Bezirkskomitee Chemnitz
zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler
www.bezirkskomitee.de

Außerunterrichtliche Arbeit

HELMUT KÖNIG / LUTZ PÖRNIG

Arbeitsgemeinschaften Klasse 3
- eine Anleitung für AG- Leiter

Bezirkskomitee Chemnitz
zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler
www.bezirkskomitee.de

Außerunterrichtliche Arbeit

HELMUT KÖNIG / LUTZ PÖRNIG

Arbeitsgemeinschaften Klasse 3
- eine Anleitung für AG- Leiter

Bezirkskomitee Chemnitz
zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler
www.bezirkskomitee.de

HELMUT KÖNIG / LUTZ PÖRNIG

Arbeitsgemeinschaften Klasse 3 -

eine Anleitung für AG-Leiter

Bezirkskomitee Chemnitz
zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler
www.bezirkskomitee.de

HELMUT KÖNIG / LUTZ PÖRNIG

Arbeitsgemeinschaften Klasse 3 -

eine Anleitung für AG-Leiter

INHALT

INHALT

	Seite
Einleitung	2
1. Zur Förderung mathematisch begabter Schüler	3
1.1. Aufgaben und Ziele der Begabtenförderung	3
1.2. Organisationsformen der Begabtenförderung	4
2. Ziele und Inhalte von Arbeitsgemeinschaften in Klasse 3	9
2.1. Heuristische Vorgehensweisen	10
2.2. Fertigkeiten, Kenntnisse und logische Grundlagen	15
3. Zu einigen organisatorischen und didaktischen Fragen	16
3.1. Einige Grundlagen für das Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen	18
3.2. Einige didaktische Forderungen und Regeln	20
3.3. Demonstration der didaktischen Vorbereitung eines Zirkels anhand eines Beispiels	23
4. Zur Auswahl und Anordnung der Aufgaben	27
5. Vorschläge zum Behandeln einiger Aufgabengruppen	30
5.1. Einführen von zweckmäßigen Bezeichnungen	30
5.2. Verwenden von Tabellen	34
5.3. Verwenden von Skizzen und Mengendiagrammen	39
5.4. Systematisches Probieren	41
5.5. Vorwärtsarbeiten und Folgern aus Bedingungen	49
5.6. Rückwärtsarbeiten und "Von rückwärts her rechnen"	55
5.7. Das Entdecken von Gesetzmäßigkeiten	56
5.8. Analogieprinzip, Problemtransformation und Rückführung auf Hilfsaufgaben	60
5.9. "Findigkeit" beim Lösen von Aufgaben	64
6. Lösungen	65
6.1. Lösungen zu den Aufgaben der "Aufgabenblätter"	65
6.2. Lösungen zu den Aufgaben der "Aufgabensammlung"	85
Literaturverzeichnis	112

E i n l e i t u n g

Unser Bezirkskomitee bietet seit Anfang der 90-ger Jahre allen interessierten Pädagogen umfangreiche Aufgabensammlungen für Mathematik-Arbeitsgemeinschaften der Klassen 5 bis 10 mit den jeweils zugehörigen Anleitungen für AG-Leiter an. Diese Materialien wurden als Ergebnis langjähriger AG-Praxis in diesen Klassenstufen zusammengestellt und bis 1997 nochmals gründlich überarbeitet.

Da eine effektive *Begabtenförderung* auf mathematischem Gebiet *in der Grundschule beginnen muss*, haben wir uns seit 1997 diesem Thema zugewandt.
Als Erstes wurden die in Arbeitsgemeinschaften der *Klasse 4* gewonnenen Erfahrungen in Form der Aufgabensammlung /9/ und der Anleitung /10/ zur Verfügung gestellt. Anschließend haben wir mit der Aufgabensammlung /8/ und der vorliegenden Anleitung (einschließlich der 16 Aufgabenblätter) Material für die *Klassenstufe 3* entwickelt.

Dabei waren wir bemüht, *unterschiedliche Bedürfnisse* und Anforderungen verschiedener Formen der Begabtenförderung zu berücksichtigen, wie zum Beispiel

° Förderung von leistungsstarken Schülern im ***Unterricht*** durch innere Differenzierung;
° ***Förderunterricht*** für leistungsstarke Schüler im Rahmen der vorgegebenen Stundentafel;
° ***Schularbeitsgemeinschaften*** als außerunterrichtliches Angebot;
° ***Überschulische Arbeitsgemeinschaften*** für Schüler aus mehreren Grundschulen;
° ***Individuelle Förderung*** hochbegabter Schüler.

Das hat dazu geführt, dass mit den ***111 Aufgaben der Aufgabenblätter*** und den ***115 Aufgaben der Aufgabensammlung*** (die insgesamt 331 Teilaufgaben enthalten) weit mehr Aufgaben zur Verfügung stehen, als man mit einer Schülergruppe in einem Jahr bewältigen kann. Dabei wurde der *Schwierigkeitsgrad der Aufgaben* so *unterschiedlich* gewählt, dass der Lehrer für jede der genannten fünf Förderformen geeignete *Aufgaben auswählen* kann.
Die *Aufgabenblätter* sind nur *für die Hand des Lehrers* bestimmt, während die *Aufgabensammlung auch den Schülern* zur Verfügung stehen sollte.

Selbstverständlich stammen die meisten dieser Aufgaben nicht von uns, sie wurden einschlägigen *Quellen* entnommen, recht oft jedoch umformuliert, um den ihnen zugedachten Zweck zu erfüllen. Vor allem haben wir die Arbeiten von Schulze/Sprengel /7/, von Kerber /3/ und von Reichelt/Grahnert /6/ verwendet.

Unser besonderer Dank gilt Frau Motl, die auf der Grundlage ihrer jahrzehntelangen Erfahrungen bei der Begabtenförderung an Grundschulen uns stets hilfreich mit Rat und Tat zur Seite stand, sowie Frau Brückner, die uns ihr in einer überschulischen Arbeitsgemeinschaft für Klasse 3 gesammeltes und erprobtes Aufgabenmaterial bereitwillig zur Verfügung gestellt hat.

Hinweis: Im Januar 2002 wurden die Arbeitsblätter und die Aufgabensammlung überarbeitet, wobei es vor allem um einen Übergang von "DM" zu "€" ging.
Außer der Einleitung wurden auch die Abschnitte 5. und 6. diesbezüglich überarbeitet

2

E i n l e i t u n g

Unser Bezirkskomitee bietet seit Anfang der 90-ger Jahre allen interessierten Pädagogen umfangreiche Aufgabensammlungen für Mathematik-Arbeitsgemeinschaften der Klassen 5 bis 10 mit den jeweils zugehörigen Anleitungen für AG-Leiter an. Diese Materialien wurden als Ergebnis langjähriger AG-Praxis in diesen Klassenstufen zusammengestellt und bis 1997 nochmals gründlich überarbeitet.

Da eine effektive *Begabtenförderung* auf mathematischem Gebiet *in der Grundschule beginnen muss*, haben wir uns seit 1997 diesem Thema zugewandt.
Als Erstes wurden die in Arbeitsgemeinschaften der *Klasse 4* gewonnenen Erfahrungen in Form der Aufgabensammlung /9/ und der Anleitung /10/ zur Verfügung gestellt. Anschließend haben wir mit der Aufgabensammlung /8/ und der vorliegenden Anleitung (einschließlich der 16 Aufgabenblätter) Material für die *Klassenstufe 3* entwickelt.

Dabei waren wir bemüht, *unterschiedliche Bedürfnisse* und Anforderungen verschiedener Formen der Begabtenförderung zu berücksichtigen, wie zum Beispiel

° Förderung von leistungsstarken Schülern im ***Unterricht*** durch innere Differenzierung;
° ***Förderunterricht*** für leistungsstarke Schüler im Rahmen der vorgegebenen Stundentafel;
° ***Schularbeitsgemeinschaften*** als außerunterrichtliches Angebot;
° ***Überschulische Arbeitsgemeinschaften*** für Schüler aus mehreren Grundschulen;
° ***Individuelle Förderung*** hochbegabter Schüler.

Das hat dazu geführt, dass mit den ***111 Aufgaben der Aufgabenblätter*** und den ***115 Aufgaben der Aufgabensammlung*** (die insgesamt 331 Teilaufgaben enthalten) weit mehr Aufgaben zur Verfügung stehen, als man mit einer Schülergruppe in einem Jahr bewältigen kann. Dabei wurde der *Schwierigkeitsgrad der Aufgaben* so *unterschiedlich* gewählt, dass der Lehrer für jede der genannten fünf Förderformen geeignete *Aufgaben auswählen* kann.
Die *Aufgabenblätter* sind nur *für die Hand des Lehrers* bestimmt, während die *Aufgabensammlung auch den Schülern* zur Verfügung stehen sollte.

Selbstverständlich stammen die meisten dieser Aufgaben nicht von uns, sie wurden einschlägigen *Quellen* entnommen, recht oft jedoch umformuliert, um den ihnen zugedachten Zweck zu erfüllen. Vor allem haben wir die Arbeiten von Schulze/Sprengel /7/, von Kerber /3/ und von Reichelt/Grahnert /6/ verwendet.

Unser besonderer Dank gilt Frau Motl, die auf der Grundlage ihrer jahrzehntelangen Erfahrungen bei der Begabtenförderung an Grundschulen uns stets hilfreich mit Rat und Tat zur Seite stand, sowie Frau Brückner, die uns ihr in einer überschulischen Arbeitsgemeinschaft für Klasse 3 gesammeltes und erprobtes Aufgabenmaterial bereitwillig zur Verfügung gestellt hat.

Hinweis: Im Januar 2002 wurden die Arbeitsblätter und die Aufgabensammlung überarbeitet, wobei es vor allem um einen Übergang von "DM" zu "€" ging.
Außer der Einleitung wurden auch die Abschnitte 5. und 6. diesbezüglich überarbeitet

1. ZUR FÖRDERUNG MATHEMATISCH BEGABTER SCHÜLER

Wenn wir hier von "mathematischer Begabung" sprechen, dann meinen wir eine ***Begabung für formales und strukturelles Denken***, die sich durch Beschäftigung mit Mathematik schon frühzeitig entwickeln lässt, die aber vor allem auch für die Informatik und die theoretische Physik sowie weiterhin für alle Naturwissenschaften und auch für die Technik von großer Bedeutung ist.

Was vererbt wird, sind lediglich ***Begabungspotenzen***, die verkümmern, wenn sie nicht entdeckt und gefördert werden. Nur durch intensive und zeitaufwendige Beschäftigung mit dem Begabungsbereich kann sich eine Begabungspotenz zu einer *Begabung* entwickeln, die dann eine Voraussetzung für ***außergewöhnliche Leistungen*** darstellt.
Unserer Erfahrung nach ist das ***Umfeld des Schülers*** von entscheidender Bedeutung dafür, ob vorhandene Begabungspotenzen entdeckt und entwickelt werden. Es gibt Belege dafür, dass der größere Teil hochbegabter Schüler gar nicht entdeckt wird.

Der günstigste Zeitpunkt für ein ***frühzeitiges Entdecken*** mathematisch begabter Kinder sind die Klassen 2 bis 4 der Grundschule, und hier sollte auch bereits die erste Förderung einsetzen.

1.1. Aufgaben und Ziele der Begabtenförderung

Jeder Schüler hat das Recht, die bei ihm vorhandenen Begabungspotenzen zu entwickeln (***subjektiver Aspekt***).
Andererseits ist klar, dass vor allem gegenwärtig auch die Gesellschaft ein großes Interesse daran haben muss, mathematisch begabte Schüler zu entdecken und durch gezielte Förderung zu Höchstleistungen sowohl in den Grundlagenwissenschaften als auch in der angewandten Forschung und Entwicklung in den Naturwissenschaften und der Technik zu befähigen (***objektiver Aspekt***).

Maßnahmen der Förderung mathematisch begabter Schüler können recht unterschiedliche konkrete Ziele verfolgen, je nach dem, wie die Schwerpunkte beim Vermitteln von Kenntnissen und dem Entwickeln von Fähigkeiten und Fertigkeiten gewählt werden.

Wir stellen uns vor allem die folgenden ***Z i e l e***:

- *Befähigen* der Schüler *zum* ***selbständigen Erwerb von Wissen und Können***, um auf diese Weise die Studierfähigkeit der geförderten Schüler deutlich zu erhöhen.
- Entwickeln der ***Fähigkeit zum problemlösenden Denken*** durch bewusstes Vermitteln *heuristischer Vorgehensweisen.*
- Vermitteln von einigen ***mengentheoretisch-logischen Grundlagen***.

Das Vermitteln von Wissen und Können, das außerhalb des Unterrichtsstoffs liegt, gehört nicht zu unseren Zielen. Den Auffassungen von G. Polya folgend sind Kenntnisse und Fertigkeiten für uns lediglich Hilfsmittel für das Lösen problemhafter Aufgaben und werden nur in diesem Zusammenhang vermittelt (vgl. /4/ und /5/). Das ***Wiederholen und Vertiefen des Unterrichtsstoffs*** spielt dagegen eine wichtige Rolle.

3

1. ZUR FÖRDERUNG MATHEMATISCH BEGABTER SCHÜLER

Wenn wir hier von "mathematischer Begabung" sprechen, dann meinen wir eine Begabung für formales und strukturelles Denken, die sich durch Beschäftigung mit Mathematik schon frühzeitig entwickeln lässt, die aber vor allem auch für die Informatik und die theoretische Physik sowie weiterhin für alle Naturwissenschaften und auch für die Technik von großer Bedeutung ist.

Was vererbt wird, sind lediglich Begabungspotenzen, die verkümmern, wenn sie nicht entdeckt und gefördert werden. Nur durch intensive und zeitaufwendige Beschäftigung mit dem Begabungsbereich kann sich eine Begabungspotenz zu einer Begabung entwickeln, die dann eine Voraussetzung für außergewöhnliche Leistungen darstellt.
Unserer Erfahrung nach ist das Umfeld des Schülers von entscheidender Bedeutung dafür, ob vorhandene Begabungspotenzen entdeckt und entwickelt werden. Es gibt Belege dafür, dass der größere Teil hochbegabter Schüler gar nicht entdeckt wird.

Der günstigste Zeitpunkt für ein frühzeitiges Entdecken mathematisch begabter Kinder sind die Klassen 2 bis 4 der Grundschule, und hier sollte auch bereits die erste Förderung einsetzen.

1.1. Aufgaben und Ziele der Begabtenförderung

Jeder Schüler hat das Recht, die bei ihm vorhandenen Begabungspotenzen zu entwickeln (subjektiver Aspekt).
Andererseits ist klar, dass vor allem gegenwärtig auch die Gesellschaft ein großes Interesse daran haben muss, mathematisch begabte Schüler zu entdecken und durch gezielte Förderung zu Höchstleistungen sowohl in den Grundlagenwissenschaften als auch in der angewandten Forschung und Entwicklung in den Naturwissenschaften und der Technik zu befähigen (objektiver Aspekt).

Maßnahmen der Förderung mathematisch begabter Schüler können recht unterschiedliche konkrete Ziele verfolgen, je nach dem, wie die Schwerpunkte beim Vermitteln von Kenntnissen und dem Entwickeln von Fähigkeiten und Fertigkeiten gewählt werden.

Wir stellen uns vor allem die folgenden Z i e l e:

- Befähigen der Schüler zum selbständigen Erwerb von Wissen und Können, um auf diese Weise die Studierfähigkeit der geförderten Schüler deutlich zu erhöhen.
- Entwickeln der Fähigkeit zum problemlösenden Denken durch bewusstes Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen.
- Vermitteln von einigen mengentheoretisch-logischen Grundlagen.

Das Vermitteln von Wissen und Können, das außerhalb des Unterrichtsstoffs liegt, gehört nicht zu unseren Zielen. Den Auffassungen von G. Polya folgend sind Kenntnisse und Fertigkeiten für uns lediglich Hilfsmittel für das Lösen problemhafter Aufgaben und werden nur in diesem Zusammenhang vermittelt (vgl. /4/ und /5/). Das Wiederholen und Vertiefen des Unterrichtsstoffs spielt dagegen eine wichtige Rolle.

Selbstverständlich ist es nicht möglich, bereits in der Grundschule diese Ziele in vollem Umfang zu verfolgen.
Die wichtigste Rolle spielt hier das zweitgenannte Ziel, wobei man allerdings folgendes beachten muss:
Das bewusste Vermitteln von heuristischen Vorgehensweisen muss stets so erfolgen, dass dabei die ***Entwicklung der Kreativität*** der Schüler nicht beeinträchtigt wird. Worauf diesbezüglich geachtet werden muss, wird im Abschnitt 3. gesagt.

Es ist sinnvoll, in der Begabtenförderung zwischen einer ***Breitenförderung*** und einer ***Spitzenförderung*** zu unterscheiden.
Die Breitenförderung hat vor allem die Aufgabe, die ***Studierfähigkeit*** der geförderten Schüler entscheidend zu ***erhöhen***. Leider lassen sich diesbezügliche Erfolge kaum messen und daher auch nur schwer abrechnen. Es wäre ein schwerwiegender Fehler, hierfür vorwiegend nur die (leicht abrechenbaren) Erfolge bei Wettbewerben heranzuziehen!
Die Spitzenförderung hat darüber hinaus die Aufgabe, ***hochbegabte Schüler*** zu entdecken, sie so zu fördern und ihre Entwicklung so zu beeinflussen, dass aus ihren Reihen der zukünftige wissenschaftliche Nachwuchs unserer Universitäten und Hochschulen kommt.

1.2. Organisationsformen der Begabtenförderung

Ein guter *Unterricht* ist in der Regel eine notwendige Voraussetzung für das frühzeitige Entdecken und das systematische Fördern begabter Schüler.
Wie in den Bereichen der musischen und der sporlichen Begabtenförderung ist aber auch im mathematischen Bereich eine ***außerunterrichtliche Förderung*** unentbehrlich.

In Sachsen existert zur Zeit folgende ***Struktur*** *der Begabtenförderung*:
- "***Sächsisches Landeskomitee*** zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler", berufen durch das Ministerium für Kultus.
- Entsprechende ***"Bezirkskomitees"*** in Chemnitz, Dresden und Leipzig, deren Mitglieder durch die Direktoren der Regionalschulämter berufen werden.
- "***Beauftragte für Begabtenförderung und Wettbewerbe***" an jedem Gymnasium, ernannt vom jeweiligen Schulleiter.
- Im Bezirk Chemnitz gibt es zusätzlich noch 10 "***Kreisbeauftragte für Gymnasien***", die von den Regionalschulämtern berufen werden und die mit den zugehörigen Gymnasialbeauftragten zusammenarbeiten.
  Da sich diese Struktur sehr gut bewährt hat, sind wir zur Zeit dabei, auch "***Kreisbeauftragte für Grundschulen***" zu werben und berufen zu lassen, die dann die Aufgabe haben, auch im Grundschulbereich eine effektive Begabtenförderung aufzubauen.

Vor allem im Gegensatz zum sportlichen Bereich sind ***Wettbewerbe*** für uns kein Selbstzweck, sondern lediglich ***Hilfsmittel der Begabtenförderung.*** Erfahrungsgemäß sind sie jedoch das effektivste Hilfsmittel, um Schüler zu motivieren,

4

Selbstverständlich ist es nicht möglich, bereits in der Grundschule diese Ziele in vollem Umfang zu verfolgen.
Die wichtigste Rolle spielt hier das zweitgenannte Ziel, wobei man allerdings folgendes beachten muss:
Das bewusste Vermitteln von heuristischen Vorgehensweisen muss stets so erfolgen, dass dabei die ***Entwicklung der Kreativität*** der Schüler nicht beeinträchtigt wird. Worauf diesbezüglich geachtet werden muss, wird im Abschnitt 3. gesagt.

Es ist sinnvoll, in der Begabtenförderung zwischen einer ***Breitenförderung*** und einer ***Spitzenförderung*** zu unterscheiden.
Die Breitenförderung hat vor allem die Aufgabe, die ***Studierfähigkeit*** der geförderten Schüler entscheidend zu ***erhöhen***. Leider lassen sich diesbezügliche Erfolge kaum messen und daher auch nur schwer abrechnen. Es wäre ein schwerwiegender Fehler, hierfür vorwiegend nur die (leicht abrechenbaren) Erfolge bei Wettbewerben heranzuziehen!
Die Spitzenförderung hat darüber hinaus die Aufgabe, ***hochbegabte Schüler*** zu entdecken, sie so zu fördern und ihre Entwicklung so zu beeinflussen, dass aus ihren Reihen der zukünftige wissenschaftliche Nachwuchs unserer Universitäten und Hochschulen kommt.

1.2. Organisationsformen der Begabtenförderung

Ein guter *Unterricht* ist in der Regel eine notwendige Voraussetzung für das frühzeitige Entdecken und das systematische Fördern begabter Schüler.
Wie in den Bereichen der musischen und der sporlichen Begabtenförderung ist aber auch im mathematischen Bereich eine ***außerunterrichtliche Förderung*** unentbehrlich.

In Sachsen existert zur Zeit folgende ***Struktur*** *der Begabtenförderung*:
- "***Sächsisches Landeskomitee*** zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler", berufen durch das Ministerium für Kultus.
- Entsprechende ***"Bezirkskomitees"*** in Chemnitz, Dresden und Leipzig, deren Mitglieder durch die Direktoren der Regionalschulämter berufen werden.
- "***Beauftragte für Begabtenförderung und Wettbewerbe***" an jedem Gymnasium, ernannt vom jeweiligen Schulleiter.
- Im Bezirk Chemnitz gibt es zusätzlich noch 10 "***Kreisbeauftragte für Gymnasien***", die von den Regionalschulämtern berufen werden und die mit den zugehörigen Gymnasialbeauftragten zusammenarbeiten.
  Da sich diese Struktur sehr gut bewährt hat, sind wir zur Zeit dabei, auch "***Kreisbeauftragte für Grundschulen***" zu werben und berufen zu lassen, die dann die Aufgabe haben, auch im Grundschulbereich eine effektive Begabtenförderung aufzubauen.

Vor allem im Gegensatz zum sportlichen Bereich sind ***Wettbewerbe*** für uns kein Selbstzweck, sondern lediglich ***Hilfsmittel der Begabtenförderung.*** Erfahrungsgemäß sind sie jedoch das effektivste Hilfsmittel, um Schüler zu motivieren,

große Teile ihrer Freizeit der Beschäftigung mit Mathematik zu widmen und auf diese Weise vorhandene Begabungspotenzen zu entwickeln.

