösung ist.

Anzahl „richtig“	Anzahl „falsch“	erhaltenes Geld (in Cent)
10	10	$100 - 50 = 50 < 80$
11	9	$110 - 45 = 65 < 80$
<b>12</b>	<b>8</b>	$120 - 40 = \mathbf{80}$
13	7	$130 - 35 = 95 > 80$

Die folgenden Aufgaben lassen sich durch *Vorwärtsarbeiten (Folgern)* lösen.

Bei den Aufgaben 4) und 5) lässt sich zusätzlich das „*Einführen zweckmäßiger Bezeichnungen*“ demonstrieren.

Bei den Aufgaben 6), 7) und 8) lassen sich *Tabellen* beim Lösen von *Sachaufgaben* bzw. *Zuordnungsaufgaben* einsetzen.

*Aufgabe 4) [3.5] [siehe auch Arbeitsblatt 3, Aufgabe 4)]*

Vier Mädchen sollen sich in einer Sportgruppe der Größe nach aufstellen. Es ist bekannt:

- (a) Anne ist kleiner als Britta.
- (b) Doris ist kleiner als Christa.
- (c) Britta ist kleiner als Doris.
- (d) Christa ist größer als Anne.

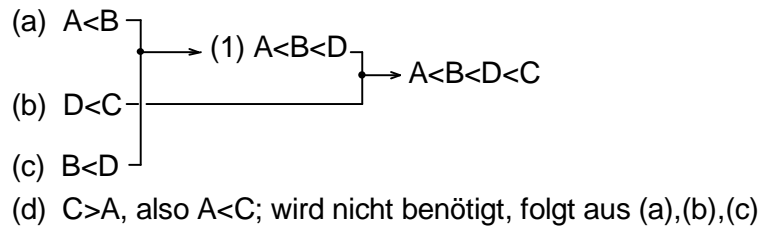
In welcher Reihenfolge müssen sich die Schüler aufstellen?

- *Führe zweckmäßige Bezeichnungen ein!*  
[Die Namen werden durch A, B, C, D abgekürzt.]
- *Übersetze die gegebenen Bedingungen (a) bis (d) in die Symbolsprache!*
  - *Wie könnte man „A ist kleiner als B“ abgekürzt festhalten? [  $A < B$  ]*
- *Was lässt sich aus den Bedingungen (a) bis (d) unmittelbar folgern? Begründe!*
  - *Aus welchen Bedingungen lässt sich welche Feststellung unmittelbar folgern?*  
[Aus (a) und (c) folgt (1)  $A < B < D$ . ]
- *Was lässt sich nun aus (a) bis (d) und (1) folgern?*  
[Aus (b) und (1) folgt die gesuchte Reihenfolge  $A < B < D < C$ .]
- *Antwortsatz!*

Nun sollen die Schüler erkennen, dass die Bedingung (d) für die Lösung nicht benötigt wurde. In diesem Fall muss man nachprüfen, ob die „*überflüssige*“ *Bedingung* den anderen Bedingungen nicht widerspricht. Würde man die Bedingung (d) durch die Bedingung (d\*) „Christa ist kleiner als Anne“ ersetzen, dann hätte unsere Aufgabe keine Lösung.

Die Lösung lässt sich in Form eines *Lösungsgraphen* festhalten. In den Eingangsknoten stehen die in der Symbolsprache festgehaltenen gegebenen Bedingungen, im Endknoten die ge-

suchte Reihenfolge, im restlichen Knoten eine abgeleitete Feststellung. Die Kanten halten fest, aus welchen Bedingungen welche Feststellungen folgen.



*Aufgabe 5) [4.5] [siehe auch Arbeitsblatt 4, Aufgabe 4)]*

Fünf Kinder haben sich zu einer Radwanderung verabredet. Als Erste ist Jana am Treffpunkt. Petra kommt, als Thomas und Sven schon da sind. Sven trifft vor Anke, aber später als Thomas ein. Petra war eher da als Anke.