Die motivierende Funktion von Wettbewerben muss künftighin auch an den Grundschulen mehr als bisher genutzt werden.
In der Stadt Chemnitz wird seit 1961 (analog zu den Mathematik-Olympiaden für die Schüler der Klassen 5 bis 12) ein zweistufiger Klausurwettbewerb für Grundschüler durchgeführt. Die 1. Stufe ist eine ***Schulolympiade*** für die Klassenstufen 2, 3 und 4. Die leistungsstärksten Teilnehmer aus den Klassenstufen 3 und 4 sind berechtigt, an der 2. Stufe, der ***Stadtolympiade*** teilzunehmen.
Seit kurzem bietet Chemnitz den anderen Kreisen des Bezirks an, die Aufgaben dieser beiden Wettbewerbe zu nutzen und ebenfalls derartige Olympiaden durchzuführen. Im Schuljahr 1998/99 haben bereits 7 von 12 Kreisen dieses Angebot angenommen.
Erfreulicherweise gibt es in 6 Kreisen bereits seit mehreren Jahren weitere Wettbewerbe an Grundschulen, vor allem für Schüler der Klasse 4.

Seit dem Schuljahr 1997/98 empfehlen wir unseren Schulen, an dem internationalen ***Känguruh-Wettbewerb*** teilzunehmen, der jeweils an einem bestimmten Tag im März an den Schulen durchgeführt wird. 1999 haben über 1,5 Millionen Schüler aus 21 Ländern teilgenommen.
Schülern der Klassenstufe 3 und 4 werden 15 Aufgaben gestellt, zu denen jeweils 5 Antworten angegeben werden, von denen genau eine richtig ist. Die Schüler bekommen 75 Minuten Zeit, um die richtige Antwort herauszufinden und anzukreuzen.
1999 haben sich 41 Grundschulen aus unserem Bezirk an diesem Wettbewerb beteiligt.

Vor allem für die Förderung hochbegabter Schüler hat sich der ***Frühstart bei Wettbewerben*** in der Vergangenheit als sehr effektiv erwiesen und sollte daher in den kommenden Jahren wieder verstärkt praktiziert werden.
So können z.B. die leistungsstärksten Schüler aus der Klassenstufe 2 bzw. 3 an Wettbewerben teilnehmen, die für Schüler der Klassenstufe 3 bzw. 4 angeboten werden.
Ein erfolgreicher Frühstarter aus der Klassenstufe 3 sollte im darauffolgenden Schuljahr ermutigt werden, als Schüler der Klassenstufe 4 bei Wettbewerben zu starten, die für Schüler der Klassenstufe 5 bestimmt sind.
Dies bedeutet zunächst einen Frühstart bei der ***2. Stufe der Mathematik-Olympiade*** (Kreisolympiade) für Klasse 5, die im November an den meisten Gymnasien und auch an einigen Mittelschulen durchgeführt wird.
Eine weitere Bewährungsprobe ist die Teilnahme an der ***1. Stufe des Adam-Ries-Wettbewerbs (ARW)***. Dieser kombinierte Hausaufgaben- und Klausurwettbewerb findet Dezember/Januar auf Schulebene statt und wird vor allem den Schülern der Klasse 5 aus Sachsen, Thüringen und Bayern/Oberfranken angeboten. Aber auch Schüler der Klasse 4 können an diesem Wettbewerb teilnehmen.
Besonders leistungsstarke Schüler haben dann noch die Chance, bei der ***2. Stufe des ARW*** zu starten, der im April jeweils auf Landesebene stattfindet und ein Klausurwettbewerb ist.
Die ***3. Stufe des ARW*** ist ein Vier-Länder-Wettbewerb, der als Klausurwettbewerb im Juni in Annaberg-Buchholz stattfindet und an dem jeweils 10 Schüler aus den genannten Ländern und aus Tschechien teilnehmen.

5

große Teile ihrer Freizeit der Beschäftigung mit Mathematik zu widmen und auf diese Weise vorhandene Begabungspotenzen zu entwickeln.

Die motivierende Funktion von Wettbewerben muss künftighin auch an den Grundschulen mehr als bisher genutzt werden.
In der Stadt Chemnitz wird seit 1961 (analog zu den Mathematik-Olympiaden für die Schüler der Klassen 5 bis 12) ein zweistufiger Klausurwettbewerb für Grundschüler durchgeführt. Die 1. Stufe ist eine ***Schulolympiade*** für die Klassenstufen 2, 3 und 4. Die leistungsstärksten Teilnehmer aus den Klassenstufen 3 und 4 sind berechtigt, an der 2. Stufe, der ***Stadtolympiade*** teilzunehmen.
Seit kurzem bietet Chemnitz den anderen Kreisen des Bezirks an, die Aufgaben dieser beiden Wettbewerbe zu nutzen und ebenfalls derartige Olympiaden durchzuführen. Im Schuljahr 1998/99 haben bereits 7 von 12 Kreisen dieses Angebot angenommen.
Erfreulicherweise gibt es in 6 Kreisen bereits seit mehreren Jahren weitere Wettbewerbe an Grundschulen, vor allem für Schüler der Klasse 4.

Seit dem Schuljahr 1997/98 empfehlen wir unseren Schulen, an dem internationalen ***Känguruh-Wettbewerb*** teilzunehmen, der jeweils an einem bestimmten Tag im März an den Schulen durchgeführt wird. 1999 haben über 1,5 Millionen Schüler aus 21 Ländern teilgenommen.
Schülern der Klassenstufe 3 und 4 werden 15 Aufgaben gestellt, zu denen jeweils 5 Antworten angegeben werden, von denen genau eine richtig ist. Die Schüler bekommen 75 Minuten Zeit, um die richtige Antwort herauszufinden und anzukreuzen.
1999 haben sich 41 Grundschulen aus unserem Bezirk an diesem Wettbewerb beteiligt.

Vor allem für die Förderung hochbegabter Schüler hat sich der ***Frühstart bei Wettbewerben*** in der Vergangenheit als sehr effektiv erwiesen und sollte daher in den kommenden Jahren wieder verstärkt praktiziert werden.
So können z.B. die leistungsstärksten Schüler aus der Klassenstufe 2 bzw. 3 an Wettbewerben teilnehmen, die für Schüler der Klassenstufe 3 bzw. 4 angeboten werden.
Ein erfolgreicher Frühstarter aus der Klassenstufe 3 sollte im darauffolgenden Schuljahr ermutigt werden, als Schüler der Klassenstufe 4 bei Wettbewerben zu starten, die für Schüler der Klassenstufe 5 bestimmt sind.
Dies bedeutet zunächst einen Frühstart bei der ***2. Stufe der Mathematik-Olympiade*** (Kreisolympiade) für Klasse 5, die im November an den meisten Gymnasien und auch an einigen Mittelschulen durchgeführt wird.
Eine weitere Bewährungsprobe ist die Teilnahme an der ***1. Stufe des Adam-Ries-Wettbewerbs (ARW)***. Dieser kombinierte Hausaufgaben- und Klausurwettbewerb findet Dezember/Januar auf Schulebene statt und wird vor allem den Schülern der Klasse 5 aus Sachsen, Thüringen und Bayern/Oberfranken angeboten. Aber auch Schüler der Klasse 4 können an diesem Wettbewerb teilnehmen.
Besonders leistungsstarke Schüler haben dann noch die Chance, bei der ***2. Stufe des ARW*** zu starten, der im April jeweils auf Landesebene stattfindet und ein Klausurwettbewerb ist.
Die ***3. Stufe des ARW*** ist ein Vier-Länder-Wettbewerb, der als Klausurwettbewerb im Juni in Annaberg-Buchholz stattfindet und an dem jeweils 10 Schüler aus den genannten Ländern und aus Tschechien teilnehmen.

Wettbewerbe erfüllen nur dann ihre Aufgabe als Hilfsmittel der Begabtenförderung, wenn sie nicht nur ***Höhepunkte der Förderung*** im Laufe des Schuljahrs sind, sondern auch der ***Ausgangspunkt*** für eine verstärkte weitere Förderung.
Einerseits geht es dabei darum, die Leistungen der Schüler - so wie es im sportlichen und im musischen Bereich bereits üblich ist - auch öffentlich anzuerkennen, um sie so für eine weitere intensive Beschäftigung mit Mathematik zu motivieren. Andererseits sollte man die Gelegenheit nutzen, Schüler für die Teilnahme an gewissen Förderformen zu werben.

An sächsischen Grundschulen können folgende ***F ö r d e r f o r m e n*** praktiziert werden:

- Förderung durch ***innere Differenzierung im Unterricht***.
- ***Förderunterricht*** für leistungsstarke Schüler im Rahmen der Stundentafel .
- ***Schularbeitsgemeinschaften*** als außerunterrichtliches Angebot.
- ***Überschulische Arbeitsgemeinschaften*** für Schüler mehrerer Grundschulen.
- ***Individuelle Förderung*** für hochbegabte Schüler.

Auch ***Korrespondenzzirkel*** vor allem für Schüler der Klasse 4 werden bereits angeboten.

Die Aufgaben der von uns angebotenen Aufgabensammlung sowie der Aufgabenblätter wurden hinsichtlich Anzahl und unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad so ausgesucht, dass sie von allen genannten Förderformen genutzt werden können.
Wenn leistungsstarke Schüler im Unterricht unterfordert sind und sich langweilen, dann macht es wenig Sinn, ihnen lediglich mehr Aufgaben des im Unterricht vorkommenden Typs zu stellen. Hierfür sind problemhafte Aufgaben, die solche Schüler an der oberen Grenze ihrer Leistungsfähigkeit fordern, wesentlich besser geeignet.

Bei ***überschulischen Arbeitsgemeinschaften*** wird davon ausgegangen, dass sie in der Regel in zweiwöchigem Rhythmus stattfinden und 90 Minuten dauern.
Bei ***Schularbeitsgemeinschaften*** sind wöchentliche Veranstaltungen von 45 Minuten Dauer üblich.

Für die ***individuelle Förderung*** werden ***Konsultationen*** vorgeschlagen, die mindestens einen Abstand von 2 Wochen und höchstens einen Abstand von 4 Wochen haben sollten.
Der Schüler erhält Aufgaben mit der Aufforderung, sie selbständig zu bearbeiten. In der Konsultation wertet der Lehrer die unternommenen Lösungsversuche aus und stellt neue Aufgaben.
Außer den für die Klassen 3 und 4 angebotenen Aufgaben kann man zusätzlich noch Aufgaben nebst zugehörigen Anleitungen für die AG Klasse 5 und den Adam-Ries-Wettbewerb nutzen (vgl. /10/, /11/, /12/, /13/). Auch die Aufgaben/Lösungen der 2. Stufe der Mathematik-Olympiade für Schüler der Klasse 5 können diesbezüglich sehr nützlich sein.

Wenden wir uns noch einigen ***o r g a n i s a t o r i s c h e n   P r o b l e m e n*** zu.
Das von uns angebotene Material kann bei unserem Bezirkskomitee bestellt werden.
An jeder Grundschule sollte mindestens ein Lehrer dafür geworben werden, sich zusätzlich zu den Unterrichtsaufgaben auch noch der Begabtenförderung an der Schule zu widmen.

6

Wettbewerbe erfüllen nur dann ihre Aufgabe als Hilfsmittel der Begabtenförderung, wenn sie nicht nur ***Höhepunkte der Förderung*** im Laufe des Schuljahrs sind, sondern auch der ***Ausgangspunkt*** für eine verstärkte weitere Förderung.
Einerseits geht es dabei darum, die Leistungen der Schüler - so wie es im sportlichen und im musischen Bereich bereits üblich ist - auch öffentlich anzuerkennen, um sie so für eine weitere intensive Beschäftigung mit Mathematik zu motivieren. Andererseits sollte man die Gelegenheit nutzen, Schüler für die Teilnahme an gewissen Förderformen zu werben.

An sächsischen Grundschulen können folgende ***F ö r d e r f o r m e n*** praktiziert werden:

- Förderung durch ***innere Differenzierung im Unterricht***.
- ***Förderunterricht*** für leistungsstarke Schüler im Rahmen der Stundentafel .
- ***Schularbeitsgemeinschaften*** als außerunterrichtliches Angebot.
- ***Überschulische Arbeitsgemeinschaften*** für Schüler mehrerer Grundschulen.
- ***Individuelle Förderung*** für hochbegabte Schüler.

Auch ***Korrespondenzzirkel*** vor allem für Schüler der Klasse 4 werden bereits angeboten.

Die Aufgaben der von uns angebotenen Aufgabensammlung sowie der Aufgabenblätter wurden hinsichtlich Anzahl und unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad so ausgesucht, dass sie von allen genannten Förderformen genutzt werden können.
Wenn leistungsstarke Schüler im Unterricht unterfordert sind und sich langweilen, dann macht es wenig Sinn, ihnen lediglich mehr Aufgaben des im Unterricht vorkommenden Typs zu stellen. Hierfür sind problemhafte Aufgaben, die solche Schüler an der oberen Grenze ihrer Leistungsfähigkeit fordern, wesentlich besser geeignet.

Bei ***überschulischen Arbeitsgemeinschaften*** wird davon ausgegangen, dass sie in der Regel in zweiwöchigem Rhythmus stattfinden und 90 Minuten dauern.
Bei ***Schularbeitsgemeinschaften*** sind wöchentliche Veranstaltungen von 45 Minuten Dauer üblich.

Für die ***individuelle Förderung*** werden ***Konsultationen*** vorgeschlagen, die mindestens einen Abstand von 2 Wochen und höchstens einen Abstand von 4 Wochen haben sollten.
Der Schüler erhält Aufgaben mit der Aufforderung, sie selbständig zu bearbeiten. In der Konsultation wertet der Lehrer die unternommenen Lösungsversuche aus und stellt neue Aufgaben.
Außer den für die Klassen 3 und 4 angebotenen Aufgaben kann man zusätzlich noch Aufgaben nebst zugehörigen Anleitungen für die AG Klasse 5 und den Adam-Ries-Wettbewerb nutzen (vgl. /10/, /11/, /12/, /13/). Auch die Aufgaben/Lösungen der 2. Stufe der Mathematik-Olympiade für Schüler der Klasse 5 können diesbezüglich sehr nützlich sein.

Wenden wir uns noch einigen ***o r g a n i s a t o r i s c h e n   P r o b l e m e n*** zu.
Das von uns angebotene Material kann bei unserem Bezirkskomitee bestellt werden.
An jeder Grundschule sollte mindestens ein Lehrer dafür geworben werden, sich zusätzlich zu den Unterrichtsaufgaben auch noch der Begabtenförderung an der Schule zu widmen.

Für eine effektive didaktische Umsetzung der Fördermaßnahmen sind Erfahrung und Fortbildung erforderlich. Es kommt darauf an, vorhandene oder gewonnene ***Erfahrungen auszutauschen***, d.h. die an der Begabtenförderung beteiligten Lehrer miteinander ins Gespräch zu bringen. Dies ist eine wichtige Aufgabe der "Kreisbeauftragten für Begabtenförderung und Wettbewerbe an Grundschulen". Aber auch die ***Lehrerfortbildung*** könnte hierbei hilfreich sein.

Die größten Probleme erwachsen aus der räumlichen Trennung von Grundschulen und weiterführenden Schulen. Wenn es uns gelingt, an den Grundschulen begabte Schüler frühzeitig zu entdecken und systematisch zu fördern, dann müssen wir auch garantieren, dass die ***Förderung in Klasse 5 nahtlos fortgesetzt*** wird.
Dies könnte man erreichen, wenn die Kreisbeauftragten für Gymnasien mit den Kreisbeauftragten für Grundschulen eng zusammenarbeiten und Informationen austauschen.
Die Eltern von geförderten begabten Grundschülern müssten einerseits bei der Auswahl der weiterführenden Schule beraten werden, andererseits müsste der Beauftragte dieser Schule dann für eine sofortige und kontinuierliche Weiterführung der Förderung sorgen.

Zur Zeit werden bei uns mathematisch begabte Schüler (wenn überhaupt dann in der Regel) viel zu spät entdeckt. Viele dieser Schüler fallen frühestens bei den Kreis-Olympiaden in Klasse 5 oder Klasse 6 auf, und leider bewirkt dies keineswegs immer den Beginn einer Förderung.
Auf diese Weise erhalten einerseits viele Schüler nach wie vor keine Chance, ihre Begabungspotenzen zu entwickeln, andererseits gehen der Gesellschaft dringend benötigte Menschen verloren, die zu Höchstleistungen fähig wären.
Hier liegen diesbezüglich vor allem im Bereich der Organisation noch große Aufgaben vor uns!

Abschließend wenden wir uns der Frage zu, wie man Hochbegabte bereits im Vorschulalter (und damit natürlich auch im Grundschulalter) erkennen kann. Wir zitieren hierzu aus /1/, Seite 25:

Hochbegabte können bereits im Vorschulalter eine größere Anzahl folgender ***Eigenschaften*** zeigen:

1. *Lernen und Denken:*

° Hochbegabte haben in einzelnen Bereichen ein hohes Detailwissen.
° Ihr Wortschatz ist für das Alter ungewöhnlich.
° Ihre Sprache ist ausdrucksvoll, ausgearbeitet und flüssig.
° Sie können sich Fakten schnell merken.
° Sie durchschauen sehr schnell Ursache-Wirkung-Beziehungen.
° Sie suchen nach Gemeinsamkeiten und Unterschieden.
° Sie erkennen sehr schnell zugrunde liegende Prinzipien.
° Sie können außergewöhnlich gut beobachten.
° Sie können schnell gültige Verallgemeinerungen erstellen.
° Sie lesen sehr viel von sich aus und bevorzugen Bücher, die über ihre Altersstufe deutlich hinausgehen.
° Sie können kritisch, unabhängig und wertend denken.

7

Für eine effektive didaktische Umsetzung der Fördermaßnahmen sind Erfahrung und Fortbildung erforderlich. Es kommt darauf an, vorhandene oder gewonnene ***Erfahrungen auszutauschen***, d.h. die an der Begabtenförderung beteiligten Lehrer miteinander ins Gespräch zu bringen. Dies ist eine wichtige Aufgabe der "Kreisbeauftragten für Begabtenförderung und Wettbewerbe an Grundschulen". Aber auch die ***Lehrerfortbildung*** könnte hierbei hilfreich sein.

Die größten Probleme erwachsen aus der räumlichen Trennung von Grundschulen und weiterführenden Schulen. Wenn es uns gelingt, an den Grundschulen begabte Schüler frühzeitig zu entdecken und systematisch zu fördern, dann müssen wir auch garantieren, dass die ***Förderung in Klasse 5 nahtlos fortgesetzt*** wird.
Dies könnte man erreichen, wenn die Kreisbeauftragten für Gymnasien mit den Kreisbeauftragten für Grundschulen eng zusammenarbeiten und Informationen austauschen.
Die Eltern von geförderten begabten Grundschülern müssten einerseits bei der Auswahl der weiterführenden Schule beraten werden, andererseits müsste der Beauftragte dieser Schule dann für eine sofortige und kontinuierliche Weiterführung der Förderung sorgen.

Zur Zeit werden bei uns mathematisch begabte Schüler (wenn überhaupt dann in der Regel) viel zu spät entdeckt. Viele dieser Schüler fallen frühestens bei den Kreis-Olympiaden in Klasse 5 oder Klasse 6 auf, und leider bewirkt dies keineswegs immer den Beginn einer Förderung.
Auf diese Weise erhalten einerseits viele Schüler nach wie vor keine Chance, ihre Begabungspotenzen zu entwickeln, andererseits gehen der Gesellschaft dringend benötigte Menschen verloren, die zu Höchstleistungen fähig wären.
Hier liegen diesbezüglich vor allem im Bereich der Organisation noch große Aufgaben vor uns!

Abschließend wenden wir uns der Frage zu, wie man Hochbegabte bereits im Vorschulalter (und damit natürlich auch im Grundschulalter) erkennen kann. Wir zitieren hierzu aus /1/, Seite 25:

Hochbegabte können bereits im Vorschulalter eine größere Anzahl folgender ***Eigenschaften*** zeigen:

1. *Lernen und Denken:*

° Hochbegabte haben in einzelnen Bereichen ein hohes Detailwissen.
° Ihr Wortschatz ist für das Alter ungewöhnlich.
° Ihre Sprache ist ausdrucksvoll, ausgearbeitet und flüssig.
° Sie können sich Fakten schnell merken.
° Sie durchschauen sehr schnell Ursache-Wirkung-Beziehungen.
° Sie suchen nach Gemeinsamkeiten und Unterschieden.
° Sie erkennen sehr schnell zugrunde liegende Prinzipien.
° Sie können außergewöhnlich gut beobachten.
° Sie können schnell gültige Verallgemeinerungen erstellen.
° Sie lesen sehr viel von sich aus und bevorzugen Bücher, die über ihre Altersstufe deutlich hinausgehen.
° Sie können kritisch, unabhängig und wertend denken.

2. *Arbeitshaltung und Interessen:*

- Motivierte Hochbegabte gehen in bestimmten Problemen völlig auf.
- Sie sind bemüht, Aufgaben stets vollständig zu lösen.
- Sie sind bei Routineaufgaben leicht gelangweilt.
- Sie streben nach Perfektion.
- Sie sind selbstkritisch.
- Sie sind in ihrem Tempo oder Ergebnis nicht schnell zufriedenzustellen.
- Sie arbeiten gern unabhängig, um hinreichend Zeit für das eigene Durchdenken eines Problems zu haben.
- Sie setzen sich hohe Leistungsziele und lösen (selbst) gestellte Aufgaben mit einem Minimum an Anleitung und Hilfe durch Erwachsene.
- Sie interessieren sich für viele "Erwachsenenthemen" wie Religion, Philosophie, Politik, Umweltfragen, Sexualität, Gerechtigkeit in der Welt ...

3. *Soziales Verhalten*

- Hochbegabte beschäftigen sich viel mit Begriffen wie Recht - Unrecht, Gut - Böse und sind bereit, sich gegen Autoritäten zu engagieren.
- Sie gehen nicht um jeden Preis mit der Mehrheit.
- Sie sind individualistisch.
- Sie akzeptieren keine Meinung von Autoritäten, ohne sie einer kritischen Prüfung zu unterziehen.
- Sie können gut Verantwortung übernehmen und erweisen sich in Planung und Organisation als zuverlässig.
- Sie kommen mit Alterskameraden wie mit Erwachsenen gleich gut zurecht, suchen ihre Freundschaften aber bevorzugt unter Gleichbefähigten.
- Sie neigen schnell dazu, über Situationen zu bestimmen.
- Sie können sich in andere einfühlen und sind daher für politische und soziale Probleme aufgeschlossen.

8

2. *Arbeitshaltung und Interessen:*

- Motivierte Hochbegabte gehen in bestimmten Problemen völlig auf.
- Sie sind bemüht, Aufgaben stets vollständig zu lösen.
- Sie sind bei Routineaufgaben leicht gelangweilt.
- Sie streben nach Perfektion.
- Sie sind selbstkritisch.
- Sie sind in ihrem Tempo oder Ergebnis nicht schnell zufriedenzustellen.
- Sie arbeiten gern unabhängig, um hinreichend Zeit für das eigene Durchdenken eines Problems zu haben.
- Sie setzen sich hohe Leistungsziele und lösen (selbst) gestellte Aufgaben mit einem Minimum an Anleitung und Hilfe durch Erwachsene.
- Sie interessieren sich für viele "Erwachsenenthemen" wie Religion, Philosophie, Politik, Umweltfragen, Sexualität, Gerechtigkeit in der Welt ...

3. *Soziales Verhalten*

- Hochbegabte beschäftigen sich viel mit Begriffen wie Recht - Unrecht, Gut - Böse und sind bereit, sich gegen Autoritäten zu engagieren.
- Sie gehen nicht um jeden Preis mit der Mehrheit.
- Sie sind individualistisch.
- Sie akzeptieren keine Meinung von Autoritäten, ohne sie einer kritischen Prüfung zu unterziehen.
- Sie können gut Verantwortung übernehmen und erweisen sich in Planung und Organisation als zuverlässig.
- Sie kommen mit Alterskameraden wie mit Erwachsenen gleich gut zurecht, suchen ihre Freundschaften aber bevorzugt unter Gleichbefähigten.
- Sie neigen schnell dazu, über Situationen zu bestimmen.
- Sie können sich in andere einfühlen und sind daher für politische und soziale Probleme aufgeschlossen.

2. ZIELE UND INHALTE VON ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IN KLASSE 3

Beim systematischen Fördern mathematisch interessierter und begabter Schüler geht es in dieser Klassenstufe vor allem um die Entwicklung der Komponente ***"Denkfähigkeit"***.
Die effektivste Art der Förderung besteht dabei darin, die Schüler stets an der oberen Grenze ihrer Leistungsfähigkeit zu fordern.

Zwar kann man davon ausgehen, dass die geförderten Schüler Interesse an der Mathematik und Freude am Knobeln mitbringen. Dennoch ist eine Entwicklung der Komponente ***"Einstellungen"*** sehr wichtig. Schüler dieser Altersstufe sollten langsam an ein bewusstes und beharrliches Arbeiten herangeführt werden.

Um die ***Fähigkeit zum problemlösenden Denken*** zu entwickeln, kann man versuchen, den Schülern gewisse ***heuristische Vorgehensweisen*** zu vermitteln.
Wir werden im Abschnitt 2.1. einen Überblick über diejenigen heuristischen Vorgehensweisen geben, für deren Vermittlung unser für die Klassen 5 bis 10 angebotenes Material Vorschläge enthält, und dabei werden wir vermerken, bei welchen dieser Vorgehensweisen eine Vermittlung bereits in der Grundschule beginnen kann.

Es gibt viele Knobelaufgaben, die ohne jegliche mathematische Voraussetzungen gelöst werden können und mit deren Hilfe man ebenfalls heuristisches Vorgehen lehren kann. Dies trifft auch für eine Reihe von Spielen zu, die in /12/ besprochen werden. Mit Hilfe solcher Aufgaben und Spiele kann man bereits das Denkvermögen bei Vorschulkindern entwickeln.
Selbstverständlich ist eine heuristische Schulung auch in allen anderen Wissenschaften möglich. Die Mathematik hat diesbezüglich vor allem den Vorteil, bereits in der Grundschule als Unterrichtsfach aufzutreten, und diesen Vorteil müssen wir auch nutzen.

Heuristisches Vorgehen lässt sich nur beim Lösen ***problemhafter Aufgaben*** entwickeln. Im Gegensatz zu algorithmischen Verfahren ist heuristisches Vorgehen nicht resultativ und determiniert, d.h. es führt nicht mit Sicherheit zu einer Lösung und die Reihenfolge der Lösungsschritte ist nicht eindeutig festgelegt.

Die im Mathematikunterricht der Grundschule vermittelten ***Kenntnisse und Fertigkeiten*** erweitern sehr stark die Möglichkeiten, beim Lösen problemhafter Aufgaben heuristische Vorgehensweisen zu vermitteln. Daher dient ein Festigen und Vertiefen des diesbezüglichen Unterrichtsstoffs auch den Interessen der heuristischen Schulung. Das Vermitteln von Wissen und Können, das nicht zum Unterrichtsstoff gehört, zählt dagegen nicht zu den Zielen einer Arbeitsgemeinschaft der Klasse 3. Hierauf werden wir im Abschnitt 2.2. eingehen.

9

2. ZIELE UND INHALTE VON ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IN KLASSE 3

Beim systematischen Fördern mathematisch interessierter und begabter Schüler geht es in dieser Klassenstufe vor allem um die Entwicklung der Komponente "Denkfähigkeit".
Die effektivste Art der Förderung besteht dabei darin, die Schüler stets an der oberen Grenze ihrer Leistungsfähigkeit zu fordern.

Zwar kann man davon ausgehen, dass die geförderten Schüler Interesse an der Mathematik und Freude am Knobeln mitbringen. Dennoch ist eine Entwicklung der Komponente "Einstellungen" sehr wichtig. Schüler dieser Altersstufe sollten langsam an ein bewusstes und beharrliches Arbeiten herangeführt werden.

Um die Fähigkeit zum problemlösenden Denken zu entwickeln, kann man versuchen, den Schülern gewisse heuristische Vorgehensweisen zu vermitteln.
Wir werden im Abschnitt 2.1. einen Überblick über diejenigen heuristischen Vorgehensweisen geben, für deren Vermittlung unser für die Klassen 5 bis 10 angebotenes Material Vorschläge enthält, und dabei werden wir vermerken, bei welchen dieser Vorgehensweisen eine Vermittlung bereits in der Grundschule beginnen kann.

Es gibt viele Knobelaufgaben, die ohne jegliche mathematische Voraussetzungen gelöst werden können und mit deren Hilfe man ebenfalls heuristisches Vorgehen lehren kann. Dies trifft auch für eine Reihe von Spielen zu, die in /12/ besprochen werden. Mit Hilfe solcher Aufgaben und Spiele kann man bereits das Denkvermögen bei Vorschulkindern entwickeln.
Selbstverständlich ist eine heuristische Schulung auch in allen anderen Wissenschaften möglich. Die Mathematik hat diesbezüglich vor allem den Vorteil, bereits in der Grundschule als Unterrichtsfach aufzutreten, und diesen Vorteil müssen wir auch nutzen.

Heuristisches Vorgehen lässt sich nur beim Lösen problemhafter Aufgaben entwickeln. Im Gegensatz zu algorithmischen Verfahren ist heuristisches Vorgehen nicht resultativ und determiniert, d.h. es führt nicht mit Sicherheit zu einer Lösung und die Reihenfolge der Lösungsschritte ist nicht eindeutig festgelegt.

Die im Mathematikunterricht der Grundschule vermittelten Kenntnisse und Fertigkeiten erweitern sehr stark die Möglichkeiten, beim Lösen problemhafter Aufgaben heuristische Vorgehensweisen zu vermitteln. Daher dient ein Festigen und Vertiefen des diesbezüglichen Unterrichtsstoffs auch den Interessen der heuristischen Schulung. Das Vermitteln von Wissen und Können, das nicht zum Unterrichtsstoff gehört, zählt dagegen nicht zu den Zielen einer Arbeitsgemeinschaft der Klasse 3. Hierauf werden wir im Abschnitt 2.2. eingehen.

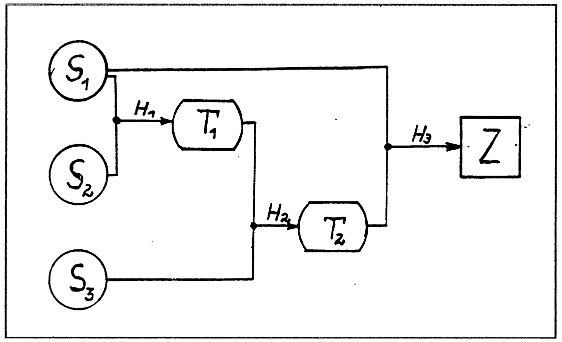
2.1. Heuristische Vorgehensweisen

Heuristisches Vorgehen ist bis zu einem gewissen Grade lehrbar. Es reicht von der Beachtung sehr allgemeiner ***Prinzipien*** über den Einsatz von ***Strategien*** bis zur Anwendung relativ einfach anzueignender heuristischer ***Hilfsmittel*** .

Für uns besteht heuristische Schulung vor allem im Vermitteln gewisser ***Fragen und Impulse***, die vom konkreten Inhalt der zu lösenden Aufgabe weitgehend unabhängig sind. Wir knüpfen diesbezüglich an die Arbeiten /4/, und /5/ von G. POLYA an und greifen auf die in /15/ festgehaltenen Auffassungen zurück.
Wir vertreten die Ansicht, dass das bewusste Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen in Form von Verfahrenskenntnissen die Entwicklung der Kreativität der Schüler nicht behindert, sondern auf einem höheren Schwierigkeitsniveau sogar unterstützt, wenn beim Vermitteln gewisse Prinzipien beachtet werden (vgl. hierzu Abschnitt 3.) .

Wir möchten hier als Zusammenfassung ein Material wiedergeben, das unter der Bezeichnung ***"Einige Regeln zum Lösen problemhafter Aufgaben"*** für die Hand des Lehrers entwickelt wurde.

Eine jede *Aufgabe* enthält Informationen über ***"Start"*** und ***"Ziel"*** .
Eine Aufgabe lösen heißt, auf irgendeine Weise irgendeinen Weg vom Start zum Ziel zu finden.
Dieser Weg führt in der Regel über gewisse ***"Teilziele"*** die mit Hilfe gewisser ***"Hilfsmittel"*** erreicht werden.



In solchen Fällen lässt sich der Lösungsplan in Form eines ***"Lösungsgraphen"*** festhalten. Die Belegung der Knoten und der Kanten eines solchen Graphen ist der nebenstehenden Skizze zu entnehmen.

Es ist zweckmäßig, zwischen ***"Beweisaufgaben"*** und zwei Arten von problemhaften ***"Bestimmungsaufgaben"*** zu unterscheiden:

Aufgabe	*Start*	*Ziel*	*Teilziele*	*Hilfsmittel*
Beweis-aufgabe	Voraussetzungen	Behauptung	"Feststellungen"	Sätze, Definitionen, Umformungsregeln u.ä.
	Gegebenes	Gesuchtes		
Bestim-mungs-	Daten (nebst Beziehungen)	Unbekannte	Hilfsgrößen	Formeln, Umformungsregeln, Sätze, Definitionen u.ä.
aufgabe	(Konjunktion von) Aussageformen (Bedingungen)	Erfüllungsmenge	"Hilfsmengen"; vereinfachte Aussageformen	Umformungsregeln, Sätze, Definitionen, logische Schlußregeln u.ä.

10

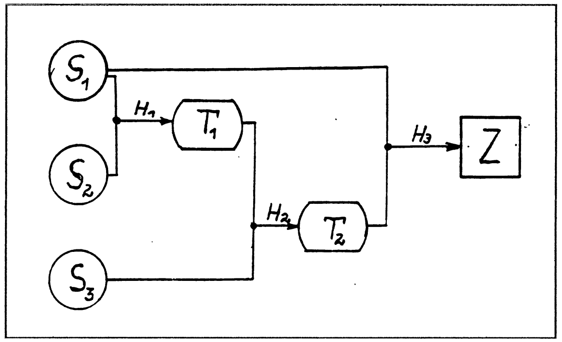
2.1. Heuristische Vorgehensweisen

Heuristisches Vorgehen ist bis zu einem gewissen Grade lehrbar. Es reicht von der Beachtung sehr allgemeiner ***Prinzipien*** über den Einsatz von ***Strategien*** bis zur Anwendung relativ einfach anzueignender heuristischer ***Hilfsmittel*** .

Für uns besteht heuristische Schulung vor allem im Vermitteln gewisser ***Fragen und Impulse***, die vom konkreten Inhalt der zu lösenden Aufgabe weitgehend unabhängig sind. Wir knüpfen diesbezüglich an die Arbeiten /4/, und /5/ von G. POLYA an und greifen auf die in /15/ festgehaltenen Auffassungen zurück.
Wir vertreten die Ansicht, dass das bewusste Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen in Form von Verfahrenskenntnissen die Entwicklung der Kreativität der Schüler nicht behindert, sondern auf einem höheren Schwierigkeitsniveau sogar unterstützt, wenn beim Vermitteln gewisse Prinzipien beachtet werden (vgl. hierzu Abschnitt 3.) .

Wir möchten hier als Zusammenfassung ein Material wiedergeben, das unter der Bezeichnung ***"Einige Regeln zum Lösen problemhafter Aufgaben"*** für die Hand des Lehrers entwickelt wurde.

Eine jede *Aufgabe* enthält Informationen über ***"Start"*** und ***"Ziel"*** .
Eine Aufgabe lösen heißt, auf irgendeine Weise irgendeinen Weg vom Start zum Ziel zu finden.
Dieser Weg führt in der Regel über gewisse ***"Teilziele"*** die mit Hilfe gewisser ***"Hilfsmittel"*** erreicht werden.



In solchen Fällen lässt sich der Lösungsplan in Form eines ***"Lösungsgraphen"*** festhalten. Die Belegung der Knoten und der Kanten eines solchen Graphen ist der nebenstehenden Skizze zu entnehmen.

Es ist zweckmäßig, zwischen ***"Beweisaufgaben"*** und zwei Arten von problemhaften ***"Bestimmungsaufgaben"*** zu unterscheiden:

Aufgabe	*Start*	*Ziel*	*Teilziele*	*Hilfsmittel*
Beweis-aufgabe	Voraussetzungen	Behauptung	"Feststellungen"	Sätze, Definitionen, Umformungsregeln u.ä.
	Gegebenes	Gesuchtes		
Bestim-mungs-	Daten (nebst Beziehungen)	Unbekannte	Hilfsgrößen	Formeln, Umformungsregeln, Sätze, Definitionen u.ä.
aufgabe	(Konjunktion von) Aussageformen (Bedingungen)	Erfüllungsmenge	"Hilfsmengen"; vereinfachte Aussageformen	Umformungsregeln, Sätze, Definitionen, logische Schlußregeln u.ä.

Im Grundschulbereich kommen beide Typen von Bestimmungsaufgaben vor. Die ***Sachaufgaben*** gehören überwiegend zum erstgenannten Typ.
Obwohl Beweisaufgaben erst ab Klasse 6 auftreten, kann man bereits in der Grundschule von leistungsstarken Schülern ein ***Begründen*** als Vorform des Beweisens verlangen.

Allgemeine Regeln zum Lösen problemhafter Aufgaben

(I) ***Erfassen der Aufgabe***

(1)
- Sind alle vorkommenden Begriffe klar?
- Ist eine günstige ***Veranschaulichung*** möglich?
  (Figur, Skizze, Tabelle o.ä.)
- ***Start*** und ***Ziel*** der Aufgabe ermitteln!
  (Voraussetzungen - Behauptung ; Gegebenes - Gesuchtes)
- ***Günstige Bezeichnungen*** einführen!
  Zweckmäßige Symbolik wählen, um so Start und Ziel übersichtlich festhalten zu können!

Diese Regeln sind (abgesehen von dem Ermitteln von Voraussetzungen und Behauptung) auch in der Grundschule anwendbar.

(II) ***Finden eines Lösungsplans***
- Wurde eine ***ähnliche Aufgabe*** bereits gelöst?
  Welche Vorgehensweisen zum Lösen solcher Aufgaben sind bekannt?
- Erfolgversprechende Vorgehensweise auswählen!

(2.1) ***Vorwärtsarbeiten (VA)***
- Welche ***ableitbaren Teilziele*** (Feststellungen, Hilfsgrößen) lassen sich von den Voraussetzungen bzw. den gegebenen Größen ausgehend unmittelbar erreichen (ableiten, berechnen)?
  Begründung!
  - ° Welche ***Hilfsmittel*** (Sätze, Definitionen, Formeln u.ä.) enthalten die Voraussetzungen bzw. die gegebenen Größen?
    (Diese Hilfsmittel können ableitbare Teilziele liefern!)

(2.2) ***Rückwärtsarbeiten (RA)***
- Von welchen ***hinreichenden Teilzielen*** aus ließe sich das Ziel unmittelbar erreichen?
  Begründung!
  - ° Welche ***Hilfsmittel*** (Sätze, Formeln, Definitionen u.ä.) enthalten die Behauptung bzw. die gesuchte Größe?
    (Diese Hilfsmittel können hinreichende Teilziele liefern!)

Man arbeite von abgeleiteten Teilzielen aus vorwärts, von hinreichenden Teilzielen aus rückwärts, bis ein Weg vom Start zum Ziel gefunden wurde.

(3) ***Grundmethode*** zum Lösen von Bestimmungsaufgaben ***(GI)***
- Welche ***Beziehungen*** (das sind allgemein Aussageformen, oft ***Gleichungen***) bestehen ***zwischen*** den ***gegebenen***, den ***gesuchten und*** u.U. noch günstig gewählten ***Hilfsgrößen*** ?

11

Im Grundschulbereich kommen beide Typen von Bestimmungsaufgaben vor. Die ***Sachaufgaben*** gehören überwiegend zum erstgenannten Typ.
Obwohl Beweisaufgaben erst ab Klasse 6 auftreten, kann man bereits in der Grundschule von leistungsstarken Schülern ein ***Begründen*** als Vorform des Beweisens verlangen.

Allgemeine Regeln zum Lösen problemhafter Aufgaben

(I) ***Erfassen der Aufgabe***

(1)
- Sind alle vorkommenden Begriffe klar?
- Ist eine günstige ***Veranschaulichung*** möglich?
  (Figur, Skizze, Tabelle o.ä.)
- ***Start*** und ***Ziel*** der Aufgabe ermitteln!
  (Voraussetzungen - Behauptung ; Gegebenes - Gesuchtes)
- ***Günstige Bezeichnungen*** einführen!
  Zweckmäßige Symbolik wählen, um so Start und Ziel übersichtlich festhalten zu können!

Diese Regeln sind (abgesehen von dem Ermitteln von Voraussetzungen und Behauptung) auch in der Grundschule anwendbar.

(II) ***Finden eines Lösungsplans***
- Wurde eine ***ähnliche Aufgabe*** bereits gelöst?
  Welche Vorgehensweisen zum Lösen solcher Aufgaben sind bekannt?
- Erfolgversprechende Vorgehensweise auswählen!

(2.1) ***Vorwärtsarbeiten (VA)***
- Welche ***ableitbaren Teilziele*** (Feststellungen, Hilfsgrößen) lassen sich von den Voraussetzungen bzw. den gegebenen Größen ausgehend unmittelbar erreichen (ableiten, berechnen)?
  Begründung!
  - ° Welche ***Hilfsmittel*** (Sätze, Definitionen, Formeln u.ä.) enthalten die Voraussetzungen bzw. die gegebenen Größen?
    (Diese Hilfsmittel können ableitbare Teilziele liefern!)

(2.2) ***Rückwärtsarbeiten (RA)***
- Von welchen ***hinreichenden Teilzielen*** aus ließe sich das Ziel unmittelbar erreichen?
  Begründung!
  - ° Welche ***Hilfsmittel*** (Sätze, Formeln, Definitionen u.ä.) enthalten die Behauptung bzw. die gesuchte Größe?
    (Diese Hilfsmittel können hinreichende Teilziele liefern!)

Man arbeite von abgeleiteten Teilzielen aus vorwärts, von hinreichenden Teilzielen aus rückwärts, bis ein Weg vom Start zum Ziel gefunden wurde.

(3) ***Grundmethode*** zum Lösen von Bestimmungsaufgaben ***(GI)***
- Welche ***Beziehungen*** (das sind allgemein Aussageformen, oft ***Gleichungen***) bestehen ***zwischen*** den ***gegebenen***, den ***gesuchten und*** u.U. noch günstig gewählten ***Hilfsgrößen*** ?

° Die Anzahl der benötigten Gleichungen ist gleich der Summe der Anzahlen von gesuchten Größen und Hilfsgrößen.

- Eliminiere die Hilfsgrößen!

Um von gegebenen oder gefundenen Aussageformen (Bedingungen, Beziehungen, Gleichungen o.ä.) zur ***gesuchten Erfüllungsmenge*** zu gelangen, kann man folgende beiden Wege einschlagen:

(3.1) ***Ermittle zu jeder Bedingung*** (Beziehung, Aussageform) *die* zugehörige ***Erfüllungsmenge***
Bilde den ***Durchschnitt dieser Erfüllungsmengen*** !

° Die Elemente endlicher Erfüllungsmengen kann man im Prinzip stets durch "***systematisches Erfassen aller möglichen Fälle***" ermitteln.
Dabei ist es oft zweckmäßig, ***Tabellen*** zu verwenden.

° Untersuche zuerst die "informativste" Bedingung, die die "kleinste" Erfüllungsmenge besitzt (d.h. die das Suchfeld am stärksten einengt).

° Man kann auch aus der Erfüllungsmenge einer dieser Bedingungen ***systematisch*** diejenigen ***Elemente aussondern,*** die eine der restlichen Bedingungen nicht erfüllen.

(3.2) ***Forme die Bedingungen*** (Beziehungen, Aussageformen o.ä.) günstig ***um***, ziehe zweckmäßige ***Folgerungen*** aus ihnen und ermittle nach einer solchen ***Vereinfachung*** die gesuchte Erfüllungsmenge.
(Dies ist eine spezielle Form des Vorwärtsarbeitens.)

(4) Kannst du eine Aufgabe nicht lösen, dann wende dich zunächst einer günstig gewählten ***verwandten, leichteren Aufgabe*** zu!

(4.1) Versuche die Aufgabe für einen ***Spezialfall*** zun lösen! Vielleicht helfen die so gefundenen Lösungsideen auch beim Lösen der Ausgangsaufgabe weiter.
Auch die Beschäftigung mit ***Verallgemeinerungen, Grenzfällen*** und ***analogen Fällen*** kann diesem Zweck dienen.
Variiere den *Start* oder das *Ziel* !

(4.2) Ermittle eine ***Hilfsaufgabe***, deren Lösung das Lösen der Ausgangsaufgabe mit Sicherheit ermöglichen würde!
(Auf solche Hilfsaufgaben stößt man oft beim Rückwärtsarbeiten.)

(5) Übersetze (***transformiere***) die Aufgabe in die Sprache einer günstig gewählten mathematischen Disziplin!
Löse die (gleichbedeutende) ***transformierte Aufgabe*** !
[Bei "nichtmathematisch" formulierten Sach- und Anwendungaufgaben muss man so vorgehen; bei "innermathematischen" Aufgaben ist es manchmal günstig, so vorzugehen.
Beim Transformieren wendet man vor allem die Regeln (2.1), (2.2) und (3) an.]

(6) Kannst du eine Aufgabe trotz aller Anstrengungen nicht lösen, dann muss du zunächst deine ***Kenntnisse erweitern***. Besorge dir aus einschlägiger *Literatur* neue Anregungen und neue Hilfsmittel.

12

° Die Anzahl der benötigten Gleichungen ist gleich der Summe der Anzahlen von gesuchten Größen und Hilfsgrößen.

- Eliminiere die Hilfsgrößen!