In welcher Reihenfolge kamen sie zum Treffpunkt?

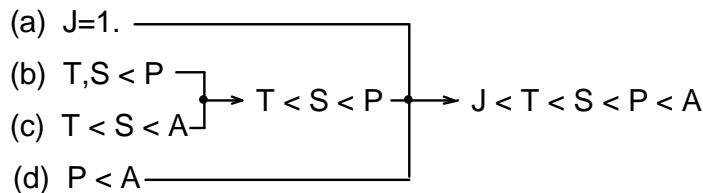
- Hast du eine ähnliche Aufgabe schon gelöst? [Ja, die Aufgabe 3.5]
- Wenn ja, dann gehe bei der Lösung analog vor.

Die Namen werden mit J, P, T und S abgekürzt.

„P war eher da als A“ wird durch  $P < A$  abgekürzt, „Als Erste war J da“ durch  $J = 1$ .

Es ist günstig, die gegebenen Bedingungen mit (a), (b), (c) und (d) zu bezeichnen und sofort in die Form „X kam vor Y“ zu bringen.

Dann lässt sich die Lösung durch folgenden *Lösungsgraphen* festhalten:



*Aufgabe 6) [5.3] [siehe auch Arbeitsblatt 5, Aufgabe 4)]*

Eine Firma hat einen Lieferwagen und einen Kleinbus. Der Lieferwagen verbraucht für jeweils 100 km 9 Liter, der Kleinbus 8 Liter Kraftstoff. Der Lieferwagen fuhr im letzten Monat 700 km. Im gleichen Zeitraum verbrauchte der Kleinbus 3 Liter Kraftstoff weniger.

Wie viele Kilometer fuhr der Kleinbus?

Nur wenn die meisten Schüler diese Aufgabe nicht selbständig lösen können, eignet sie sich dazu, in der Phase der Auswertung folgende Impulse zum *Anfertigen einer Tabelle* zu vermitteln:

- Wähle die Zeilen und die Spalten einer Tabelle stets so, dass Felder entstehen, in die man das Gegebene, das Gesuchte sowie benötigte Hilfsgrößen eintragen kann!
- Als Spalteneingänge kann man oft Anzahlen oder Größen wählen, die in der Aufgabe vorkommen. Als Zeileneingänge eignen sich oft die in der Aufgabe beschriebenen „Situatio-nen“.
- Manchmal muss man nachträglich weitere Zeilen oder Spalten einführen, um benötigte Hilfsgrößen oder Ergebnisse von Nebenrechnungen einzutragen.

In die auf diese Weise erhaltene linke Tabelle sind die *gegebenen Größen* eingetragen und die *gesuchte Größe* gekennzeichnet.

Nun werden die leeren Felder durch *Folgern aus den gegebenen Größen* gefüllt. Die Reihenfolge, in der das geschieht, haben wir durch die hochgestellten Zahlen festgehalten. Für die benötigten Nebenrechnungen wurden zwei weitere Felder eingerichtet.

	Weg	Verbrauch		Weg	Verbrauch
Lieferwagen	100 km	9 Liter	Lieferwagen	100 km	9 Liter
in 1 Monat	700 km		in 1 Monat	700 km	$(7 \cdot 9 =)$ 63 Liter <sup>(1)</sup>
Kleinbus	100 km	8 Liter	Kleinbus	100 km	8 Liter
in 1 Monat	.....	3 l. weniger als L.	in 1 Monat	<b>750 km</b>	$(63 - 3 =)$ 60 Liter <sup>(2)</sup>
				$(100:2 =)$ 50 km <sup>(4)</sup>	$(8:2 =)$ 4 Liter <sup>(3)</sup>
				$(15 \cdot 50 =)$ 750 km	$(15 \cdot 4 =)$ 60 Liter

Tabellen, die auch der Lösungsfindung dienen, sollte man niemals vorgeben, sondern nach dem Vermitteln dieser Impulse von den Schülern stets selbst aufstellen lassen.