Um von gegebenen oder gefundenen Aussageformen (Bedingungen, Beziehungen, Gleichungen o.ä.) zur ***gesuchten Erfüllungsmenge*** zu gelangen, kann man folgende beiden Wege einschlagen:

(3.1) ***Ermittle zu jeder Bedingung*** (Beziehung, Aussageform) *die* zugehörige ***Erfüllungsmenge***
Bilde den ***Durchschnitt dieser Erfüllungsmengen*** !

° Die Elemente endlicher Erfüllungsmengen kann man im Prinzip stets durch "***systematisches Erfassen aller möglichen Fälle***" ermitteln.
Dabei ist es oft zweckmäßig, ***Tabellen*** zu verwenden.

° Untersuche zuerst die "informativste" Bedingung, die die "kleinste" Erfüllungsmenge besitzt (d.h. die das Suchfeld am stärksten einengt).

° Man kann auch aus der Erfüllungsmenge einer dieser Bedingungen ***systematisch*** diejenigen ***Elemente aussondern,*** die eine der restlichen Bedingungen nicht erfüllen.

(3.2) ***Forme die Bedingungen*** (Beziehungen, Aussageformen o.ä.) günstig ***um***, ziehe zweckmäßige ***Folgerungen*** aus ihnen und ermittle nach einer solchen ***Vereinfachung*** die gesuchte Erfüllungsmenge.
(Dies ist eine spezielle Form des Vorwärtsarbeitens.)

(4) Kannst du eine Aufgabe nicht lösen, dann wende dich zunächst einer günstig gewählten ***verwandten, leichteren Aufgabe*** zu!

(4.1) Versuche die Aufgabe für einen ***Spezialfall*** zun lösen! Vielleicht helfen die so gefundenen Lösungsideen auch beim Lösen der Ausgangsaufgabe weiter.
Auch die Beschäftigung mit ***Verallgemeinerungen, Grenzfällen*** und ***analogen Fällen*** kann diesem Zweck dienen.
Variiere den *Start* oder das *Ziel* !

(4.2) Ermittle eine ***Hilfsaufgabe***, deren Lösung das Lösen der Ausgangsaufgabe mit Sicherheit ermöglichen würde!
(Auf solche Hilfsaufgaben stößt man oft beim Rückwärtsarbeiten.)

(5) Übersetze (***transformiere***) die Aufgabe in die Sprache einer günstig gewählten mathematischen Disziplin!
Löse die (gleichbedeutende) ***transformierte Aufgabe*** !
[Bei "nichtmathematisch" formulierten Sach- und Anwendungaufgaben muss man so vorgehen; bei "innermathematischen" Aufgaben ist es manchmal günstig, so vorzugehen.
Beim Transformieren wendet man vor allem die Regeln (2.1), (2.2) und (3) an.]

(6) Kannst du eine Aufgabe trotz aller Anstrengungen nicht lösen, dann muss du zunächst deine ***Kenntnisse erweitern***. Besorge dir aus einschlägiger *Literatur* neue Anregungen und neue Hilfsmittel.

Von den Impulsblöcken, die beim Finden eines Lösungsplans nützlich sein können, sind nur die folgenden für die Förderung von Schülern in der Grundschule bedeutsam:

Als Anwendung des ***Analogieprinzips*** die Suche nach einer ***ähnlichen Aufgabe***, die bereits früher gelöst wurde.

Wichtig ist der Impulsblock (2.1) zum ***Vorwärtsarbeiten*** mit Ausnahme der Anwendung auf Beweisaufgaben.

Leider nur In relativ seltenen Fällen ist Impulsblock (2.2) zum ***Rückwärtsarbeiten*** bei Bestimmungsaufgaben anwendbar. Jede derartige Möglichkeit sollte jedoch genutzt werden, da diese Strategie ab Klasse 5 von außerordentlich wichtiger Bedeutung ist.

Impulsblock (3) ist nur bei relativ wenigen (und oft recht schwierigen) Aufgaben anwendbar, wenn es darum geht, gegebene Beziehungen oder Bedingungen ***in die Sprache der Gleichungen/Ungleichungen*** zu ***übersetzen.***

Bei Impulsblock (3.1) ist der Unterimpuls, der auf das ***systematische Erfassen aller möglichen Fälle*** verweist und die Verwendung von ***Tabellen*** empfiehlt, von sehr großer Bedeutung.

Aus dem Impulsblock (3.2) ist das (inhaltliche) ***Folgern aus gegebenen Bedingungen*** bedeutsam.

Die Impulsblöcke (4) und (4.1) sind kaum anwendbar.
Bei Impulsblock (4.2) ist nicht das selbständige Ermitteln, wohl aber das ***Nutzen einer*** vorher behandelten ***Hilfsaufgabe*** anwendbar.

Von Impulsblock (5) ist nur das bereits erwähnte Übersetzen in die Sprache der Gleichungen oder Ungleichungen einsetzbar.

Impulsblock (6) ist noch nicht anwendbar.

(III) ***Ausführen des Plans; Darstellen der Lösung***
(Dies ist eine erlernbare Technik, bei der heuristische Vorgehensweisen keine Rolle spielen.)

Hier muss man in Grundschulen sorgfältig überlegen, inwieweit eine schriftliche Darstellung günstig ist bzw. in welchen Fällen man sich mit einer mündlichen Darstellung begnügen kann.

(IV) ***Kontrolle und Auswertung***

- Kontrolliere das Resultat, den Beweis!
  Wurde jeder Lösungsschritt hinreichend begründet?
  (Manchmal ist eine ***Probe am Spezialfall*** sehr nützlich.)
- Überlege, welche heuristische Vorgehensweise dir beim Lösen der Aufgabe besonders geholfen hat! Merke es dir!

  Bei welchen anderen Aufgaben würdest du ***analog*** vorgehen?

13

Von den Impulsblöcken, die beim Finden eines Lösungsplans nützlich sein können, sind nur die folgenden für die Förderung von Schülern in der Grundschule bedeutsam:

Als Anwendung des ***Analogieprinzips*** die Suche nach einer ***ähnlichen Aufgabe***, die bereits früher gelöst wurde.

Wichtig ist der Impulsblock (2.1) zum ***Vorwärtsarbeiten*** mit Ausnahme der Anwendung auf Beweisaufgaben.

Leider nur In relativ seltenen Fällen ist Impulsblock (2.2) zum ***Rückwärtsarbeiten*** bei Bestimmungsaufgaben anwendbar. Jede derartige Möglichkeit sollte jedoch genutzt werden, da diese Strategie ab Klasse 5 von außerordentlich wichtiger Bedeutung ist.

Impulsblock (3) ist nur bei relativ wenigen (und oft recht schwierigen) Aufgaben anwendbar, wenn es darum geht, gegebene Beziehungen oder Bedingungen ***in die Sprache der Gleichungen/Ungleichungen*** zu ***übersetzen.***

Bei Impulsblock (3.1) ist der Unterimpuls, der auf das ***systematische Erfassen aller möglichen Fälle*** verweist und die Verwendung von ***Tabellen*** empfiehlt, von sehr großer Bedeutung.

Aus dem Impulsblock (3.2) ist das (inhaltliche) ***Folgern aus gegebenen Bedingungen*** bedeutsam.

Die Impulsblöcke (4) und (4.1) sind kaum anwendbar.
Bei Impulsblock (4.2) ist nicht das selbständige Ermitteln, wohl aber das ***Nutzen einer*** vorher behandelten ***Hilfsaufgabe*** anwendbar.

Von Impulsblock (5) ist nur das bereits erwähnte Übersetzen in die Sprache der Gleichungen oder Ungleichungen einsetzbar.

Impulsblock (6) ist noch nicht anwendbar.

(III) ***Ausführen des Plans; Darstellen der Lösung***
(Dies ist eine erlernbare Technik, bei der heuristische Vorgehensweisen keine Rolle spielen.)

Hier muss man in Grundschulen sorgfältig überlegen, inwieweit eine schriftliche Darstellung günstig ist bzw. in welchen Fällen man sich mit einer mündlichen Darstellung begnügen kann.

(IV) ***Kontrolle und Auswertung***

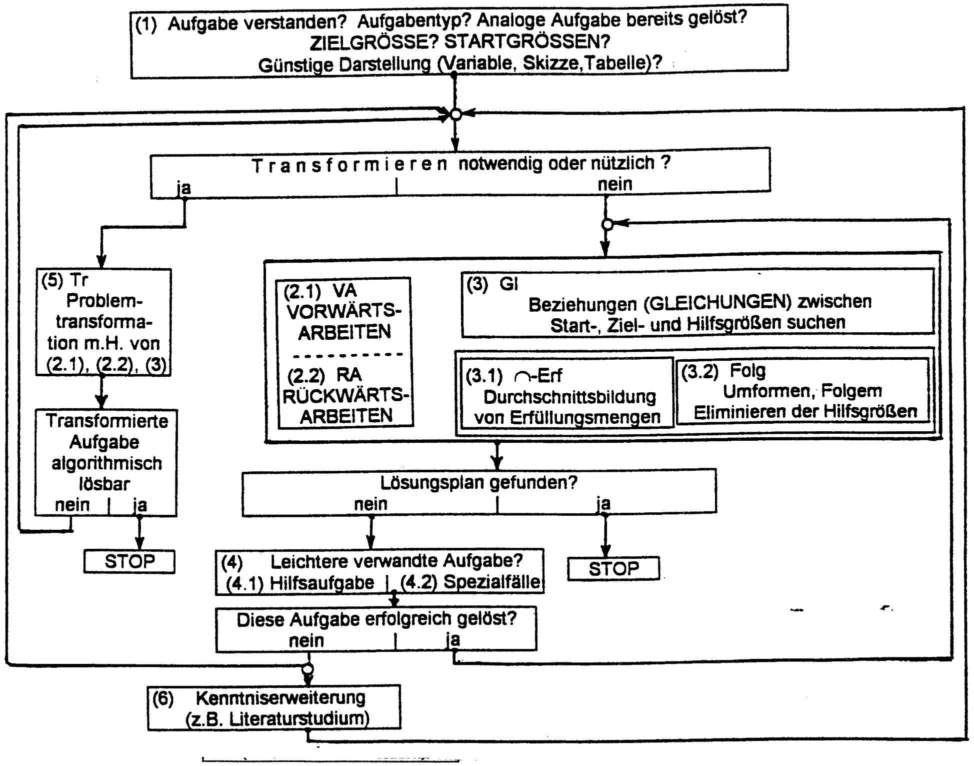
- Kontrolliere das Resultat, den Beweis!
  Wurde jeder Lösungsschritt hinreichend begründet?
  (Manchmal ist eine ***Probe am Spezialfall*** sehr nützlich.)
- Überlege, welche heuristische Vorgehensweise dir beim Lösen der Aufgabe besonders geholfen hat! Merke es dir!

  Bei welchen anderen Aufgaben würdest du ***analog*** vorgehen?

- Wurden alle gegebenen Größen oder Bedingungen bzw. alle Voraussetzungen für die Lösung benötigt?
- Formuliere eine ***neue, verwandte Aufgabe*** (eine analoge oder eine verallgemeinerte Aufgabe; eine wahre Umkehrung des bewiesenen Satzes; o.ä.) !

Diese letzte Phase des Problembearbeitungsprozesses sollte auf keinen Fall unterbleiben! In Grundschulen sind hier nur ***Proben*** und ***Proben am Text*** wichtig.

Folgendes Schema hält fest, in welchen Reihenfolgen diese durchnumerierten "Impulsblöcke" durchlaufen werden können, wobei in der Regel "Schleifen" auftauchen.
Der Prozess der Lösungsfindung wird durch eine "STOP" beendet, wenn ein Lösungsplan gefunden wurde.
Da es sich hierbei um einen heuristischen Prozess handelt, wird dieses Ziel keineswegs mit Sicherheit erreicht.



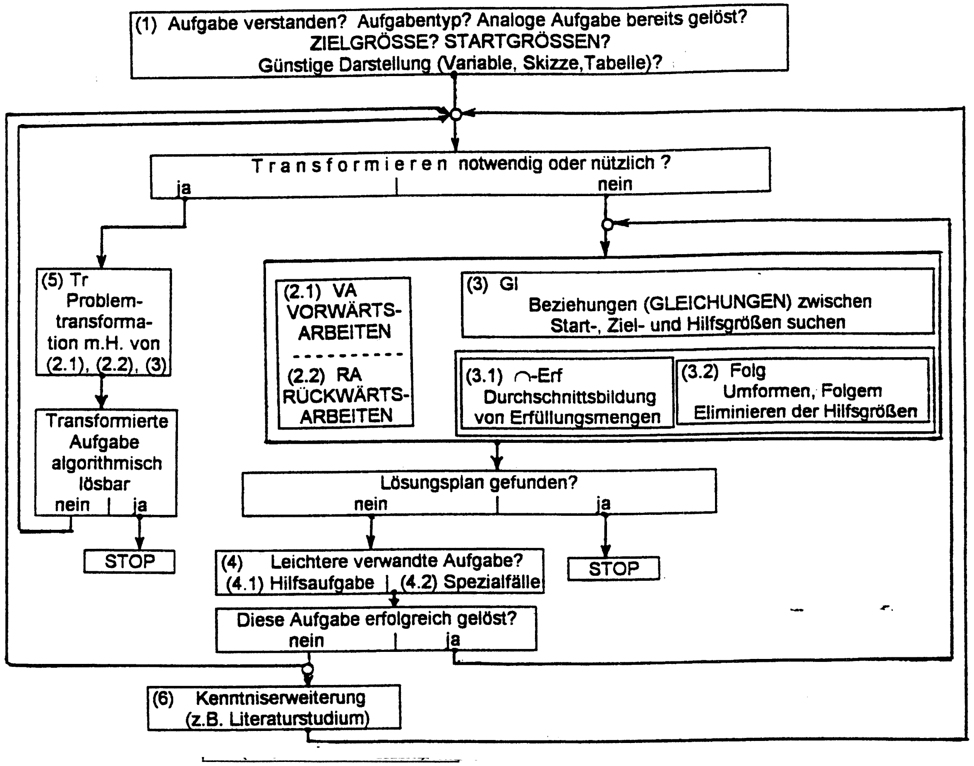
Aus diesem "***allgemeinen Regelsystem***" kann man durch Interpretation und Konkretisierung der vorkommenden Begriffe sowie durch spezifische Ergänzungen "***spezielle Regelsysteme***" für das Lösen der spezieller Aufgabenarten gewinnen.
Wie dies geschehen kann wird in Abschnitt 5. erläutert.

14

- Wurden alle gegebenen Größen oder Bedingungen bzw. alle Voraussetzungen für die Lösung benötigt?
- Formuliere eine ***neue, verwandte Aufgabe*** (eine analoge oder eine verallgemeinerte Aufgabe; eine wahre Umkehrung des bewiesenen Satzes; o.ä.) !

Diese letzte Phase des Problembearbeitungsprozesses sollte auf keinen Fall unterbleiben! In Grundschulen sind hier nur ***Proben*** und ***Proben am Text*** wichtig.

Folgendes Schema hält fest, in welchen Reihenfolgen diese durchnumerierten "Impulsblöcke" durchlaufen werden können, wobei in der Regel "Schleifen" auftauchen.
Der Prozess der Lösungsfindung wird durch eine "STOP" beendet, wenn ein Lösungsplan gefunden wurde.
Da es sich hierbei um einen heuristischen Prozess handelt, wird dieses Ziel keineswegs mit Sicherheit erreicht.



Aus diesem "***allgemeinen Regelsystem***" kann man durch Interpretation und Konkretisierung der vorkommenden Begriffe sowie durch spezifische Ergänzungen "***spezielle Regelsysteme***" für das Lösen der spezieller Aufgabenarten gewinnen.
Wie dies geschehen kann wird in Abschnitt 5. erläutert.

Wichtig ist, dass die Schüler erkennen, dass man beim Lösen von inhaltlich sehr verschiedenen speziellen Aufgabenarten immer wieder nur einige wenige heuristische Vorgehensweisen einsetzt.
Dies kann erreicht werden, wenn man sich beim Formulieren der Impulse einer in gewisser Weise "***genormten Impulsgebung***" bedient.

2.1. Fertigkeiten, Kenntnisse und logische Grundlagen

Wie bereits erwähnt, stellen wir uns beim Fördern mathematisch interessierter Schüler nicht das Ziel, Kenntnisse und Fertigkeiten zu vermitteln, die nicht zum Unterrichtsstoff gehören. Nur bei der Vorbereitung auf einen Frühstart muss sich der Schüler Teile des Unterrichtsstoffs des nächsten Schuljahrs vorzeitig aneignen.

Wohl aber sollte ein ***Festigen und Vertiefen des Unterrichtsstoffs*** erfolgen. Vor allem sind Fertigkeiten im mündlichen und schriftlichen Rechnen beim Lösen vieler Aufgaben von großer Bedeutung. Dabei sollte man die Schüler stets auffordern, möglichst ***geschickt*** zu ***rechnen*** und Rechenvorteile auszunützen.
Im Lehrplan Grundschule, Mathematik, Klassen 1 - 4, Sächsisches Staatsministerium für Kultus, 1992 wird auf den Seiten 31 und 32 u.a. gefordert: "Gleichungen und Ungleichungen mit einem Platzhalter (Als Platzhalter können auch Buchstaben verwendet werden.); ... Erste Aufgaben mit Klammern, Regel zum Klammerrechnen)".

Ferner muss der Lehrer bestrebt sein, die Schüler mit einigen ***Begriffen aus der Logik*** vertraut zu machen, und zwar dadurch, dass er diese stets korrekt verwendet.

Zunächst geht es um die Begriffe "***wahre Aussage***", "***falsche Aussage***".
Die Schüler sollen wissen, dass man falsche Allaussagen durch ein Gegenbeispiel widerlegen kann und dass man stets bestrebt sein sollte, wahre Allaussagen zu begründen.

Aus dem Unterricht kennen die Schüler sowohl eindeutig lösbare Aufgaben als auch Aufgaben mit mehreren (in der Regel endlich vielen) Lösungen. Man sollte sie aber auch mit Aufgaben konfrontieren, die *keine* Lösung besitzen.
In diesem Zusammenhang sollte man auf die unterschiedliche Bedeutung der Begriffe "***ein***", "***genau ein***", "***mindestens ein***", "***höchstens ein***" aufmerksam machen.

Es gibt Aufgaben, in denen ausdrücklich gefordert wird "***alle Lösungen***" zu ermitteln. Hier müssen die Schüler wissen, dass es nicht genügt, die Lösungen anzugeben und durch ***Proben*** nachzuweisen, dass es tatsächlich Lösungen sind, sondern dass auch ein ***Einzigkeitsnachweis*** gefordert wird, in dem gezeigt werden muss, dass es keine weiteren Lösungen geben kann.
Auf diese Problematik muss vor allem beim ***systematischen Probieren*** eingegangen werden, das sich diesbezüglich von dem wahllosen Probieren und dem Erraten von Lösungen unterscheidet, dass stets explizit anzugeben ist, welches *Ordnungsprinzip* verwendet wurde, das absichert, dass keine Lösungen übersehen wurden.

15

Wichtig ist, dass die Schüler erkennen, dass man beim Lösen von inhaltlich sehr verschiedenen speziellen Aufgabenarten immer wieder nur einige wenige heuristische Vorgehensweisen einsetzt.
Dies kann erreicht werden, wenn man sich beim Formulieren der Impulse einer in gewisser Weise "***genormten Impulsgebung***" bedient.

2.1. Fertigkeiten, Kenntnisse und logische Grundlagen

Wie bereits erwähnt, stellen wir uns beim Fördern mathematisch interessierter Schüler nicht das Ziel, Kenntnisse und Fertigkeiten zu vermitteln, die nicht zum Unterrichtsstoff gehören. Nur bei der Vorbereitung auf einen Frühstart muss sich der Schüler Teile des Unterrichtsstoffs des nächsten Schuljahrs vorzeitig aneignen.

Wohl aber sollte ein ***Festigen und Vertiefen des Unterrichtsstoffs*** erfolgen. Vor allem sind Fertigkeiten im mündlichen und schriftlichen Rechnen beim Lösen vieler Aufgaben von großer Bedeutung. Dabei sollte man die Schüler stets auffordern, möglichst ***geschickt*** zu ***rechnen*** und Rechenvorteile auszunützen.
Im Lehrplan Grundschule, Mathematik, Klassen 1 - 4, Sächsisches Staatsministerium für Kultus, 1992 wird auf den Seiten 31 und 32 u.a. gefordert: "Gleichungen und Ungleichungen mit einem Platzhalter (Als Platzhalter können auch Buchstaben verwendet werden.); ... Erste Aufgaben mit Klammern, Regel zum Klammerrechnen)".

Ferner muss der Lehrer bestrebt sein, die Schüler mit einigen ***Begriffen aus der Logik*** vertraut zu machen, und zwar dadurch, dass er diese stets korrekt verwendet.

Zunächst geht es um die Begriffe "***wahre Aussage***", "***falsche Aussage***".
Die Schüler sollen wissen, dass man falsche Allaussagen durch ein Gegenbeispiel widerlegen kann und dass man stets bestrebt sein sollte, wahre Allaussagen zu begründen.

Aus dem Unterricht kennen die Schüler sowohl eindeutig lösbare Aufgaben als auch Aufgaben mit mehreren (in der Regel endlich vielen) Lösungen. Man sollte sie aber auch mit Aufgaben konfrontieren, die *keine* Lösung besitzen.
In diesem Zusammenhang sollte man auf die unterschiedliche Bedeutung der Begriffe "***ein***", "***genau ein***", "***mindestens ein***", "***höchstens ein***" aufmerksam machen.

Es gibt Aufgaben, in denen ausdrücklich gefordert wird "***alle Lösungen***" zu ermitteln. Hier müssen die Schüler wissen, dass es nicht genügt, die Lösungen anzugeben und durch ***Proben*** nachzuweisen, dass es tatsächlich Lösungen sind, sondern dass auch ein ***Einzigkeitsnachweis*** gefordert wird, in dem gezeigt werden muss, dass es keine weiteren Lösungen geben kann.
Auf diese Problematik muss vor allem beim ***systematischen Probieren*** eingegangen werden, das sich diesbezüglich von dem wahllosen Probieren und dem Erraten von Lösungen unterscheidet, dass stets explizit anzugeben ist, welches *Ordnungsprinzip* verwendet wurde, das absichert, dass keine Lösungen übersehen wurden.

3. ZU EINIGEN ORGANISATORISCHEN UND DIDAKTISCHEN FRAGEN

Die Aufgaben der (nur für Lehrer bestimmten) ***Aufgabenblätter*** sowie der (auch für Schüler bestimmten) ***Aufgabensammlung*** wurden hinsichtlich der Anzahl und dem unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad so ausgewählt, dass sie für folgende *Ziele* eingesetzt werden können:

° Fördern von leistungsstarken Schülern im ***Unterricht*** durch ***innere Differenzierung***.
° ***Förderunterricht*** für leistungsstarke Schüler in der vorgegebenen Stundentafel.
° ***Schularbeitsgemeinschaften*** als außerunterrichtliches Angebot.
° ***Überschulische Arbeitsgemeinschaften*** für besonders leistungsfähige Schülern aus mehreren Grundschulen.
° ***Individuelle Förderung*** für einzelne hochbegabte Schüler.

Einige Aufgaben sind auch für eine individuelle Förderung in den Klassen 1 und 2 geeignet.
Natürlich ist es auch möglich, diejenigen Aufgaben, die in Klasse 3 nicht verwendet wurden, in Klasse 4 einzusetzen und dadurch die von uns angebotene Aufgabensammlung für Klasse 4 zu ergänzen.

Die ***16 Aufgabenblätter*** sind für 16 Veranstaltungen pro Schuljahr bestimmt.
Jedes Arbeitsblatt enthält ***7 Aufgaben***, die nach dem Schwierigkeitsgrad geordnet sind. Die Aufgaben 1) bis 4) dürften vor allem für eine Förderung auf Schulebene geeignet sein, die Aufgaben 3) bis 7) für eine Förderung in überschulischen Arbeitsgemeinschaften oder für eine individuelle Förderung.
Bei der Verteilung der Aufgaben auf die Aufgabenblätter wurde der Lehrplan berücksichtigt. So kommen z.B. Aufgaben, für die schriftliches Rechnen erforderlich ist, erst ab Aufgabenblatt 9 vor.
Je nach dem vorgesehenen Zweck muss der Lehrer etwa drei bis vier Aufgaben pro Veranstaltung aussuchen, er kann das zugehörige Aufgabenblatt als ***Kopiervorlage*** verwenden und an jeden Schüler zu Beginn der Veranstaltung ein ***Arbeitsblatt*** ausgeben.

Die ***115 Aufgaben*** **der** ***Aufgabensammlung*** sind in ***drei Blöcke*** eingeteilt. Die Aufgaben 1) bis 55) sind relativ leicht, die Aufgaben 56) bis 100) von mittlerem Schwierigkeitsgrad und die Aufgaben 101) bis 115) von hohem Schwierigkeitsgrad.
In jedem Block sind die Aufgaben **nach *Stoffgebieten* geordnet**: Arithmetik, Größen, Sachaufgaben, Geometrie, Sonstiges (Kombinatorik, Knobelaufgaben).
Die Aufgaben des letztgenannten Stoffgebietes sind vom Unterrichtsstoff weitgehend unabhängig und daher auch bereits in den Klassen 1 oder 2 einsetzbar.
Der Lehrer sollte für jede Förderstunde (zusätzlich zu den Aufgaben des Aufgabenblatts) auch Aufgaben aus der Aufgabensammlung auswählen. Sie sollen nicht nur für ein gemeinsames Bearbeiten, sondern auch als ***"Zusatzaufgaben"*** für besonders leistungsstarke Schüler vorgesehen werden.
Bei besonderem Interesse kann der Schüler eine eigene Aufgabensammlung erhalten. Wenn ein Schüler Zeit und Lust hat, sich auch zu Hause mit dem Lösen von Aufgaben zu beschäftigen, dann sollte ihm der Lehrer geeignete Aufgaben aus der

16

3. ZU EINIGEN ORGANISATORISCHEN UND DIDAKTISCHEN FRAGEN

Die Aufgaben der (nur für Lehrer bestimmten) Aufgabenblätter sowie der (auch für Schüler bestimmten) Aufgabensammlung wurden hinsichtlich der Anzahl und dem unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad so ausgewählt, dass sie für folgende Ziele eingesetzt werden können:

° Fördern von leistungsstarken Schülern im Unterricht durch innere Differenzierung.
° Förderunterricht für leistungsstarke Schüler in der vorgegebenen Stundentafel.
° Schularbeitsgemeinschaften als außerunterrichtliches Angebot.
° Überschulische Arbeitsgemeinschaften für besonders leistungsfähige Schülern aus mehreren Grundschulen.
° Individuelle Förderung für einzelne hochbegabte Schüler.

Einige Aufgaben sind auch für eine individuelle Förderung in den Klassen 1 und 2 geeignet.
Natürlich ist es auch möglich, diejenigen Aufgaben, die in Klasse 3 nicht verwendet wurden, in Klasse 4 einzusetzen und dadurch die von uns angebotene Aufgabensammlung für Klasse 4 zu ergänzen.

Die 16 Aufgabenblätter sind für 16 Veranstaltungen pro Schuljahr bestimmt.
Jedes Arbeitsblatt enthält 7 Aufgaben, die nach dem Schwierigkeitsgrad geordnet sind. Die Aufgaben 1) bis 4) dürften vor allem für eine Förderung auf Schulebene geeignet sein, die Aufgaben 3) bis 7) für eine Förderung in überschulischen Arbeitsgemeinschaften oder für eine individuelle Förderung.
Bei der Verteilung der Aufgaben auf die Aufgabenblätter wurde der Lehrplan berücksichtigt. So kommen z.B. Aufgaben, für die schriftliches Rechnen erforderlich ist, erst ab Aufgabenblatt 9 vor.
Je nach dem vorgesehenen Zweck muss der Lehrer etwa drei bis vier Aufgaben pro Veranstaltung aussuchen, er kann das zugehörige Aufgabenblatt als Kopiervorlage verwenden und an jeden Schüler zu Beginn der Veranstaltung ein Arbeitsblatt ausgeben.

Die 115 Aufgaben der Aufgabensammlung sind in drei Blöcke eingeteilt. Die Aufgaben 1) bis 55) sind relativ leicht, die Aufgaben 56) bis 100) von mittlerem Schwierigkeitsgrad und die Aufgaben 101) bis 115) von hohem Schwierigkeitsgrad.
In jedem Block sind die Aufgaben nach Stoffgebieten geordnet: Arithmetik, Größen, Sachaufgaben, Geometrie, Sonstiges (Kombinatorik, Knobelaufgaben).
Die Aufgaben des letztgenannten Stoffgebietes sind vom Unterrichtsstoff weitgehend unabhängig und daher auch bereits in den Klassen 1 oder 2 einsetzbar.
Der Lehrer sollte für jede Förderstunde (zusätzlich zu den Aufgaben des Aufgabenblatts) auch Aufgaben aus der Aufgabensammlung auswählen. Sie sollen nicht nur für ein gemeinsames Bearbeiten, sondern auch als "Zusatzaufgaben" für besonders leistungsstarke Schüler vorgesehen werden.
Bei besonderem Interesse kann der Schüler eine eigene Aufgabensammlung erhalten. Wenn ein Schüler Zeit und Lust hat, sich auch zu Hause mit dem Lösen von Aufgaben zu beschäftigen, dann sollte ihm der Lehrer geeignete Aufgaben aus der

Aufgabensammlung angeben. Deren Auswahl gehört auch zur Vorbereitung des Lehrers auf einen Zirkel.

Vor allem die Aufgaben aus den Aufgabenblättern, aber auch die der Aufgabensammlung, wurden so ausgewählt und angeordnet, dass sie für einen systematischen ***Kurs zum Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen*** geeignet sind.
Wer diese Möglichkeit nutzen möchte, muss dies bei der Planung der Förderstunden und bei der Auswahl der Aufgaben berücksichtigen. Einen groben Überblick findet man im Anhang der Aufgabenblätter. Nähere Hinweise findet man in den Abschnitten 2.1. und 5. .

Die umfangreichste Nutzung dürfte unser Material im ***Förderunterricht*** erfahren, für den an Grundschulen des Freistaats Sachsen im Rahmen der Stundentafel in allen Klassenstufen je 2 Unterrichtsstunden pro Woche vorgesehen werden.

Die langjährigen Erfahrungen mit ***überschulischen Arbeitsgemeinschaften*** aus der Stadt Chemnitz wurden bei der Erarbeitung unseres Materials stark genutzt. Zur Zeit arbeitet der "Förderkreis der Stadt Chemnitz" in 4 Stützpunkten vierzehntägig je 90 Minuten.

Für ***Schularbeitsgemeinschaften*** dürfte es günstiger sein, wöchentlich 45 Minuten vorzusehen.

Für die ***individuelle Förderung*** schlagen wir ***Konsultationen*** vor, die in regelmäßigen Abständen von mindestens zwei und höchstens vier Wochen stattfinden sollten. An Gymnasien hat sich dieses Vorgehen bereits bewährt.
Der betreuende Lehrer erhält relativ umfangreiches Material, vor allem Aufgaben nebst zugehörigen Lösungen. Er stellt dem Schüler von einer Konsultation zur nächsten Aufgaben, die dieser selbständig bearbeiten soll. In der Konsultation werden die Lösungsversuche des Schülers besprochen.

Das im Folgenden beschriebene didaktische Vorgehen beim Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen wurde mit Schülern der Klasse 5 erprobt. Wir gehen davon aus, dass es sich im Prinzip auch in Grundschulen anwenden lässt, wobei u.U. eine Anpassung an altersspezifische Besonderheiten der Klassenstufe erforderlich ist, in der es eingesetzt werden soll.

17

Aufgabensammlung angeben. Deren Auswahl gehört auch zur Vorbereitung des Lehrers auf einen Zirkel.

Vor allem die Aufgaben aus den Aufgabenblättern, aber auch die der Aufgabensammlung, wurden so ausgewählt und angeordnet, dass sie für einen systematischen ***Kurs zum Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen*** geeignet sind.
Wer diese Möglichkeit nutzen möchte, muss dies bei der Planung der Förderstunden und bei der Auswahl der Aufgaben berücksichtigen. Einen groben Überblick findet man im Anhang der Aufgabenblätter. Nähere Hinweise findet man in den Abschnitten 2.1. und 5. .

Die umfangreichste Nutzung dürfte unser Material im ***Förderunterricht*** erfahren, für den an Grundschulen des Freistaats Sachsen im Rahmen der Stundentafel in allen Klassenstufen je 2 Unterrichtsstunden pro Woche vorgesehen werden.

Die langjährigen Erfahrungen mit ***überschulischen Arbeitsgemeinschaften*** aus der Stadt Chemnitz wurden bei der Erarbeitung unseres Materials stark genutzt. Zur Zeit arbeitet der "Förderkreis der Stadt Chemnitz" in 4 Stützpunkten vierzehntägig je 90 Minuten.

Für ***Schularbeitsgemeinschaften*** dürfte es günstiger sein, wöchentlich 45 Minuten vorzusehen.

Für die ***individuelle Förderung*** schlagen wir ***Konsultationen*** vor, die in regelmäßigen Abständen von mindestens zwei und höchstens vier Wochen stattfinden sollten. An Gymnasien hat sich dieses Vorgehen bereits bewährt.
Der betreuende Lehrer erhält relativ umfangreiches Material, vor allem Aufgaben nebst zugehörigen Lösungen. Er stellt dem Schüler von einer Konsultation zur nächsten Aufgaben, die dieser selbständig bearbeiten soll. In der Konsultation werden die Lösungsversuche des Schülers besprochen.

Das im Folgenden beschriebene didaktische Vorgehen beim Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen wurde mit Schülern der Klasse 5 erprobt. Wir gehen davon aus, dass es sich im Prinzip auch in Grundschulen anwenden lässt, wobei u.U. eine Anpassung an altersspezifische Besonderheiten der Klassenstufe erforderlich ist, in der es eingesetzt werden soll.

3.1. Einige Grundlagen für das Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen

1) Heuristische Vorgehensweisen (Prinzipien, Strategien und Hilfsmittel) lassen sich durch ***Fragen und/oder Impulse*** charakterisieren und auch vermitteln.
Sie sind - im Gegensatz zu "Lösungstricks" - vom konkreten Inhalt der zu lösenden Aufgaben weitgehend unabhängig.
Es gibt sehr allgemeine ***"Hauptimpulse"***, die - falls sie noch zu keiner Lösungsidee führen - durch konkretere ***"Unterimpulse"*** ergänzt werden können.

2) Im Prinzip lässt sich jeder gefundene Lösungsweg in Form eines ***Lösungsgraphen*** festhalten, der darüber informiert, wie man vom ***"Start"*** ausgehend über gewisse ***"Teilziele"*** zum ***"Ziel"*** gelangen kann.
Als "Start" und "Ziel" treten meistens gegebene und gesuchte Größen (Terme) oder gegebene und gesuchte Bedingungen bzw. Feststellungen (Aussagen oder Aussageformen) auf.

3) Heuristisches Vorgehen lässt sich nur im Prozess angestrengter geistiger Tätigkeit beim weitgehend ***selbständigen Lösen anspruchsvoller problemhafter Aufgaben*** (und nicht etwa nur durch reines Zuhören) erlernen.
Dazu muss man dem Schüler ***Zeit zum Nachdenken*** lassen. Ein kurzschrittiges Steuern der Schülerhandlungen mit dem Ziel, möglichst rasch zu einer Lösung zu gelangen, ist ein für heuristische Schulung unbrauchbares didaktisches Vorgehen.

4) Heuristische Schulung dient dem Entwickeln der ***Fähigkeit zum problemlösenden Denken***.
In Abhängigkeit von den zu lösenden Aufgaben ist das Vorhandensein von ***Sachkenntnissen*** und von ***Fertigkeiten*** eine notwendige Voraussetzung.
Es gibt "Knobelaufgaben", die ohne mathematische Vorkenntnisse lösbar sind und die daher schon ab Klasse 1 für das Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen eingesetzt werden können.

5) Das Endziel besteht darin, jeden Schüler zu befähigen, dass er sich beim Lösen problemhafter Aufgaben - in der Regel unterbewusst - ***Fragen*** stellt und ***Impulse*** gibt, durch die gewisse heuristische Vorgehensweisen charakterisiert sind.
Zum Zweck des Vermittelns müssen diese Fragen und Impulse bewusst angeeignet werden, und wenn ein Schüler beim Lösen einer problemhaften Aufgabe auf größere Schwierigkeiten stößt, dann sollte er angehalten werden, das ihm zur Verfügung stehende Repertoir an heuristischen Vorgehensweisen bewusst zu durchmustern.

6) Das Aneignen heuristischer Vorgehensweisen kann nur ***etappenweise*** erfolgen. Erst wenn eine Vorgehensweise bis zu einem gewissen Grad angeeignet wurde, ist es sinnvoll, eine nächste Vorgehensweise einzuführen.
Auch das Bereitstellen der benötigten mathematischen Kenntnisse und Fertigkeit ist diesbezüglich zu beachten.

7) Problemhafte Aufgaben sollten vor ihrem Einsatz gründlich in Hinblick auf ihre ***heuristischen Potenzen analysiert*** werden.
Bei der Suche nach möglichst vielen ***verschiedenen Lösungswegen*** ist herauszufinden und festzuhalten, welche heuristischen Vorgehensweisen zu welchem Lösungsweg führen können.

18

3.1. Einige Grundlagen für das Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen

1) Heuristische Vorgehensweisen (Prinzipien, Strategien und Hilfsmittel) lassen sich durch ***Fragen und/oder Impulse*** charakterisieren und auch vermitteln.
Sie sind - im Gegensatz zu "Lösungstricks" - vom konkreten Inhalt der zu lösenden Aufgaben weitgehend unabhängig.
Es gibt sehr allgemeine ***"Hauptimpulse"***, die - falls sie noch zu keiner Lösungsidee führen - durch konkretere ***"Unterimpulse"*** ergänzt werden können.

2) Im Prinzip lässt sich jeder gefundene Lösungsweg in Form eines ***Lösungsgraphen*** festhalten, der darüber informiert, wie man vom ***"Start"*** ausgehend über gewisse ***"Teilziele"*** zum ***"Ziel"*** gelangen kann.
Als "Start" und "Ziel" treten meistens gegebene und gesuchte Größen (Terme) oder gegebene und gesuchte Bedingungen bzw. Feststellungen (Aussagen oder Aussageformen) auf.

3) Heuristisches Vorgehen lässt sich nur im Prozess angestrengter geistiger Tätigkeit beim weitgehend ***selbständigen Lösen anspruchsvoller problemhafter Aufgaben*** (und nicht etwa nur durch reines Zuhören) erlernen.
Dazu muss man dem Schüler ***Zeit zum Nachdenken*** lassen. Ein kurzschrittiges Steuern der Schülerhandlungen mit dem Ziel, möglichst rasch zu einer Lösung zu gelangen, ist ein für heuristische Schulung unbrauchbares didaktisches Vorgehen.

4) Heuristische Schulung dient dem Entwickeln der ***Fähigkeit zum problemlösenden Denken***.
In Abhängigkeit von den zu lösenden Aufgaben ist das Vorhandensein von ***Sachkenntnissen*** und von ***Fertigkeiten*** eine notwendige Voraussetzung.
Es gibt "Knobelaufgaben", die ohne mathematische Vorkenntnisse lösbar sind und die daher schon ab Klasse 1 für das Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen eingesetzt werden können.

5) Das Endziel besteht darin, jeden Schüler zu befähigen, dass er sich beim Lösen problemhafter Aufgaben - in der Regel unterbewusst - ***Fragen*** stellt und ***Impulse*** gibt, durch die gewisse heuristische Vorgehensweisen charakterisiert sind.
Zum Zweck des Vermittelns müssen diese Fragen und Impulse bewusst angeeignet werden, und wenn ein Schüler beim Lösen einer problemhaften Aufgabe auf größere Schwierigkeiten stößt, dann sollte er angehalten werden, das ihm zur Verfügung stehende Repertoir an heuristischen Vorgehensweisen bewusst zu durchmustern.

6) Das Aneignen heuristischer Vorgehensweisen kann nur ***etappenweise*** erfolgen. Erst wenn eine Vorgehensweise bis zu einem gewissen Grad angeeignet wurde, ist es sinnvoll, eine nächste Vorgehensweise einzuführen.
Auch das Bereitstellen der benötigten mathematischen Kenntnisse und Fertigkeit ist diesbezüglich zu beachten.

7) Problemhafte Aufgaben sollten vor ihrem Einsatz gründlich in Hinblick auf ihre ***heuristischen Potenzen analysiert*** werden.
Bei der Suche nach möglichst vielen ***verschiedenen Lösungswegen*** ist herauszufinden und festzuhalten, welche heuristischen Vorgehensweisen zu welchem Lösungsweg führen können.

Eine derartige Analyse ist sehr zeitaufwendig. Es ist nicht zu verlangen, dass jeder mit der Förderung von Schülern betraute Lehrer diese gesamte Arbeit selbst leistet. Es ist wesentlich effektiver, ihm diesbezüglich "aufbereitete" Aufgaben nebst Lösungen zur Verfügung zu stellen, wie dies in der vorliegenden Anleitung versucht wird. Ein Lehrer kann jedoch nur dann erfolgreich das Lösen problemhafter Aufgaben lehren, wenn er selbst über diesbezügliche Fähigkeiten verfügt. Es ist deshalb äußerst wichtig, dass jeder Lehrer versucht, von Zeit zu Zeit ***schwierige* Aufgaben *selbständig*** zu ***lösen***, dabei vorhandene ***heuristische Potenzen*** der betreffenden Aufgabe selbst zu ***entdecken*** und erst im Nachhinein die diesbezüglichen in der Anleitung gegebenen Informationen nachzulesen.

8) Für jede heuristische Vorgehensweise müssen Aufgaben ausgewählt werden, die zu ihre ***Einführung*** geeignet sind, und es müssen Aufgaben ausgewählt werden, die dem "***Training***" der eingeführten Vorgehensweise dienen.
Nur wenn ein Schüler eine Aufgabe in angemessener Zeit nicht selbständig bewältigen kann, wird er am Kennenlernen einer hilfreichen heuristischen Vorgehensweise interessiert sein.
Wurde eine solche Vorgehensweise vermittelt und anhand eine geeigneten Aufgabenfolge auch "trainiert", dann bleibt es weiterhin dem Schüler überlassen, welche heuristische Vorgehensweise er beim Lösen von Aufgaben einsetzen will. Je begabter ein Schüler, desto schädlicher wäre jeder diesbezügliche Zwang.

9) Nach dem Einführen und dem Training einer solchen Vorgehensweise müssen stets ***"vermischte Aufgaben"*** angeboten werden, bei denen der Schüler keine Informationen darüber erhält, welche der bereits kennengelernten heuristischen Vorgehensweisen gute Aussichten für einen Lösungserfolg bieten.

19

Eine derartige Analyse ist sehr zeitaufwendig. Es ist nicht zu verlangen, dass jeder mit der Förderung von Schülern betraute Lehrer diese gesamte Arbeit selbst leistet. Es ist wesentlich effektiver, ihm diesbezüglich "aufbereitete" Aufgaben nebst Lösungen zur Verfügung zu stellen, wie dies in der vorliegenden Anleitung versucht wird. Ein Lehrer kann jedoch nur dann erfolgreich das Lösen problemhafter Aufgaben lehren, wenn er selbst über diesbezügliche Fähigkeiten verfügt. Es ist deshalb äußerst wichtig, dass jeder Lehrer versucht, von Zeit zu Zeit ***schwierige* Aufgaben *selbständig*** zu ***lösen***, dabei vorhandene ***heuristische Potenzen*** der betreffenden Aufgabe selbst zu ***entdecken*** und erst im Nachhinein die diesbezüglichen in der Anleitung gegebenen Informationen nachzulesen.

8) Für jede heuristische Vorgehensweise müssen Aufgaben ausgewählt werden, die zu ihre ***Einführung*** geeignet sind, und es müssen Aufgaben ausgewählt werden, die dem "***Training***" der eingeführten Vorgehensweise dienen.
Nur wenn ein Schüler eine Aufgabe in angemessener Zeit nicht selbständig bewältigen kann, wird er am Kennenlernen einer hilfreichen heuristischen Vorgehensweise interessiert sein.
Wurde eine solche Vorgehensweise vermittelt und anhand eine geeigneten Aufgabenfolge auch "trainiert", dann bleibt es weiterhin dem Schüler überlassen, welche heuristische Vorgehensweise er beim Lösen von Aufgaben einsetzen will. Je begabter ein Schüler, desto schädlicher wäre jeder diesbezügliche Zwang.

9) Nach dem Einführen und dem Training einer solchen Vorgehensweise müssen stets ***"vermischte Aufgaben"*** angeboten werden, bei denen der Schüler keine Informationen darüber erhält, welche der bereits kennengelernten heuristischen Vorgehensweisen gute Aussichten für einen Lösungserfolg bieten.

3.2. Einige didaktische Forderungen und Regeln

1) Im Unterschied zum Unterricht sollte man bei allen Förderformen darauf achten, dass auch die leistungsstärksten Schüler stets an der oberen Grenze ihrer Leistungsfähigkeit gefordert werden. Unterforderung ist einer der schwerwiegendsten Fehler bei der Begabtenförderung.
Dies erfordert stets eine ***innere Differenzierung***. Der Lehrer muss stets ***Zusatzaufgaben*** parat haben, die er denjenigen Schülern stellt, die mit dem Lösen einer allen Schülern gestellten Aufgabe vorzeitig fertig werden.