*Aufgabe 7) [8.3] [siehe auch Arbeitsblatt 8, Aufgabe 3]*

Katrin fährt mit ihren Eltern zur Oma. Zuerst legen sie mit dem Bus in einer halben Stunde 20 km zurück. Nach 42 Minuten Aufenthalt geht es mit dem Zug weiter. Der Schaffner erzählt Katrin, dass der Zug in einer Stunde 60 km zurücklegt. Am Zielbahnhof sagt Katrin: „Seit der Abfahrt unseres Busses sind genau 192 Minuten vergangen.“ Mutti fragt nun:

- Wie viele Stunden dauerte die Zugfahrt?
- Wie viele Kilometer sind wir mit Bus und Zug insgesamt gefahren?

- Welches Hilfsmittel dürfte hier nützlich sein? [Tabelle]

In der linken Tabelle ist das *Gegebene* eingetragen und das *Gesuchte* gekennzeichnet. Dabei ist es günstig, die Zeiten in Minuten umzurechnen und in der letzten Zeile die gegebene Bedingung festzuhalten, dass der Zug in einer Stunde 60 km zurücklegt.

In der rechten Tabelle werden der *Lösungsweg* und die *Resultate* festgehalten.

Die Aufgabe wird schwieriger, wenn man Teil a) weglässt, weil dann der Schüler noch herausfinden muss, dass der mit dem Zug zurückgelegte Weg und die dafür benötigte Zeit als Hilfsgrößen benötigt werden.

	Weg	Zeit		Weg	Zeit
mit Bus	20 km	30 min	mit Bus	20 km	30 min
Aufenthalt	0 km	42 min	Aufenthalt	0 km	42 min
mit Zug			mit Zug	<sup>(2)</sup> 120 km	<sup>(1)</sup> $(192 - 42 - 30 =)$ <b>120 min</b>
insgesamt		192 min	insgesamt	<b>140 km</b>	192 min
Zug	60 km	60 min	Zug	60 km	60 min

*Aufgabe 8) [5.5] [siehe auch Arbeitsblatt 5, Aufgabe 5]*

Im Herbst trafen sich drei Jungen mit den Vornamen Klaus, Dieter und Rainer und mit den Familiennamen Müller, Schulze und Lehmann. Es ist bekannt:

- Der Junge mit dem Namen Müller heißt nicht Klaus.
- Schulze ist ein Jahr jünger als Rainer.
- Dieter spielt gern mit Müller Schach.
- Klaus freundete sich zuerst mit dem gleichaltrigen Lehmann an.

Wie heißen diese Jungen mit Vor- und Familiennamen?

Wenn die Mehrzahl der Schüler diese Aufgabe nicht selbständig lösen konnte, dann wird man in der Phase der Auswertung folgende *Impulse* geben:

- Wenn in einer Aufgabe Zuordnungen ermittelt werden sollen, dann ist meist eine Tabelle ein günstiges Hilfsmittel.

- Als Zeilen- und Spalteneingänge werden die (günstig bezeichneten) einander zuzuordnenden Elemente gewählt.
- Wenn eine Zuordnung zutrifft oder nicht zutrifft, dann wird dies in dem betreffenden Feld durch ein „+“ bzw. „-“ gekennzeichnet und angegeben, aus welcher gegebenen Bedingung oder abgeleiteten Feststellung dies folgt.

Um zwischen Vor- und Familiennamen unterscheiden zu können, werden die Vornamen mit k, d, r und die Familiennamen mit M, S, L abgekürzt.

Da eine eindeutige Zuordnung gesucht wird, gilt: Wenn in einer Zeile oder einer Spalte mit Ausnahme eines Feldes in allen anderen Feldern ein „-“ steht, dann muss in dem restlichen Feld ein „+“ und in der zugehörigen Spalte bzw. Zeile ein „-“ stehen.

Wenn man aus den gegebenen Bedingungen (a) bis (d) Folgerungen zieht, kommt man bei dieser leichten Aufgabe (fast mit Sicherheit) zu der nebenstehend angegebenen Tabelle, der die gesuchte Zuordnung entnommen werden kann.

	M	S	L
k	- (a)	+ (1)	- (d)
d	- (c)		+ (3)
r	+ (2)	- (b)	- (2)

Die Jungen heißen **Klaus Schulze, Dieter Lehmann** und **Rainer Müller**.

Die folgende Aufgabe hat einen höheren Schwierigkeitsgrad und lässt sich sowohl durch *systematisches Probieren* als auch durch *Folgern* lösen. Ferner lässt sich hier das „*Übersetzen von der Wortsprache in die Sprache der Gleichungen*“ demonstrieren.

*Aufgabe 9) [8.7] [siehe auch Arbeitsblatt 10, Zusatzaufgabe]*

Ein Bauer kauft 3 Kühe und 4 Ziegen und bezahlt dafür 108 Taler. Ein anderer Bauer kauft 7 Kühe und 6 Ziegen und bezahlt 212 Taler.

Wie viele Taler kostete eine Kuh, und wie viele Taler kostete eine Ziege?

Wenn bei dieser ziemlich schwierigen Aufgabe viele Schüler nicht in der Lage sind, selbständig eine Lösung zu finden, dann sollte man in der Phase der 1. Auswertung folgende Hilfen geben:

- Günstige Bezeichnungen wählen! [ k : Preis einer Kuh; z : Preis einer Ziege]
- Übersetze die Aufgabe aus der Wortsprache in die Sprache der Gleichungen!

Wortsprache	Sprache der Gleichungen
3 Kühe und 4 Ziegen kosten 108 Taler. 7 Kühe und 6 Ziegen kosten 212 Taler.	(1) $3 \cdot k + 4 \cdot z = 108$ , (2) $7 \cdot k + 6 \cdot z = 212$ .
a) Wie viele Taler kosten 1 Kuh und 1 Ziege zusammen?	a) $k + z = ?$
b) Wie viele Taler kostet 1 Kuh und wie viele Taler kostet 1 Ziege?	b) Ermittle alle Zahlenpaare (k; z), für die beide Gleichungen gelten!

Dann sollen die Schüler in einer 2. Phase der selbständigen Arbeit alle Zahlenpaare ermitteln, welche die Gleichungen (1) und (2) erfüllen.

In der 2. Phase der Auswertung wird man überprüfen, wie viele Schüler durch *systematisches Probieren* und wie viele Schüler durch *Folgern* ans Ziel gelangen wollten und wie viele Schüler das Ziel erreicht haben.

Im erstgenannten Fall können folgende *Impulse* helfen:

- *Mit welcher (besonders einfachen) Zahl k wollen wir das Probieren beginnen?*  
[z. B. mit  $k = 10$  ]
- *Was lässt sich hieraus unmittelbar berechnen? Wie wählen wir die Spalteneingänge der Tabelle?*  
[ $3 \cdot k = 30$  ;  $4 \cdot z = 108 - 30 = 78$  ;  $z = 19,5$  kann keine Lösung liefern, daher lohnt es nicht,  $7 \cdot k$ ,  $6 \cdot z$  und  $(7 \cdot k + 6 \cdot z)$  noch zu berechnen.]



- Mit welcher Zahl  $k$  wollen wir das systematische Probieren fortsetzen?

[Man könnte mit  $k = 11, 12, 13, 14, \dots$  so lange fortsetzen, bis man die Lösung gefunden hat. Da man leicht erkennt, dass für ungerade  $k$  auch  $4 \cdot z$  ungerade und daher nicht durch 4 teilbar ist, wird man sich auf das Untersuchen der geraden  $k$  beschränken. Desgleichen kann man erkennen, dass auch für  $k = 10, 14, 18, 22, \dots$   $4 \cdot z$  nicht durch 4 teilbar ist.]