2) Die Schüler müssen daran gewöhnt werden, die gestellte Aufgabe aufmerksam durchzulesen und Fragen zu stellen, wenn sie Teile der Aufgabe nicht verstanden haben.
Wenn es keine ***Fragen zur Aufgabenstellung*** gibt, dann sollte sich der Lehrer hin und wieder durch Stichproben überzeugen, ob auch leistungsschwächere Schüler die Aufgabe wirklich verstanden haben. Dies betrifft vor allem die Kenntnis von vorkommenden Begriffen.

3) Nach dem Durchlesen der Aufgabe sollte prinzipiell zunächst eine ***Phase der Stillarbeit*** einsetzen, in der jeder Schüler für sich versucht, selbständig eine Lösung zu finden.
Wer eine Lösung (das ***Resultat*** der Aufgabe) gefunden zu haben glaubt, soll sich melden; er erhält eine ***Zusatzaufgabe***.
Bei mehrteiligen (gestaffelten) Aufgaben sollte bereits die Lösung der ersten Teilaufgabe angezeigt werden; als Zusatzaufgabe dient dann die nächste Teilaufgabe. Bei derartigen Aufgaben wird es oft vorkommen, dass die leistungsschwächeren Schüler nur den leichten Einstiegsteil lösen, während die leistungsstärkeren Schüler auch die schwierigeren Teile bewältigen.

4) Der erste Schüler, der zu einem Resultat gelangt ist, darf es nennen. Der Lehrer hält es als *"**Angebot**"* an der Wandtafel fest, ohne zu verraten, ob dieses Resultat richtig oder falsch ist.
Alle anderen Schüler, die ebenfalls ein Resultat erhalten haben, dürfen das erste Angebot bestätigen oder ein *"**Gegenangebot**"* machen, das dann der Lehrer ebenfalls kommentarlos an der Wandtafel festhält.
Jeder Schüler darf sein Angebot zurückziehen und sich einem der Gegenangebote anschließen, wenn er den Fehler in seiner Lösung selbst gefunden hat.
Die Entscheidung, ob ein Resultat richtig oder falsch ist, wird prinzipiell niemals vom Lehrer sondern stets von den Schülern selbst getroffen, wobei in der Regel *Proben* das Entscheidungskriterium bilden.

5) Nach angemessener Zeit wird der Lehrer die Phase der Stillarbeit beenden.
Haben fast alle Schüler die richtige Lösung gefunden, wird die *nächste Aufgabe* gestellt.
Anderenfalls beginnt nun eine ***Phase gemeinsamer Arbeit***, in der (in Form eines Unterrichtsgesprächs oder einer Diskussion) nach einem *Lösungsweg* für die gestellte Aufgabe gesucht wird. Besonders wertvoll sind Aufgaben, bei denen mehrere Lösungswege zum Ziel führen.

6) Natürlich ist es sehr günstig (und manchmal auch möglich), dass die Schüler eine heuristische Vorgehensweise beim Lösen problemhafter Aufgaben ***selbst entdekken***. Es ist jedoch durchaus didaktisch vertretbar, dass der Lehrer solche von erfolg-

20

3.2. Einige didaktische Forderungen und Regeln

1) Im Unterschied zum Unterricht sollte man bei allen Förderformen darauf achten, dass auch die leistungsstärksten Schüler stets an der oberen Grenze ihrer Leistungsfähigkeit gefordert werden. Unterforderung ist einer der schwerwiegendsten Fehler bei der Begabtenförderung.
Dies erfordert stets eine innere Differenzierung. Der Lehrer muss stets Zusatzaufgaben parat haben, die er denjenigen Schülern stellt, die mit dem Lösen einer allen Schülern gestellten Aufgabe vorzeitig fertig werden.

2) Die Schüler müssen daran gewöhnt werden, die gestellte Aufgabe aufmerksam durchzulesen und Fragen zu stellen, wenn sie Teile der Aufgabe nicht verstanden haben.
Wenn es keine Fragen zur Aufgabenstellung gibt, dann sollte sich der Lehrer hin und wieder durch Stichproben überzeugen, ob auch leistungsschwächere Schüler die Aufgabe wirklich verstanden haben. Dies betrifft vor allem die Kenntnis von vorkommenden Begriffen.

3) Nach dem Durchlesen der Aufgabe sollte prinzipiell zunächst eine Phase der Stillarbeit einsetzen, in der jeder Schüler für sich versucht, selbständig eine Lösung zu finden.
Wer eine Lösung (das Resultat der Aufgabe) gefunden zu haben glaubt, soll sich melden; er erhält eine Zusatzaufgabe.
Bei mehrteiligen (gestaffelten) Aufgaben sollte bereits die Lösung der ersten Teilaufgabe angezeigt werden; als Zusatzaufgabe dient dann die nächste Teilaufgabe. Bei derartigen Aufgaben wird es oft vorkommen, dass die leistungsschwächeren Schüler nur den leichten Einstiegsteil lösen, während die leistungsstärkeren Schüler auch die schwierigeren Teile bewältigen.

4) Der erste Schüler, der zu einem Resultat gelangt ist, darf es nennen. Der Lehrer hält es als "Angebot" an der Wandtafel fest, ohne zu verraten, ob dieses Resultat richtig oder falsch ist.
Alle anderen Schüler, die ebenfalls ein Resultat erhalten haben, dürfen das erste Angebot bestätigen oder ein "Gegenangebot" machen, das dann der Lehrer ebenfalls kommentarlos an der Wandtafel festhält.
Jeder Schüler darf sein Angebot zurückziehen und sich einem der Gegenangebote anschließen, wenn er den Fehler in seiner Lösung selbst gefunden hat.
Die Entscheidung, ob ein Resultat richtig oder falsch ist, wird prinzipiell niemals vom Lehrer sondern stets von den Schülern selbst getroffen, wobei in der Regel Proben das Entscheidungskriterium bilden.

5) Nach angemessener Zeit wird der Lehrer die Phase der Stillarbeit beenden.
Haben fast alle Schüler die richtige Lösung gefunden, wird die nächste Aufgabe gestellt.
Anderenfalls beginnt nun eine Phase gemeinsamer Arbeit, in der (in Form eines Unterrichtsgesprächs oder einer Diskussion) nach einem Lösungsweg für die gestellte Aufgabe gesucht wird. Besonders wertvoll sind Aufgaben, bei denen mehrere Lösungswege zum Ziel führen.

6) Natürlich ist es sehr günstig (und manchmal auch möglich), dass die Schüler eine heuristische Vorgehensweise beim Lösen problemhafter Aufgaben selbst entdekken. Es ist jedoch durchaus didaktisch vertretbar, dass der Lehrer solche von erfolg-

reichen Problemlösern in einem Zeitraum von über 2000 Jahren entdeckten Vorgehensweisen den Schülern ***vermittelt***.
Dabei gilt folgende Regel: Wer einen Lösungsweg gefunden hat, der darf ihn nicht verraten, er darf lediglich die nächste Frage stellen, den nächsten Impuls geben. Auf diese Weise werden die leistungsstärksten Schüler zusätzlich gefordert (und damit gefördert), die leistungsschwächeren Schüler haben mehr Zeit zum Überlegen und zum Aneignen des Verfahrens, und den leistungsschwächsten Schülern bleibt es vorbehalten, die Lösung zu formulieren.
Im Idealfall spielt der Lehrer die Rolle eines Dirigenten, der bestimmt, wer zu Wort kommen soll, und der die gestellten Fragen und Impulse sowie die zugehörigen Antworten wertet. Aus Zeitgründen wird er die Schüler auch vor "Sackgassen" warnen, die beim selbständigen Lösen von Aufgaben nicht zu vermeiden sind.

7) Um die ***Gemeinsamkeiten des Vorgehens*** beim Lösen unterschiedlicher Aufgaben hervorzuheben, sollte sich der Lehrer der ***"genormten"*** *Impulse* bedienen, die zum Charakterisieren der heuristischen Vorgehensweisen im Abschnitt 2.1. eingeführt wurden und die im Abschnitt 5. anhand von Beispielen demonstriert werden.
Es sind dies (inhaltsunabhängige) ***Hauptimpulse***, die nur dann durch ***Unterimpulse*** ergänzt werden sollten, wenn der Hauptimpuls noch nicht zum Ziel führt. Auch diese Unterimpulse sollten vom konkreten Aufgabeninhalt noch möglichst wenig abhängen. Konkrete Lösungshinweise sollten nur notfalls und dann ganz zum Schluss kommen.
Langjährige Erfahrung (die in Arbeitsgemeinschaften ab Klasse 5 gesammelt wurde) lehrt, dass das Erlernen einer solchen ***"Impulstechnik"*** den Lehrern keineswegs leicht fällt. Wer nur einen Lösungsweg kennt, neigt dazu, den Schülern die dafür benötigten Hilfsmittel mitzuteilen und sie aufzufordern, diese einzusetzen. Das hindert jedoch die Schüler daran, kreativ zu werden und nach eigenen Lösungswegen zu suchen.
Es ist erst recht nicht einfach, Schülern das Verraten von Lösungswegen abzugewöhnen und ihnen klar zu machen, dass eine gute Frage (zu einem vom Schüler gefundenen Lösungsweg) viel wertvoller ist als die Antwort selbst.
Das ***Hinauszögern der endgültigen Lösung*** ist ein sehr gutes Mittel, um zu erreichen, dass sich alle Schüler im Rahmen ihrer Leistungsfähigkeit aktiv an der Suche nach einem Lösungsweg beteiligen.

8) Oft ist es möglich, dass der Lehrer den Prozess der ***Lösungsfindung*** Schritt für Schritt an der Wandtafel festhält, wodurch schließlich der ***Lösungsweg*** beschrieben wird.
Bei Sachaufgaben und Zuordnungsaufgaben kann dies oft in Form einer ***Tabelle*** erfolgen, wobei durch Nummern in den Feldern auch die Reihenfolge der Schritte festgehalten werden kann, in der die Zwischenergebnisse erhalten wurden.
Bei Aufgaben, wo aus gegebenen Bedingungen Schlussfolgerungen gezogen werden, um etwa gewisse Reihenfolgen zu ermitteln [z.B. bei Aufgabe 3.5)] lässt sich der Lösungsweg durch einen ***Lösungsgraphen*** festhalten. Dieses Hilfsmittel wird in höheren Klassen eine hohe Bedeutung gewinnen.
Bei gewissen Sachaufgaben können auch ***Skizzen*** diesem Zweck dienen.
In Klasse 3 wird man auf das schriftliche Darstellen einer vollständigen Lösung, zu der auch das Festhalten der Begründungen gehört, in der Regel verzichten. Es reicht eine ***mündliche Darstellung***, die anhand des in einer der oben beschriebenen Arten festgehaltenen Lösungsweges von den leistungsschwächeren Schülern verlangt werden sollte, die zum Prozess der Lösungsfindung wenig beigetragen haben.

21

reichen Problemlösern in einem Zeitraum von über 2000 Jahren entdeckten Vorgehensweisen den Schülern ***vermittelt***.
Dabei gilt folgende Regel: Wer einen Lösungsweg gefunden hat, der darf ihn nicht verraten, er darf lediglich die nächste Frage stellen, den nächsten Impuls geben. Auf diese Weise werden die leistungsstärksten Schüler zusätzlich gefordert (und damit gefördert), die leistungsschwächeren Schüler haben mehr Zeit zum Überlegen und zum Aneignen des Verfahrens, und den leistungsschwächsten Schülern bleibt es vorbehalten, die Lösung zu formulieren.
Im Idealfall spielt der Lehrer die Rolle eines Dirigenten, der bestimmt, wer zu Wort kommen soll, und der die gestellten Fragen und Impulse sowie die zugehörigen Antworten wertet. Aus Zeitgründen wird er die Schüler auch vor "Sackgassen" warnen, die beim selbständigen Lösen von Aufgaben nicht zu vermeiden sind.

7) Um die ***Gemeinsamkeiten des Vorgehens*** beim Lösen unterschiedlicher Aufgaben hervorzuheben, sollte sich der Lehrer der ***"genormten"*** *Impulse* bedienen, die zum Charakterisieren der heuristischen Vorgehensweisen im Abschnitt 2.1. eingeführt wurden und die im Abschnitt 5. anhand von Beispielen demonstriert werden.
Es sind dies (inhaltsunabhängige) ***Hauptimpulse***, die nur dann durch ***Unterimpulse*** ergänzt werden sollten, wenn der Hauptimpuls noch nicht zum Ziel führt. Auch diese Unterimpulse sollten vom konkreten Aufgabeninhalt noch möglichst wenig abhängen. Konkrete Lösungshinweise sollten nur notfalls und dann ganz zum Schluss kommen.
Langjährige Erfahrung (die in Arbeitsgemeinschaften ab Klasse 5 gesammelt wurde) lehrt, dass das Erlernen einer solchen ***"Impulstechnik"*** den Lehrern keineswegs leicht fällt. Wer nur einen Lösungsweg kennt, neigt dazu, den Schülern die dafür benötigten Hilfsmittel mitzuteilen und sie aufzufordern, diese einzusetzen. Das hindert jedoch die Schüler daran, kreativ zu werden und nach eigenen Lösungswegen zu suchen.
Es ist erst recht nicht einfach, Schülern das Verraten von Lösungswegen abzugewöhnen und ihnen klar zu machen, dass eine gute Frage (zu einem vom Schüler gefundenen Lösungsweg) viel wertvoller ist als die Antwort selbst.
Das ***Hinauszögern der endgültigen Lösung*** ist ein sehr gutes Mittel, um zu erreichen, dass sich alle Schüler im Rahmen ihrer Leistungsfähigkeit aktiv an der Suche nach einem Lösungsweg beteiligen.

8) Oft ist es möglich, dass der Lehrer den Prozess der ***Lösungsfindung*** Schritt für Schritt an der Wandtafel festhält, wodurch schließlich der ***Lösungsweg*** beschrieben wird.
Bei Sachaufgaben und Zuordnungsaufgaben kann dies oft in Form einer ***Tabelle*** erfolgen, wobei durch Nummern in den Feldern auch die Reihenfolge der Schritte festgehalten werden kann, in der die Zwischenergebnisse erhalten wurden.
Bei Aufgaben, wo aus gegebenen Bedingungen Schlussfolgerungen gezogen werden, um etwa gewisse Reihenfolgen zu ermitteln [z.B. bei Aufgabe 3.5)] lässt sich der Lösungsweg durch einen ***Lösungsgraphen*** festhalten. Dieses Hilfsmittel wird in höheren Klassen eine hohe Bedeutung gewinnen.
Bei gewissen Sachaufgaben können auch ***Skizzen*** diesem Zweck dienen.
In Klasse 3 wird man auf das schriftliche Darstellen einer vollständigen Lösung, zu der auch das Festhalten der Begründungen gehört, in der Regel verzichten. Es reicht eine ***mündliche Darstellung***, die anhand des in einer der oben beschriebenen Arten festgehaltenen Lösungsweges von den leistungsschwächeren Schülern verlangt werden sollte, die zum Prozess der Lösungsfindung wenig beigetragen haben.

9) Es besteht die Gefahr, dass die außerunterrichtliche Arbeit in Zirkeln genau so verläuft wie die meisten Unterrichtsstunden: Neben einem vom Lehrer geleiteten Unterrichtsgespräch gibt es allenfalls noch Phasen der Stillarbeit, wo sich alle Schüler mit derselben Aufgabe beschäftigen müssen.
Ein derartiges "routinemäßiges" Vorgehen sollte auf jeden Fall vermieden werden. Beim Einsatz verschiedener ***Formen der Zirkelarbeit*** sorge man für Abwechslung. Es ist von Vorteil, wenn sich ein Zirkel im äußeren Ablauf deutlich von einer Unterrichtsstunde unterscheidet.

10) Es hat sich bewährt, jeder Aufgabe eine Anzahl erreichbarer Punkte zuzuordnen. Nachdem die Schüler die Aufgaben gelöst haben, teilt die AG-Leiterin den Kindern mit, wie viele Punkte sie bei vollständiger Lösung bzw. auf entsprechende Teilschritte erhalten. Die Kinder notieren sich dann selbst ihre erreichte Punktzahl und ermitteln zum Ende der Förderstunde ihre Gesamtpunktzahl. Diese Punktwertung motiviert die Schüler stark und wird von ihnen auch größtenteils selbstkritisch und ehrlich durchgeführt.

22

9) Es besteht die Gefahr, dass die außerunterrichtliche Arbeit in Zirkeln genau so verläuft wie die meisten Unterrichtsstunden: Neben einem vom Lehrer geleiteten Unterrichtsgespräch gibt es allenfalls noch Phasen der Stillarbeit, wo sich alle Schüler mit derselben Aufgabe beschäftigen müssen.
Ein derartiges "routinemäßiges" Vorgehen sollte auf jeden Fall vermieden werden. Beim Einsatz verschiedener ***Formen der Zirkelarbeit*** sorge man für Abwechslung. Es ist von Vorteil, wenn sich ein Zirkel im äußeren Ablauf deutlich von einer Unterrichtsstunde unterscheidet.

10) Es hat sich bewährt, jeder Aufgabe eine Anzahl erreichbarer Punkte zuzuordnen. Nachdem die Schüler die Aufgaben gelöst haben, teilt die AG-Leiterin den Kindern mit, wie viele Punkte sie bei vollständiger Lösung bzw. auf entsprechende Teilschritte erhalten. Die Kinder notieren sich dann selbst ihre erreichte Punktzahl und ermitteln zum Ende der Förderstunde ihre Gesamtpunktzahl. Diese Punktwertung motiviert die Schüler stark und wird von ihnen auch größtenteils selbstkritisch und ehrlich durchgeführt.

3.3. Demonstration der didaktischen Vorbereitung eines Zirkels anhand eines Beispiels

Wir wollen annehmen, dass ein Lehrer im Förderunterricht für leistungsstarke Schüler der Klasse 3 oder in einer Schularbeitsgemeinschaft die Aufgabenblätter und die Aufgabensammlung auch dafür nutzen will, systematisch heuristische Vorgehensweisen zu vermitteln.
Wie kann er dann bei der ***Planung des 5. Zirkels*** (der frühestens in der 10. Unterrichtswoche liegt und 90 Minuten dauert) vorgehen?

Vor allem muss er zunächst die anzustrebenden *Ziele* festlegen, wobei der Verlauf der vorangegangenen vier Zirkel zu berücksichtigen ist.
Dabei kann er sich am ***5. Aufgabenblatt*** orientieren und für die Schüler ein *Arbeitsblatt mit den* ***Aufgaben 5.1), 5.2), 5.3), 5.4)*** herstellen.
Unter Berücksichtigung der heuristischen Potenzen dieser Aufgaben kann dies zu folgenden ***Zielen*** führen:

- Einführen in das ***Prinzip des lexikographischen Ordnens*** beim Lösen von kombinatorischen Aufgaben anhand der Aufgabe 5.4) .
- Üben im Verwenden von ***Tabellen*** beim Lösen von Sachaufgaben anhand der Aufgabe 5.3) [wobei beachtet wird, dass dieses Vorgehen anhand der Aufgaben 3.3) und 4.3) in den beiden vorangegangenen Zirkeln bereits eingeführt wurde].
- ***Geschicktes mündliches*** **bzw. halbschriftliches** ***Rechnen*** unter Verwendung von Rechenvorteilen anhand der Aufgabe 5.1) .
- Einschätzen der ***"Findigkeit"*** der Schüler anhand der Aufgabe 5.2)

Ferner muss der Lehrer geeignete ***Zusatzaufgaben*** auswählen, wobei die in den vergangenen Zirkeln gewonnene Einschätzung der Leistungsfähigkeit der Teilnehmer am Förderunterricht bzw. der AG-Mitglieder zu berücksichtigen ist. Außerdem ist auch eine grobe *Zeitplanung* von Bedeutung.

Für Schüler, die die Aufgabe 5.1) gelöst haben, werden die Aufgaben 5.2a,b,c) als Zusatzaufgaben vorgesehen. Wer auch das geschafft hat, soll sich mit Aufgabe 5.3) beschäftigen. Hierfür werden insgesamt maximal 30 Minuten Zeit eingeplant.

Die nächsten 30 Minuten dienen dem Behandeln der Aufgabe 5.4a), wobei die 5.4b) als Zusatzaufgabe eingesetzt wird. Sollte dies nicht reichen, dann nehme man die Aufgabe 93) aus der Aufgabensammlung als weitere Zusatzaufgabe.
Will man zusätzlich das ***Einführen günstiger Bezeichnungen*** üben, dann ersetze man im Arbeitsblatt des Schülers die Buchstaben A, B, C, D durch entsprechende Vornamen.

Die letzten 30 Minuten werden für das Behandeln der Aufgabe 5.3) verwendet, als Zusatzaufgaben kommen die Aufgaben 80) und 79) der Aufgabensammlung in Frage.
Die Zusatzaufgaben können auch als (freiwillig zu erledigende) ***Hausaufgaben*** gestellt werden.

Selbständige Lösungsversuche sollten stets auf ***Konzeptpapier*** *(Schmierpapier)* erfolgen. Der Lehrer sollte genau überlegen, welche Teile des Wandtafelbildes der Schüler auf dem ***Reinschriftpapier*** festhalten soll.

23

3.3. Demonstration der didaktischen Vorbereitung eines Zirkels anhand eines Beispiels

Wir wollen annehmen, dass ein Lehrer im Förderunterricht für leistungsstarke Schüler der Klasse 3 oder in einer Schularbeitsgemeinschaft die Aufgabenblätter und die Aufgabensammlung auch dafür nutzen will, systematisch heuristische Vorgehensweisen zu vermitteln.
Wie kann er dann bei der ***Planung des 5. Zirkels*** (der frühestens in der 10. Unterrichtswoche liegt und 90 Minuten dauert) vorgehen?

Vor allem muss er zunächst die anzustrebenden *Ziele* festlegen, wobei der Verlauf der vorangegangenen vier Zirkel zu berücksichtigen ist.
Dabei kann er sich am ***5. Aufgabenblatt*** orientieren und für die Schüler ein *Arbeitsblatt mit den* ***Aufgaben 5.1), 5.2), 5.3), 5.4)*** herstellen.
Unter Berücksichtigung der heuristischen Potenzen dieser Aufgaben kann dies zu folgenden ***Zielen*** führen:

- Einführen in das ***Prinzip des lexikographischen Ordnens*** beim Lösen von kombinatorischen Aufgaben anhand der Aufgabe 5.4) .
- Üben im Verwenden von ***Tabellen*** beim Lösen von Sachaufgaben anhand der Aufgabe 5.3) [wobei beachtet wird, dass dieses Vorgehen anhand der Aufgaben 3.3) und 4.3) in den beiden vorangegangenen Zirkeln bereits eingeführt wurde].
- ***Geschicktes mündliches*** **bzw. halbschriftliches** ***Rechnen*** unter Verwendung von Rechenvorteilen anhand der Aufgabe 5.1) .
- Einschätzen der ***"Findigkeit"*** der Schüler anhand der Aufgabe 5.2)

Ferner muss der Lehrer geeignete ***Zusatzaufgaben*** auswählen, wobei die in den vergangenen Zirkeln gewonnene Einschätzung der Leistungsfähigkeit der Teilnehmer am Förderunterricht bzw. der AG-Mitglieder zu berücksichtigen ist. Außerdem ist auch eine grobe *Zeitplanung* von Bedeutung.