Auf diese Weise kann man zu folgender *Tabelle* gelangen und feststellen lassen, dass es außer der einen gefundenen Lösung keine weiteren geben kann, weil für  $k > 24$  erst recht  $7 \cdot k + 6 \cdot z > 212$  gilt.

k	3·k	4·z	z	7·k	6·z	7·k + 6·z	= 212?
10	30	78	k.L.	---	---	---	---
12	36	72	18	84	108	192	< 212
14	42	66	k.L.	---	---	---	---
16	48	60	15	112	90	202	< 212
18	54	54	k.L.	---	---	---	---
<b>20</b>	60	48	<b>12</b>	140	72	<b>212</b>	<b>= 212</b>
24	72	36	9	168	54	222	> 212

Nur sehr leistungsstarke Schüler sollte man mit einem Lösungsweg durch *Folgern* vertraut machen, zu dem folgende *Impulse* führen können:

- Was lässt sich aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar folgern? Begründe!
  - Was kosten 10 Kühe und 10 Ziegen zusammen?  
[(108 + 212 =) 320 Taler, weil  $3 + 7 = 4 + 6 = 10$ ]
- Was lässt sich nun unmittelbar folgern? Begründe!
  - Was kosten 1 Kuh und 1 Ziege zusammen? [(320:10 =) 32 Taler]
  - Was kosten 3 Kühe und 3 Ziegen zusammen? [(3·32 =) 96 Taler]
  - Was kostet 1 Ziege?  
: Beachte, dass 3 Kühe und 4 Ziegen zusammen 108 Taler kosten.  
[(108 - 96 =) **12 Taler**]
  - Was kostet 1 Kuh?  
: Beachte, dass 1 Kuh und 1 Ziege 32 Taler kosten.  
[(32 - 12 =) **20 Taler**]

Es ist sinnvoll, in Arbeitsgemeinschaften *Gleichungen mit Variablen* zu verwenden, um gegebene Bedingungen festhalten zu können. Das Lösen solcher Gleichungen kann natürlich nicht durch Umformen, sondern nur durch systematisches Probieren oder durch inhaltliche Überlegungen erfolgen.

Der angegebene Lösungsweg durch *inhaltliches Folgern* wird jedoch einsichtig, wenn man ihn anhand der Gleichungen wie folgt erläutert:

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad 3 \cdot k + 4 \cdot z = 108 \\
 (2) \quad 7 \cdot k + 6 \cdot z = 212 \\
 \quad \quad \quad \rightarrow (3) \quad k + z = 32 \\
 \quad \quad \quad \rightarrow \quad 3 \cdot k + 3 \cdot z = 96 \\
 \quad \quad \quad (1) \quad 3 \cdot k + 4 \cdot z = 108 \quad \rightarrow z = 108 - 96 = 12 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \rightarrow (3) \quad k + z = 32 \quad \rightarrow k = 20
 \end{array}$$

### 3. Begabtenförderung an Grundschulen im Regierungsbezirk Chemnitz

In KÖNIG [4] wird über Begabtenförderung im außerunterrichtlichen Bereich an Grundschulen im Regierungsbezirk Chemnitz berichtet. Als wichtigste Aktivitäten werden dort genannt:

- Entwickeln von *Aufgabensammlungen* und *Anleitungen für AG-Leiter* für die Klassen 3 und 4.
- Berufung von 12 *Kreisbeauftragten für Begabtenförderung an Grundschulen* durch die Sächsische Bildungsagentur, Regionalstelle Chemnitz und Regionalstelle Zwickau.
- Regelmäßiges Durchführen von *Schularbeitsgemeinschaften* (für 2000 bis 2400 Schüler) und *Förderunterricht für leistungsstarke Schüler*.
- *Überschulische Arbeitsgemeinschaften* in Annaberg, Chemnitz, Freiberg, Plauen und Reichenbach für 180 bis 200 Schüler.
- Seit 1997 finden im gesamten Regierungsbezirk Chemnitz *Mathematikolympiaden* (MO) für die Klassen 2 bis 4, später für die Klassen 1 bis 4 statt.
  1. *Stufe*: Klausurwettbewerb für Klasse 1 bis 4 an den Schulen (13600 Teilnehmer),
  2. *Stufe*: Klausurwettbewerb für Klasse 3 und 4 auf Kreisebene (900 Teilnehmer),
  3. *Stufe*: Klausurwettbewerb für Klasse 4 auf Bezirksebene (40 bis 50 Teilnehmer).
- Durchführen von 6 *regionalen Wettbewerben* für 220 bis 250 Schüler der Klassen 3 und 4.
- Seit 2005 gibt es den *LOGO-Korrespondenzzirkel* für die Klasse 4 (ca. 100 Teilnehmer).
- *Spitzenförderung durch individuelle Betreuung* (für 50 bis 60 Schüler der Klasse 3/4 im Bezirk).

Wir haben auch die Möglichkeit genutzt, dieses Thema in die vom Verein „*Begabtenförderung Mathematik e.V.*“ organisierten, seit 1999 jährlich stattfindenden *Tagungen* einzubringen. Seit der 3. Tagung 2001 in Leipzig haben wir diesbezügliche Kurzvorträge und einen Workshop angeboten, in dem diskutiert wurde, wie man aus den für Lehrer bestimmten 16 *Aufgabenblättern* zugehörige *Arbeitsblätter* für die Hand des Schülers gestalten kann.

Von besonderer Bedeutung war für uns die 8. Tagung im März 2006 in Erfurt. Es war gelungen, bereits zu Beginn des Schuljahrs 2005/06 in der außerunterrichtlichen Förderung erfahrene Grundschullehrerinnen aus dem Freistaat Thüringen dafür zu gewinnen, 8 Entwürfe für Arbeitsblätter in Schularbeitsgemeinschaften für Klasse 3 zu erproben. Sieben dieser Lehrerinnen haben dann im Rahmen der Tagung an einem sehr erfolgreichen *Erfahrungsaustausch* teilgenommen, der bereits zu ersten Verbesserungen dieser Arbeitsblätter führte.

Im Schuljahr 2006/07 fand eine wenig erfolgreiche Erprobung dieser Arbeitsblätter im Regierungsbezirk Chemnitz statt.

Im Schuljahr 2009/10 hatte ich die Möglichkeit, an einer Erprobung der Arbeitsblätter durch Frau Thurner in Klasse 3 der BIP Kreativitätsgrundschule in Chemnitz teilzunehmen. An dieser zweizügigen Schule in freier Trägerschaft werden die Schüler in den Hauptfächern Deutsch und Mathematik ab einer Klassenstärke von 16 Schülern in je 5 Unterrichtsstunden in leistungsdifferenzierten Gruppen unterrichtet. Dabei werden in jeder Woche in einer Unterrichtsstunde für die Klassenstufe 3 die Schüler so in zwei Gruppen aufgeteilt, dass die erste Gruppe Unterricht nach Lehrplan erhält mit dem Schwerpunkt auf Üben und Wiederholen, und für die zweite Gruppe mit leistungsstarken und mathematisch interessierten Schülern ein Zirkel mit Themen aus der außerunterrichtlichen Mathematik durchgeführt wird. Mit dieser Gruppe wurden auch Vorschläge für die *Arbeitsblätter 9 bis 16* erprobt. Ferner wurden zu allen Arbeitsblättern zusätzlich für den AG-Leiter bestimmte *Lösungsblätter* entwickelt, die garantieren, dass in den Arbeitsblättern hinreichend Platz für Einträge durch die Schüler vorgesehen wurde.

Nach Überarbeitung des Materials habe ich im Schuljahr 2010/11 nochmals an einer abschließenden Erprobung in Klasse 3 teilgenommen.

#### 4. Zum Einsatz von Arbeitsblättern in Arbeitsgemeinschaften

Wie bereits erwähnt, gibt es zu „*Arbeitsgemeinschaften Klasse 3 - eine Anleitung für AG-Leiter*“ als Beilage „*16 Aufgabenblätter*“ mit 112 Aufgaben, die nur für die Hand des Lehrers bestimmt sind.

Die jeweils 7 Aufgaben eines jeden Aufgabenblatts sind nach dem Schwierigkeitsgrad geordnet. Die Anzahl der Aufgaben und der Unterschied im Schwierigkeitsgrad wurden so groß gewählt, dass folgende *Anwendungsbereiche* möglich sind:

- Förderung von leistungsstarken Schülern durch *innere Differenzierung im Unterricht*
- *Förderunterricht* für leistungsstarke Schüler im Rahmen der vorgegebenen Stundentafel
- *Schularbeitsgemeinschaften* als außerunterrichtliches Angebot
- *Überschulische Arbeitsgemeinschaften* für Schüler aus mehreren Grundschulen
- *Individuelle Förderung* hochbegabter Schüler

In Abhängigkeit vom Anwendungsbereich muss der Lehrer zunächst geeignete Aufgaben aussuchen. Für Arbeitsgemeinschaften sind im Allgemeinen die Aufgaben 2) bis 6) der Aufgabenblätter geeignet.

Weitere geeignete Aufgaben findet man in „*Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 3*“. Sie enthält 115 Aufgaben, die in drei Blöcke („leicht“, „mittel“, „schwer“) unterteilt sind. In jedem Block sind die Aufgaben nach Stoffgebieten geordnet: Arithmetik, Größen, Sachaufgaben, Geometrie; Sonstiges (Kombinatorik, Knobelaufgaben). Hier findet man auch geeignete *Zusatzaufgaben* für die leistungsstärksten Schüler (vgl. die didaktischen Regeln 1. und 3. auf Seite 3).

Erfahrungsgemäß sind die Schüler zu Beginn der Klasse 5 vor allem am Knobeln interessiert. Wenn sie das Resultat gefunden haben, ist die Aufgabe für sie uninteressant geworden. Dass der Lösungsweg begründet und schriftlich festgehalten werden muss, ist für sie von vornherein keineswegs klar, dies muss man ihnen erst beibringen! Der Unterricht allein kann dies nicht schaffen. Für mathematisch interessierte und begabte Schüler sind daher *außerunterrichtliche Förderangebote* (Arbeitsgemeinschaften, Korrespondenzzirkel) sehr wichtig.

Meist ist das gute Abschneiden bei Wettbewerben, etwa bei der Kreisolympiade, für solche Schüler sehr erstrebenswert. Dies kann man nutzen, um sie zu motivieren, auch das Begründen und das exakte Darstellen der Lösung im Laufe der Zeit zu erlernen.

Was für Schüler zu Beginn der Klasse 5 gilt, trifft natürlich in erhöhtem Maße auf Schüler der Klassen 3 und 4 zu. In der Spitzenförderung durch individuelle Betreuung an Grundschulen sollte man die Anforderungen übernehmen, die in Arbeitsgemeinschaften für Klasse 5 gestellt werden; für Arbeitsgemeinschaften in Klasse 3 wäre dies nicht angemessen.