Für Schüler, die die Aufgabe 5.1) gelöst haben, werden die Aufgaben 5.2a,b,c) als Zusatzaufgaben vorgesehen. Wer auch das geschafft hat, soll sich mit Aufgabe 5.3) beschäftigen. Hierfür werden insgesamt maximal 30 Minuten Zeit eingeplant.

Die nächsten 30 Minuten dienen dem Behandeln der Aufgabe 5.4a), wobei die 5.4b) als Zusatzaufgabe eingesetzt wird. Sollte dies nicht reichen, dann nehme man die Aufgabe 93) aus der Aufgabensammlung als weitere Zusatzaufgabe.
Will man zusätzlich das ***Einführen günstiger Bezeichnungen*** üben, dann ersetze man im Arbeitsblatt des Schülers die Buchstaben A, B, C, D durch entsprechende Vornamen.

Die letzten 30 Minuten werden für das Behandeln der Aufgabe 5.3) verwendet, als Zusatzaufgaben kommen die Aufgaben 80) und 79) der Aufgabensammlung in Frage.
Die Zusatzaufgaben können auch als (freiwillig zu erledigende) ***Hausaufgaben*** gestellt werden.

Selbständige Lösungsversuche sollten stets auf ***Konzeptpapier*** *(Schmierpapier)* erfolgen. Der Lehrer sollte genau überlegen, welche Teile des Wandtafelbildes der Schüler auf dem ***Reinschriftpapier*** festhalten soll.

Zunächst werden die Aufgaben 5.1) und 5.2) durchgelesen und etwaige Fragen zum Aufgabentext beantwortet.

Bei ***Aufgabe 5.1)*** fordere man die Schüler auf, möglichst *geschickt* (mündlich) zu rechnen und Zwischenergebnisse schriftlich festzuhalten.
Wer ein Resultat erhalten hat, soll es dem Lehrer als "Angebot" mitteilen (der es kommentarlos an der Wandtafel notiert) und sich dann der Aufgabe 5.2a,b,c) zuwenden. Bei dieser Aufgabe wird man die erhaltenen Resultate nicht notieren, da man auf diese Weise auch den Lösungsweg verraten würde.
Während der Stillarbeit kann der Lehrer die Gelegenheit nutzen, einzelne Schüler beim selbständigen Suchen nach einer Lösung zu beobachten.

Nach etwa 15 Minuten wird man die Stillarbeit abbrechen und mit dem gemeinsamen Besprechen der Aufgabe 5.1) beginnen.
Zunächst sollen die Schüler entscheiden, welches der "Angebote" bzw. "Gegenangebote" das richtige ist. Die Zwischenergebnisse werden kontrolliert und es wird beurteilt, wie man geschickt vorgehen kann.
Die Produkte $77\cdot 9$ und $39\cdot 3$ sollen zu diesem Zeitpunkt natürlich nicht schriftlich ermittelt werden sondern etwa über $77\cdot 10 - 77 = 770 - 77 = 693$ oder $70\cdot 9 + 7\cdot 9$ und $40\cdot 3 - 3 = 117$ oder $30\cdot 3 + 9\cdot 3$. Um die Differenz $693 - 117 = 576$ durch 4 zu dividieren, kann man sie z.B. zweimal halbieren.

Bei ***Aufgabe 5.2a,b,c)*** wird man nur überprüfen, wie viele der Aufgaben von den einzelnen Schülern richtig gelöst wurden, wobei die Angabe der zu verwendenden Operationen mit zur Lösung gehört.
Die Resultate der Aufgabe 5.2) tragen die Schüler in das Arbeitsblatt ein.

*Das **Wandtafelbild*** kann wie folgt aussehen:

Aufgabe	Lösung
1)	$77\cdot 9 = 693$; $39\cdot 3 = 117$; $693 - 117 = 576$; $576:4 = 144$; $144 - 66 = \mathbf{78}$.
2a)	45 60 75 90 105 **120** **135** 150 (jeweils + 15)
2b)	103 90 77 64 51 **38** **25** 12 (jeweils - 13)
2c)	25 45 35 55 45 **65** **55** 75 (abwechselnd +20 und - 10)

In der ***Aufgabe 5.4a)*** wurden als ***günstige, abkürzende Bezeichnungen*** für die Namen der drei Schüler die Buchstaben B, C, D vorgegeben. Man wird die Schüler zunächst *selbstandig* nach allen möglichen Reihenfolgen suchen lassen und dabei beobachten, welche Schüler von sich aus die möglichen Anordnungen ***lexikografisch*** ordnen.
Bei der anschließenden ***gemeinsamen Arbeit*** wird dieses ***Ordnungsprinzip*** erläutert und es werden die 6 Anordnungen an der ***Wandtafel*** festgehalten.

Vor der ***selbständigen Beschäftigung*** mit der ***Aufgabe 5.4b)*** wird man die Schüler darauf orientieren, zunächst nur nach der Anzahl der Möglichkeiten für die Aufstellung der vier Mädchen zu suchen und dabei die Lösung der Aufgabe 5.4a) möglichst geschickt zu verwenden.
Man wird beobachten, ob dabei ein Schüler selbst auf folgende Idee kommt:

24

Zunächst werden die Aufgaben 5.1) und 5.2) durchgelesen und etwaige Fragen zum Aufgabentext beantwortet.

Bei ***Aufgabe 5.1)*** fordere man die Schüler auf, möglichst *geschickt* (mündlich) zu rechnen und Zwischenergebnisse schriftlich festzuhalten.
Wer ein Resultat erhalten hat, soll es dem Lehrer als "Angebot" mitteilen (der es kommentarlos an der Wandtafel notiert) und sich dann der Aufgabe 5.2a,b,c) zuwenden. Bei dieser Aufgabe wird man die erhaltenen Resultate nicht notieren, da man auf diese Weise auch den Lösungsweg verraten würde.
Während der Stillarbeit kann der Lehrer die Gelegenheit nutzen, einzelne Schüler beim selbständigen Suchen nach einer Lösung zu beobachten.

Nach etwa 15 Minuten wird man die Stillarbeit abbrechen und mit dem gemeinsamen Besprechen der Aufgabe 5.1) beginnen.
Zunächst sollen die Schüler entscheiden, welches der "Angebote" bzw. "Gegenangebote" das richtige ist. Die Zwischenergebnisse werden kontrolliert und es wird beurteilt, wie man geschickt vorgehen kann.
Die Produkte $77\cdot 9$ und $39\cdot 3$ sollen zu diesem Zeitpunkt natürlich nicht schriftlich ermittelt werden sondern etwa über $77\cdot 10 - 77 = 770 - 77 = 693$ oder $70\cdot 9 + 7\cdot 9$ und $40\cdot 3 - 3 = 117$ oder $30\cdot 3 + 9\cdot 3$. Um die Differenz $693 - 117 = 576$ durch 4 zu dividieren, kann man sie z.B. zweimal halbieren.

Bei ***Aufgabe 5.2a,b,c)*** wird man nur überprüfen, wie viele der Aufgaben von den einzelnen Schülern richtig gelöst wurden, wobei die Angabe der zu verwendenden Operationen mit zur Lösung gehört.
Die Resultate der Aufgabe 5.2) tragen die Schüler in das Arbeitsblatt ein.

*Das **Wandtafelbild*** kann wie folgt aussehen:

Aufgabe	Lösung
1)	$77\cdot 9 = 693$; $39\cdot 3 = 117$; $693 - 117 = 576$; $576:4 = 144$; $144 - 66 = \mathbf{78}$.
2a)	45 60 75 90 105 **120** **135** 150 (jeweils + 15)
2b)	103 90 77 64 51 **38** **25** 12 (jeweils - 13)
2c)	25 45 35 55 45 **65** **55** 75 (abwechselnd +20 und - 10)

In der ***Aufgabe 5.4a)*** wurden als ***günstige, abkürzende Bezeichnungen*** für die Namen der drei Schüler die Buchstaben B, C, D vorgegeben. Man wird die Schüler zunächst *selbstandig* nach allen möglichen Reihenfolgen suchen lassen und dabei beobachten, welche Schüler von sich aus die möglichen Anordnungen ***lexikografisch*** ordnen.
Bei der anschließenden ***gemeinsamen Arbeit*** wird dieses ***Ordnungsprinzip*** erläutert und es werden die 6 Anordnungen an der ***Wandtafel*** festgehalten.

Vor der ***selbständigen Beschäftigung*** mit der ***Aufgabe 5.4b)*** wird man die Schüler darauf orientieren, zunächst nur nach der Anzahl der Möglichkeiten für die Aufstellung der vier Mädchen zu suchen und dabei die Lösung der Aufgabe 5.4a) möglichst geschickt zu verwenden.
Man wird beobachten, ob dabei ein Schüler selbst auf folgende Idee kommt:

Das vierte Mädchen kann sich bei den 6 bereits gefundenen Anordnungen der drei Mädchen stets nur an die 1. Stelle, die 2. Stelle, die 3. Stelle oder die 4. Stelle stellen, also gibt es genau (6·4 =) 24 Möglichkeiten.

Bei der anschließenden ***gemeinsamen Arbeit*** kann man dies herausarbeiten und wie folgt an der ***Wandtafel*** festhalten:

a) **6 Möglichkeiten**: BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB.

b) (6·4 =) **24 Möglichkeiten**: **A**BCD; **A**BDC, ...,**A**DBC, **A**DCB
BACD, BADC, ..., DACB
BCAD, ..., DCAB
BCDA, ..., DCBA

Abschließend wird man feststellen lassen, dass man aus den beiden Reihenfolgen CD und DC von 2 Mädchen auf dieselbe Weise die (2·3 =) 6 Reihenfolgen von 3 Mädchen erhalten kann, allerdings nicht in lexikografischer Ordnung.
Leistungsstarken Schülern wird es nicht schwerfallen, die zugrunde liegende *Gesetzmäßigkeit* zu entdecken und so schrittweise die Anzahl der verschiedenen Anordnungen von 5 , 6 , 7 , ... Elementen zu berechnen.

Nach dem ***Durchlesen*** der ***Aufgabe 5.3)*** wird man die Schüler zunächst auffordern, wie in den beiden letzten Zirkeln besprochen zunächst Vorschläge für die ***Zeilen- und Spalteneingänge einer Tabelle*** zu machen, in der man das Gegebene, das Gesuchte und nützliche Hilfsgrößen festhalten kann.
Dann kann man die Schüler auffordern, das gesuchte Ergebnis grob ***abzuschätzen***. Auch wenn es nicht möglich sein dürfte, abzuschätzen, ob der Kleinbus in einem Monat mehr oder weniger als die vom Lieferwagen zurückgelegten 700 km gefahren ist, dürfte klar sein, dass die gesuchte Anzahl von Kilometern mindestens dreistellig und höchstens vierstellig sein kann.
Erst wenn die links angegebene Tabelle erarbeitet und an der ***Wandtafel*** festgehalten wurde, beginnt die ***selbständige Suche der Schüler nach einem Lösungsweg***.

	Weg	Verbrauch
Lieferwagen	100 km	9 Liter
in 1 Monat	700 km	
Kleinbus	100 km	8 Liter
in 1 Monat	$\square$	3 l. weniger als L.

	Weg	Verbrauch
Lieferwagen	100 km	9 Liter
in 1 Monat	700 km	(7·9=) 63 Liter (1)
Kleinbus	100 km	8 Liter
in 1 Monat	(4) $\boxed{\textbf{750 km}}$	(63 - 3=) 60 Liter (2)
	(3) (100:2=)50 km	(8:2 =) 4 Liter (3)
	(15·50=) 750 km	(15·4 =) 60 Liter (4)

Beim anschließenden ***gemeinsamen Erarbeiten eines Lösungswegs***, der in der rechten Tabelle festgehalten wurde, können folgende *Impulse* nützlich sein, wobei zu beachten ist, dass die angegebenen Unterimpulse nur dann (möglichst von Schülern, die den Lösungsweg zu kennen glauben) gegeben werden, wenn die Hauptimpulse (auch bei hinreichender Zeit zum Überlegen) noch nicht zum Ziel geführt haben.

25

Das vierte Mädchen kann sich bei den 6 bereits gefundenen Anordnungen der drei Mädchen stets nur an die 1. Stelle, die 2. Stelle, die 3. Stelle oder die 4. Stelle stellen, also gibt es genau (6·4 =) 24 Möglichkeiten.

Bei der anschließenden ***gemeinsamen Arbeit*** kann man dies herausarbeiten und wie folgt an der ***Wandtafel*** festhalten:

a) **6 Möglichkeiten**: BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB.

b) (6·4 =) **24 Möglichkeiten**: **A**BCD; **A**BDC, ...,**A**DBC, **A**DCB
BACD, BADC, ..., DACB
BCAD, ..., DCAB
BCDA, ..., DCBA

Abschließend wird man feststellen lassen, dass man aus den beiden Reihenfolgen CD und DC von 2 Mädchen auf dieselbe Weise die (2·3 =) 6 Reihenfolgen von 3 Mädchen erhalten kann, allerdings nicht in lexikografischer Ordnung.
Leistungsstarken Schülern wird es nicht schwerfallen, die zugrunde liegende *Gesetzmäßigkeit* zu entdecken und so schrittweise die Anzahl der verschiedenen Anordnungen von 5 , 6 , 7 , ... Elementen zu berechnen.

Nach dem ***Durchlesen*** der ***Aufgabe 5.3)*** wird man die Schüler zunächst auffordern, wie in den beiden letzten Zirkeln besprochen zunächst Vorschläge für die ***Zeilen- und Spalteneingänge einer Tabelle*** zu machen, in der man das Gegebene, das Gesuchte und nützliche Hilfsgrößen festhalten kann.
Dann kann man die Schüler auffordern, das gesuchte Ergebnis grob ***abzuschätzen***. Auch wenn es nicht möglich sein dürfte, abzuschätzen, ob der Kleinbus in einem Monat mehr oder weniger als die vom Lieferwagen zurückgelegten 700 km gefahren ist, dürfte klar sein, dass die gesuchte Anzahl von Kilometern mindestens dreistellig und höchstens vierstellig sein kann.
Erst wenn die links angegebene Tabelle erarbeitet und an der ***Wandtafel*** festgehalten wurde, beginnt die ***selbständige Suche der Schüler nach einem Lösungsweg***.

	Weg	Verbrauch
Lieferwagen	100 km	9 Liter
in 1 Monat	700 km	
Kleinbus	100 km	8 Liter
in 1 Monat	$\square$	3 l. weniger als L.

	Weg	Verbrauch
Lieferwagen	100 km	9 Liter
in 1 Monat	700 km	(7·9=) 63 Liter (1)
Kleinbus	100 km	8 Liter
in 1 Monat	(4) $\boxed{\textbf{750 km}}$	(63 - 3=) 60 Liter (2)
	(3) (100:2=)50 km	(8:2 =) 4 Liter (3)
	(15·50=) 750 km	(15·4 =) 60 Liter (4)

Beim anschließenden ***gemeinsamen Erarbeiten eines Lösungswegs***, der in der rechten Tabelle festgehalten wurde, können folgende *Impulse* nützlich sein, wobei zu beachten ist, dass die angegebenen Unterimpulse nur dann (möglichst von Schülern, die den Lösungsweg zu kennen glauben) gegeben werden, wenn die Hauptimpulse (auch bei hinreichender Zeit zum Überlegen) noch nicht zum Ziel geführt haben.

In der rechten Tabelle wurde durch Numerierung von Feldern zusätzlich festgehalten, in welcher Reihenfolge die benötigten Zwischenergebnisse (Hilfsgrößen) ermitteltn wurden.

- Was lässt sich aus den gegebenen Größen unmittelbar berechnen? Begründe!
  - ° Was lässt sich aus der Angabe berechnen, dass der Lieferwagen für 100 km 9 Liter Kraftstoff verbraucht? .
    - : Berechne, wie viele Liter der Lieferwagen für 700 km verbraucht!

[Wenn für 100 km 9 Liter verbraucht werden, dann werden für 700 km ($7 \cdot 9 =$) **63 Liter** verbraucht.]

- Was lässt sich nun unmittelbar berechnen? Begründe!
  - ° Beachte den letzten Satz in der Aufgabenstellung!

[Da der Kleinbus 3 Liter weniger verbraucht als der Lieferwagen, benötigt er ($63 - 3 =$) **60 Liter**.]

- Was lässt sich nun unmittelbar berechnen? Begründe!
  - ° Wie viele Kilometer fuhr der Kleinbus, wenn er 60 Liter verbrauchte?
    - : Beachte, dass der Kleinbus mit 8 Liter 100 km weit fahren kann!
      - · Wie weit käme der Kleinbus mit 4 Liter Kraftstoff?
Wie weit kommt er folglich mit 60 Liter Kraftstoff?

[Wenn K. mit 8 Liter 100 km fährt, dann fährt er mit ($8:2 =$) 4 Liter ($100:2 =$) **50 km** .
" " " " " 4 Liter 50 km " " " " " " " ($15 \cdot 4 =$) 60 Liter ($15 \cdot 50 =$) **750 km** .]

- *Antwortsatz!*

[Der Kleinbus fuhr **750 km** .]
- *Probe am Text!*

Zunächst wird festgestellt, dass das Resultat mit der Abschätzung "dreistellige Zahl" übereinstimmt.
Dann wird anhand des Aufgabentextes nochmals nachgeprüft, ob alle gegebenen Größen und Beziehungen korrekt verarbeitet wurden, und es wird auch nochmals die Korrektheit aller durchgeführten Rechnungen überprüft.

26

In der rechten Tabelle wurde durch Numerierung von Feldern zusätzlich festgehalten, in welcher Reihenfolge die benötigten Zwischenergebnisse (Hilfsgrößen) ermitteltn wurden.

- Was lässt sich aus den gegebenen Größen unmittelbar berechnen? Begründe!
  - ° Was lässt sich aus der Angabe berechnen, dass der Lieferwagen für 100 km 9 Liter Kraftstoff verbraucht? .
    - : Berechne, wie viele Liter der Lieferwagen für 700 km verbraucht!

[Wenn für 100 km 9 Liter verbraucht werden, dann werden für 700 km ($7 \cdot 9 =$) **63 Liter** verbraucht.]

- Was lässt sich nun unmittelbar berechnen? Begründe!
  - ° Beachte den letzten Satz in der Aufgabenstellung!

[Da der Kleinbus 3 Liter weniger verbraucht als der Lieferwagen, benötigt er ($63 - 3 =$) **60 Liter**.]

- Was lässt sich nun unmittelbar berechnen? Begründe!
  - ° Wie viele Kilometer fuhr der Kleinbus, wenn er 60 Liter verbrauchte?
    - : Beachte, dass der Kleinbus mit 8 Liter 100 km weit fahren kann!
      - · Wie weit käme der Kleinbus mit 4 Liter Kraftstoff?
Wie weit kommt er folglich mit 60 Liter Kraftstoff?

[Wenn K. mit 8 Liter 100 km fährt, dann fährt er mit ($8:2 =$) 4 Liter ($100:2 =$) **50 km** .
" " " " " 4 Liter 50 km " " " " " " " ($15 \cdot 4 =$) 60 Liter ($15 \cdot 50 =$) **750 km** .]

- *Antwortsatz!*

[Der Kleinbus fuhr **750 km** .]
- *Probe am Text!*

Zunächst wird festgestellt, dass das Resultat mit der Abschätzung "dreistellige Zahl" übereinstimmt.
Dann wird anhand des Aufgabentextes nochmals nachgeprüft, ob alle gegebenen Größen und Beziehungen korrekt verarbeitet wurden, und es wird auch nochmals die Korrektheit aller durchgeführten Rechnungen überprüft.

4. BEMERKUNGEN ZUR AUSWAHL UND ANORDNUNG DER AUFGABEN

Da die Aufgaben in den *"**Aufgabenblättern**"* und in der *"**Aufgabensammlung**"* für einen problemhaft und differenziert gestalteten Unterricht, für den Förderunterricht mit leistungsstarken Schülern, für Schularbeitsgemeinschaften, für überschulische Arbeitsgemeinschaften und auch für die individuelle Förderung hochbegabter Schüler bestimmt sind, mussten Aufgaben sehr unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades in einer so hohen Anzahl aufgenommen werden, dass der Lehrer stets eine vom Leistungsstand seiner Schüler abhängige ***Auswahl*** treffen kann und muss.
Es wurde darauf geachtet, dass die Aufgaben im wesentlichen dem vom Sächsischen Staatsministerium für Kultus 1992 herausgegebenen ***Lehrplan*** Grundschule, Mathematik Klasse 3, entsprechen. Nur in sehr wenigen Aufgaben treten vierstellige Zahlen auf oder werden Begriffe verwendet, die nicht zum Unterrichtsstoff gehören und die daher vom Lehrer erläutert werden müssen (z.B. "Diagonale", "Trapez" , "Umfang").

Die Aufgaben der ***Aufgabensammlung*** sind in drei Blöcke unterteilt: Die *"**leichten**"* Aufgaben 1) bis 55), die *"**mittelschweren**"* Aufgaben 56) bis 100) und die *"**schweren**"* Aufgaben 101) bis 115) .
Innerhalb eines jeden Blocks sind die Aufgaben nach den Lernbereichen ***Arithmetik, Größen, Sachaufgaben, Geometrie, Sonstiges*** geordnet.

Jedes der ***16 Aufgabenblätter*** ist für einen vierzehntägig stattfindenden 90-minütigen Zirkel (oder für zwei wöchentlich stattfindende 45-minütige Zirkel) gedacht, wobei es unmöglich sein dürfte, alle sieben Aufgaben zu behandeln. Die Aufgaben sind im allgemeinen nach dem Schwierigkeitsgrad angeordnet, was eine Auswahl erleichtern soll. Es ist ratsam, außer den Aufgaben aus den Aufgabenblättern auch noch passend ausgewählte Aufgaben aus der Aufgabensammlung zu behandeln.

Da wir das ***Ziel*** verfolgen, die ***Fähigkeit zum problemlösenden Denken*** durch das ***Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen*** zu entwickeln, wurden die Aufgaben in den *Aufgabenblättern* dementsprechend ausgewählt und angeordnet.
Im Folgenden wird angegeben, um welche Vorgehensweisen (***heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien***) es sich dabei handelt und mit Hilfe welcher ***Aufgabengruppen*** eine Vermittlung möglich ist.
Im Abschnitt 5. wird dann gezeigt, auf welche Weise die genannten heuristischen Vorgehensweisen vermittelt werden können.