Im Mathematikunterricht an Grundschulen spielen *Arbeitsblätter* im Allgemeinen eine wichtige Rolle. Sie vermeiden nicht nur zeitraubende Schreibarbeit, sondern halten auch Resultate der Arbeit übersichtlich fest. Wir sind der Meinung, dass man dieses didaktische Hilfsmittel auch in Arbeitsgemeinschaften nutzen sollte. Hier sollte man jedoch versuchen, außer der Aufgabenstellung und dem Resultat möglichst auch den *Lösungsweg* festzuhalten. Ein ausgefülltes Arbeitsblatt soll auch der *Zusammenfassung* und *Wiederholung* dienen. Die Schüler sollten die Arbeitsblätter der früheren Zirkel stets griffbereit haben, damit man im Bedarfsfall auf sie zurückgreifen kann.

Beim Suchen nach einem Lösungsweg sollten die Schüler stets „Schmierpapier“ benutzen. Das Ausfüllen der Arbeitsblätter sollte gemeinsam unter Anleitung des Lehrers in einer Phase der gemeinsamen Auswertung oder am Ende des Zirkels geschehen.

In Vorbereitung auf einen Zirkel sollte der Lehrer stets Überlegungen zum Ziel, zum Inhalt und zum didaktischen Vorgehen anstellen.

Wir halten es für effektiv, wenn man diesbezüglich gewonnene Erfahrungen festhält, um sie an Dritte zum Zweck weiterer Erprobung weitergeben zu können. Aus diesem Grund stellen wir auch „*Hinweise zum Einsatz der Arbeitsblätter*“ zur Verfügung.

## Schlussbemerkungen

Unser Ausgangspunkt ist erprobtes Material (Aufgabensammlungen und Anleitungen) für Arbeitsgemeinschaften in den Klassenstufen 5 bis 10. Die Zielstellung ist die Entwicklung des problemlösenden Denkens durch Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen. Dieses Material wird unter [www.bezirkskomitee.de](http://www.bezirkskomitee.de) angeboten.

Wir gehen davon aus, dass die *Ausbildung heuristischer Vorgehensweisen* bereits im Grundschulalter möglich ist und dass die in den oben genannten Klassenstufen erfolgreichen Vorgehensweisen sich in modifizierter Form auch in den Klassenstufen 3 und 4 einsetzen lassen. Diesem Zweck dient das seit 1999 angebotene Material für Arbeitsgemeinschaften in den Klassenstufen 3 und 4.

Wir sind von der Annahme ausgegangen, dass *Arbeitsblätter* nicht nur im Unterricht, sondern auch in Arbeitsgemeinschaften an Grundschulen ein günstiges didaktisches Hilfsmittel sein können. Eine Erprobung von 16 Arbeitsblättern in den Schuljahren 2009/10 und 2010/11 hat gezeigt, dass diese Annahme richtig war.

## Literatur

- KÖNIG, H. [1] Heuristik beim Lösen problemhafter Aufgaben aus dem außerunterrichtlichen Bereich. Chemnitz, 1996.
- KÖNIG, H. [2] Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen. *Der Mathematikunterricht*, Heft 3, 1992.
- KÖNIG, H. [3] Welchen Beitrag können Grundschulen zur Förderung mathematisch begabter Schüler leisten? *Mathematikinformation*, Nr. 43, 2005.
- KÖNIG, H. [4] Begabtenförderung im außerunterrichtlichen Bereich an Grundschulen im Regierungsbezirk Chemnitz. *Der Mathematikunterricht*, Heft 2, 2006.
- KÖNIG, H. / PÖRNIG, L. [1] *Arbeitsgemeinschaften Klasse 3 - eine Anleitung für AG-Leiter*. Chemnitz, 1999.
- POLYA, G. [1] *Schule des Denkens*. Francke: Tübingen, 1995.
- POLYA, G. [2] *Vom Lösen mathematischer Aufgaben*. Band 1 und Band 2. Birkhäuser: Basel/Stuttgart, 1996.

Dr. habil. Helmut König,  
Wenzel-Verner-Straße 82,  
09120 Chemnitz  
[hhw.koenig@t-online.de](mailto:hhw.koenig@t-online.de)