Die Schüler werden nur dann in der Lage sein, problemhafte Aufgaben zu lösen, wenn sie über entsprechende ***Fertigkeiten im Rechnen*** verfügen. Um dies überprüfen und nötigenfalls festigen zu können, ist die 1. Aufgabe eines jeden Aufgabenblatts eine derartige ***algorithmisch lösbare Aufgabe***. Bei deren Anordnung wurde berücksichtigt, dass das schriftliche Rechnen im Unterricht erst nach dem mündlichen Rechnen eingeführt werden kann.

Die Aufgaben aus den *"Aufgabenblättern"* werden mit x.y) bezeichnet, wobei x die Nummer des Aufgabenblattes und y die Nummer der Aufgabe bezeichnet.
Die Aufgaben aus der *"Aufgabensammlung"* werden mit z) bezeichnet, wobei z die laufende Nummer der Aufgabe festhält.

27

4. BEMERKUNGEN ZUR AUSWAHL UND ANORDNUNG DER AUFGABEN

Da die Aufgaben in den *"**Aufgabenblättern**"* und in der *"**Aufgabensammlung**"* für einen problemhaft und differenziert gestalteten Unterricht, für den Förderunterricht mit leistungsstarken Schülern, für Schularbeitsgemeinschaften, für überschulische Arbeitsgemeinschaften und auch für die individuelle Förderung hochbegabter Schüler bestimmt sind, mussten Aufgaben sehr unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades in einer so hohen Anzahl aufgenommen werden, dass der Lehrer stets eine vom Leistungsstand seiner Schüler abhängige ***Auswahl*** treffen kann und muss.
Es wurde darauf geachtet, dass die Aufgaben im wesentlichen dem vom Sächsischen Staatsministerium für Kultus 1992 herausgegebenen ***Lehrplan*** Grundschule, Mathematik Klasse 3, entsprechen. Nur in sehr wenigen Aufgaben treten vierstellige Zahlen auf oder werden Begriffe verwendet, die nicht zum Unterrichtsstoff gehören und die daher vom Lehrer erläutert werden müssen (z.B. "Diagonale", "Trapez" , "Umfang").

Die Aufgaben der ***Aufgabensammlung*** sind in drei Blöcke unterteilt: Die *"**leichten**"* Aufgaben 1) bis 55), die *"**mittelschweren**"* Aufgaben 56) bis 100) und die *"**schweren**"* Aufgaben 101) bis 115) .
Innerhalb eines jeden Blocks sind die Aufgaben nach den Lernbereichen ***Arithmetik, Größen, Sachaufgaben, Geometrie, Sonstiges*** geordnet.

Jedes der ***16 Aufgabenblätter*** ist für einen vierzehntägig stattfindenden 90-minütigen Zirkel (oder für zwei wöchentlich stattfindende 45-minütige Zirkel) gedacht, wobei es unmöglich sein dürfte, alle sieben Aufgaben zu behandeln. Die Aufgaben sind im allgemeinen nach dem Schwierigkeitsgrad angeordnet, was eine Auswahl erleichtern soll. Es ist ratsam, außer den Aufgaben aus den Aufgabenblättern auch noch passend ausgewählte Aufgaben aus der Aufgabensammlung zu behandeln.

Da wir das ***Ziel*** verfolgen, die ***Fähigkeit zum problemlösenden Denken*** durch das ***Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen*** zu entwickeln, wurden die Aufgaben in den *Aufgabenblättern* dementsprechend ausgewählt und angeordnet.
Im Folgenden wird angegeben, um welche Vorgehensweisen (***heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien***) es sich dabei handelt und mit Hilfe welcher ***Aufgabengruppen*** eine Vermittlung möglich ist.
Im Abschnitt 5. wird dann gezeigt, auf welche Weise die genannten heuristischen Vorgehensweisen vermittelt werden können.

Die Schüler werden nur dann in der Lage sein, problemhafte Aufgaben zu lösen, wenn sie über entsprechende ***Fertigkeiten im Rechnen*** verfügen. Um dies überprüfen und nötigenfalls festigen zu können, ist die 1. Aufgabe eines jeden Aufgabenblatts eine derartige ***algorithmisch lösbare Aufgabe***. Bei deren Anordnung wurde berücksichtigt, dass das schriftliche Rechnen im Unterricht erst nach dem mündlichen Rechnen eingeführt werden kann.

Die Aufgaben aus den *"Aufgabenblättern"* werden mit x.y) bezeichnet, wobei x die Nummer des Aufgabenblattes und y die Nummer der Aufgabe bezeichnet.
Die Aufgaben aus der *"Aufgabensammlung"* werden mit z) bezeichnet, wobei z die laufende Nummer der Aufgabe festhält.

Jede Aufgabe aus der *"Aufgabenblätter"* kommt mindestens einmal in einer der im Folgenden genannten Aufgabengruppen vor. Für die Aufgaben aus der *"Aufgabensammlung"* trifft dies nicht zu.

4.1. Entwickeln von **Fertigkeiten** im mündlichen und schriftlichen **Rechnen**:

Aufgabe 1.1), 2.1). ..., 16.1)

Aufgabe 1), 7), 12), 18), 29).

4.2. Verwenden von **Variablen** und **Klammern** in Termen:

Aufgabe 11.2), 12.2), 13.2), 14.2), 14.7), 15.2), 16.2).

Aufgabe 101).

4.3. Verwenden von **zweckmäßigen Bezeichnungen**:

Aufgabe 3.5), 4.5), 5.5), 6.5), 7.5), 9.7), 10.5), 10.6), 16.6).

Aufgabe 6), 33), 37), 51), 92), 113), 114), 115).

4.4. Verwenden von **Tabellen**:

Aufgabe 3.3), 3.7), 4.3), 4.7), 5.3), 5.5), 6.3), 6.5), 6.7), 7.3), 7.5), 8.3), 8.4), 10.6), 11.3), 11.6), 11.7), 12.4), 12.7), 13.3), 15.7).

Aufgabe 14), 24), 26), 27), 28), 32), 50), 68), 72),101), 105).

4.5. Verwenden von **Skizzen**:

Aufgabe 6.3), 13.4), 14.4), 15.3), 15,5).

Aufgabe 6), 78), 81), 88), 106).

4.6. Verwenden von **Mengendiagrammen**:

Aufgabe 11.5), 12.5), 16.5).

Aufgabe 55).

4.7. Systematisches Probieren (Ermitteln aller möglichen Fälle):

Aufgabe 1,2), 1.4), 22), 3.4), 4.4), 5.4), 6.4), 7.3), 7.4), 8.1), 8.5), 9.4), 9.7), 10.2), 10.3), 10.4), 11.4), 13.6), 16.7).

Aufgabe 2), 5), 20), 25), 32). 45), 47), 48), 50), 51), 57), 60), 61), 62), 66), 67), 68), 72), 75), 84), 86), 89), 90), 91), 92), 93), 94), 95), 100, 101), 103), 115).

4.8. Vorwärtsarbeiten und **Folgern aus Bedingungen**:

Aufgabe 1.3), 2.3), 3.3), 4.2), 6.2), 7.2), 8.2), 9.2), 9.3), 14.6).

Aufgabe 3), 5), 13), 15), 16), 17), 21), 22), 23), 27), 28), 31), 34), 35), 36), 37), 41), 54), 56), 58), 59), 62), 66), 67), 69), 70), 71), 73), 74), 75), 77), 79), 95), 97), 101), 102), 103), 104), 111), 114).

4.9. Rückwärtsarbeiten:

Aufgabe 9.5).

Aufgabe 43).

28

Jede Aufgabe aus der *"Aufgabenblätter"* kommt mindestens einmal in einer der im Folgenden genannten Aufgabengruppen vor. Für die Aufgaben aus der *"Aufgabensammlung"* trifft dies nicht zu.

4.1. Entwickeln von **Fertigkeiten** im mündlichen und schriftlichen **Rechnen**:

Aufgabe 1.1), 2.1). ..., 16.1)

Aufgabe 1), 7), 12), 18), 29).

4.2. Verwenden von **Variablen** und **Klammern** in Termen:

Aufgabe 11.2), 12.2), 13.2), 14.2), 14.7), 15.2), 16.2).

Aufgabe 101).

4.3. Verwenden von **zweckmäßigen Bezeichnungen**:

Aufgabe 3.5), 4.5), 5.5), 6.5), 7.5), 9.7), 10.5), 10.6), 16.6).

Aufgabe 6), 33), 37), 51), 92), 113), 114), 115).

4.4. Verwenden von **Tabellen**:

Aufgabe 3.3), 3.7), 4.3), 4.7), 5.3), 5.5), 6.3), 6.5), 6.7), 7.3), 7.5), 8.3), 8.4), 10.6), 11.3), 11.6), 11.7), 12.4), 12.7), 13.3), 15.7).

Aufgabe 14), 24), 26), 27), 28), 32), 50), 68), 72),101), 105).

4.5. Verwenden von **Skizzen**:

Aufgabe 6.3), 13.4), 14.4), 15.3), 15,5).

Aufgabe 6), 78), 81), 88), 106).

4.6. Verwenden von **Mengendiagrammen**:

Aufgabe 11.5), 12.5), 16.5).

Aufgabe 55).

4.7. Systematisches Probieren (Ermitteln aller möglichen Fälle):

Aufgabe 1,2), 1.4), 22), 3.4), 4.4), 5.4), 6.4), 7.3), 7.4), 8.1), 8.5), 9.4), 9.7), 10.2), 10.3), 10.4), 11.4), 13.6), 16.7).

Aufgabe 2), 5), 20), 25), 32). 45), 47), 48), 50), 51), 57), 60), 61), 62), 66), 67), 68), 72), 75), 84), 86), 89), 90), 91), 92), 93), 94), 95), 100, 101), 103), 115).

4.8. Vorwärtsarbeiten und **Folgern aus Bedingungen**:

Aufgabe 1.3), 2.3), 3.3), 4.2), 6.2), 7.2), 8.2), 9.2), 9.3), 14.6).

Aufgabe 3), 5), 13), 15), 16), 17), 21), 22), 23), 27), 28), 31), 34), 35), 36), 37), 41), 54), 56), 58), 59), 62), 66), 67), 69), 70), 71), 73), 74), 75), 77), 79), 95), 97), 101), 102), 103), 104), 111), 114).

4.9. Rückwärtsarbeiten:

Aufgabe 9.5).

Aufgabe 43).

4.10. "Von rückwärts her rechnen":

Aufgabe 4.6), 6.6), 8.6).

Aufgabe 104).

4.11. Vermuten von Gesetzmäßigkeiten:

Aufgabe 1.5), 2.4), 2.5), 4.7), 5.2), 10.7), 12.3), 12.7), 13.5), 14.3).

Aufgabe 48), 53), 99).

4.12. Problemtransformation; Rückführung auf Hilfsaufgaben:

Aufgabe 5.6), 5.7), 6.7), 7.6), 13.7).

Aufgabe 38), 45), 57), 63), 64), 94).

4.13. Übersetzen in die Sprache der Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 8.7), 15.7).

Aufgabe 113), 114).

4.14) Ausnützen von **Analogien**

Aufgabe 10.3), 11.3), 12.4), 16.4).

Aufgabe 37), 76), 107b), 113), 114).

4.13. "Findigkeit" beim Lösen problemhafter Aufgaben:

Aufgabe 1.5), 1.6), 2.4), 2.5), 2.6), 2.7), 3.2), 3.6), 4.7), 5.2), 5.7), 6.7), 7.7), 8.7), 9.6), 12.3), 12.6), 13.5), 13.7), 14.3), 14.5), 15.6),

Aufgabe 4), 18), 39), 44), 48), 49), 52), 65), 98), 100, 108), 109), 110).

29

4.10. "Von rückwärts her rechnen":

Aufgabe 4.6), 6.6), 8.6).

Aufgabe 104).

4.11. Vermuten von Gesetzmäßigkeiten:

Aufgabe 1.5), 2.4), 2.5), 4.7), 5.2), 10.7), 12.3), 12.7), 13.5), 14.3).

Aufgabe 48), 53), 99).

4.12. Problemtransformation; Rückführung auf Hilfsaufgaben:

Aufgabe 5.6), 5.7), 6.7), 7.6), 13.7).

Aufgabe 38), 45), 57), 63), 64), 94).

4.13. Übersetzen in die Sprache der Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 8.7), 15.7).

Aufgabe 113), 114).

4.14) Ausnützen von **Analogien**

Aufgabe 10.3), 11.3), 12.4), 16.4).

Aufgabe 37), 76), 107b), 113), 114).

4.13. "Findigkeit" beim Lösen problemhafter Aufgaben:

Aufgabe 1.5), 1.6), 2.4), 2.5), 2.6), 2.7), 3.2), 3.6), 4.7), 5.2), 5.7), 6.7), 7.7), 8.7), 9.6), 12.3), 12.6), 13.5), 13.7), 14.3), 14.5), 15.6),

Aufgabe 4), 18), 39), 44), 48), 49), 52), 65), 98), 100, 108), 109), 110).

5. VORSCHLÄGE ZUM BEHANDELN DER AUFGABEN

Wir wollen hier anhand konkreter Beispiele zeigen, wie man die im Abschnitt 2.1. aufgeführten ***heuristischen Vorgehensweisen*** beim Aufgabenlösen bewusst vermitteln kann.
Ferner wollen wir zeigen, wie die *"**genormte Impulsgebung**"* sowie das Ergänzen von *"**Hauptimpulsen**"* durch *"**Unterimpulse**"* im konkreten Fall aussehen kann.

Wir beginnen mit dem Einführen der ***heuristischen Hilfsmittel*** ***"Günstige Bezeichnungen", "Tabellen", "Skizzen"*** .
Hierbei geht es um weitgehend lehrbare geistige Techniken, die auch in den höheren Klassenstufen von großer Bedeutung sind.

Es folgt das Einführen von ***heuristischen Strategien***.
Das *"**Systematische Probieren**"* spielt in Klasse 3 zusammen mit dem *"**Vorwärtsarbeiten**"* die wichtigste Rolle, während dem *"**Rückwärtsarbeiten**"* in dieser Klassenstufe noch keine so große Bedeutung zukommt.

Am schwierigsten lehrbar sind ***heuristische Prinzipien***.
Bei ihrem Einsatz kann man *hochbegabte* Schüler besonders leicht entdecken. Wir werden vor allem auf *"**Problemtransformationen**"* und die *"**Rückführung auf Hilfsaufgaben**"* eingehen.

In der Regel erläutern wir das Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen anhand von schwierigen Aufgaben, die es gestatten, die Tragweite dieser Vorgehensweise zu demonstrieren.
Es wird dann angegeben, welche leichtere Aufgaben für das Einführen und das Üben der betreffenden Vorgehensweise geeignet sind.

5.1. Einführen von zweckmäßigen Bezeichnungen

Von wichtiger Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik war der Übergang zu einer formalen ***Symbolsprache***.
Aus Konstanten, Variablen, Relationszeichen und Operationszeichen werden sinnvolle ***Zeichenreihen*** (etwa Gleichungen, Ungleichungen oder Terme) gebildet, die sich dann nach formalen *Regeln* umfomen lassen.

Eine ***Variable*** ist ein Zeichen für ein ***beliebiges*** Element einer vorgegebenen Menge. Die Schüler kennen Variable in der Form von *"**Platzhaltern**"* oder *"**Leerstellen**"*. In Klasse 3 werden laut Lehrplan hierfür auch ***Buchstaben*** verwendet und es werden erste Aufgaben mit Klammern gestellt.
Dies kommt in den **Aufgaben 11.2), 12.2), 13.2), 14.2), 14.7)** und **15.2)** vor.

Eine ***Konstante*** ist ein Zeichen für ein ***bestimmtes*** Element einer vorgegebenen Menge. Die Schüler kennen bisher diesbezüglich nur die (aus den Ziffern des dekadischen Systems zusammengesetzten) ***Zahlzeichen***.

30

5. VORSCHLÄGE ZUM BEHANDELN DER AUFGABEN

Wir wollen hier anhand konkreter Beispiele zeigen, wie man die im Abschnitt 2.1. aufgeführten heuristischen Vorgehensweisen beim Aufgabenlösen bewusst vermitteln kann.
Ferner wollen wir zeigen, wie die "genormte Impulsgebung" sowie das Ergänzen von "Hauptimpulsen" durch "Unterimpulse" im konkreten Fall aussehen kann.

Wir beginnen mit dem Einführen der heuristischen Hilfsmittel "Günstige Bezeichnungen", "Tabellen", "Skizzen" .
Hierbei geht es um weitgehend lehrbare geistige Techniken, die auch in den höheren Klassenstufen von großer Bedeutung sind.

Es folgt das Einführen von heuristischen Strategien.
Das "Systematische Probieren" spielt in Klasse 3 zusammen mit dem "Vorwärtsarbeiten" die wichtigste Rolle, während dem "Rückwärtsarbeiten" in dieser Klassenstufe noch keine so große Bedeutung zukommt.

Am schwierigsten lehrbar sind heuristische Prinzipien.
Bei ihrem Einsatz kann man hochbegabte Schüler besonders leicht entdecken. Wir werden vor allem auf "Problemtransformationen" und die "Rückführung auf Hilfsaufgaben" eingehen.

In der Regel erläutern wir das Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen anhand von schwierigen Aufgaben, die es gestatten, die Tragweite dieser Vorgehensweise zu demonstrieren.
Es wird dann angegeben, welche leichtere Aufgaben für das Einführen und das Üben der betreffenden Vorgehensweise geeignet sind.

5.1. Einführen von zweckmäßigen Bezeichnungen

Von wichtiger Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik war der Übergang zu einer formalen Symbolsprache.
Aus Konstanten, Variablen, Relationszeichen und Operationszeichen werden sinnvolle Zeichenreihen (etwa Gleichungen, Ungleichungen oder Terme) gebildet, die sich dann nach formalen Regeln umfomen lassen.

Eine Variable ist ein Zeichen für ein beliebiges Element einer vorgegebenen Menge. Die Schüler kennen Variable in der Form von "Platzhaltern" oder "Leerstellen". In Klasse 3 werden laut Lehrplan hierfür auch Buchstaben verwendet und es werden erste Aufgaben mit Klammern gestellt.
Dies kommt in den Aufgaben 11.2), 12.2), 13.2), 14.2), 14.7) und 15.2) vor.

Eine Konstante ist ein Zeichen für ein bestimmtes Element einer vorgegebenen Menge. Die Schüler kennen bisher diesbezüglich nur die (aus den Ziffern des dekadischen Systems zusammengesetzten) Zahlzeichen.

Die Schüler sollen erkennen, wie nützlich es ist, etwa für Namen, Berufe u.ä. *Buchstaben* als abkürzende Bezeichnungen zu verwenden und auch die Relationszeichen "=, <, >" (in einem etwas erweiterten Sinn) einzusetzen, um gewisse Beziehungen knapp und übersichtlich festzuhalten.
Wenn z.B. A und B als Abkürzung der Namen "Arnd" und "Bert" verwendet werden dann kann man vereinbaren, dass "A < B" die Aussage "A ist jünger als B" oder die Aussage "A ist kleiner als B" oder die Aussage "A kam früher ins Ziel als B" usw. festhält. Dies ist immer dann statthaft, wenn die betreffende Beziehung die Eigenschaften einer Ordnungsrelation besitzt.

Bei **Aufgabe 10.5)** geht es darum, aus fünf Aussagen, die Beziehungen zwischen bzw. Bedingungen für 8 Schüler festhalten, die Reihenfolge des Zieleinlaufs dieser Schüler bei einem Lauf abzuleiten.
Zunächst sollen die Schüler in ***selbständiger Arbeit*** versuchen, die Lösung zu finden. Wenn dies den meisten Schülern gelingt, dann wird man ihnen eine schwierigere Aufgabe dieses Typs stellen. Nur wenn die meisten Schüler scheitern, wird man in der anschließenden ***gemeinsamen Arbeit*** eine erfolgversprechende *heuristische Vorgehensweise* einführen.

Folgende ***Impulse*** können dabei hilfreich sein:

- Führe zweckmäßige Bezeichnungen ein!
  Übersetze die Aufgabenstellung in die "Symbolsprache"!
  - Wähle für die Abkürzung der Namen die Anfangsbuchstaben! [A,B,C,D,E,F,G]
    Wie kann man festhalten, dass A vor B eintraf? [A < B]
    Wie kann man festhalten, dass F den mittleren der sieben Plätze erzielte?
    [F = 4.]
- Was lässt sich aus den Bedingungen (d) und (e) unmittelbar folgern? Begründe!
  Halte die Folgerungen in der Symbolsprache fest!
  [Wenn A und D in A-Stadt wohnen und wenn der Junge, der den 2. Platz schaffte, aus B-Stadt kommt, dann gilt $A \neq 2.$ und $D \neq 2.$]

Ferner ist es günstig, die gesuchte Platzverteilung in einer ***Tabelle*** festzuhalten.
Man lasse erkennen, dass A < B noch nicht bedeutet, dass A *unmittelbar* vor B eingelaufen ist, d.h. dass wir mit unserer symbolischen Schreibweise noch nicht alle Informationen festgehalten haben. Bedingung (a) lässt sich daher genauer in der Form (C;A;B) festhalten, wenn man vereinbart, dass auf diese Weise die zusätzliche Information "direkt" oder "unmittelbar" festgehalten werden soll.
Das Resultat kann man wie folgt an der ***Wandtafel*** festhalten:

(a)	C < A < B	(C;A;B)
(b)	E < D	(E;D)
(c)	F = 4.	

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
			F			

(d)
] → $A \neq 2.$ und $D \neq 2.$
(e)

- Was lässt sich nun unmittelbar folgern? Begründe!
  [Wegen $A \neq 2$ muss (C;A;B) = (5.;6;7) gelten. Wegen $D \neq 2$ muss (E;D) = (2.;3.) gelten. Daraus folgt dann (als letzte Möglichkeit) G = 1.]
- Antwortsatz!

31

Die Schüler sollen erkennen, wie nützlich es ist, etwa für Namen, Berufe u.ä. *Buchstaben* als abkürzende Bezeichnungen zu verwenden und auch die Relationszeichen "=, <, >" (in einem etwas erweiterten Sinn) einzusetzen, um gewisse Beziehungen knapp und übersichtlich festzuhalten.
Wenn z.B. A und B als Abkürzung der Namen "Arnd" und "Bert" verwendet werden dann kann man vereinbaren, dass "A < B" die Aussage "A ist jünger als B" oder die Aussage "A ist kleiner als B" oder die Aussage "A kam früher ins Ziel als B" usw. festhält. Dies ist immer dann statthaft, wenn die betreffende Beziehung die Eigenschaften einer Ordnungsrelation besitzt.

Bei **Aufgabe 10.5)** geht es darum, aus fünf Aussagen, die Beziehungen zwischen bzw. Bedingungen für 8 Schüler festhalten, die Reihenfolge des Zieleinlaufs dieser Schüler bei einem Lauf abzuleiten.
Zunächst sollen die Schüler in ***selbständiger Arbeit*** versuchen, die Lösung zu finden. Wenn dies den meisten Schülern gelingt, dann wird man ihnen eine schwierigere Aufgabe dieses Typs stellen. Nur wenn die meisten Schüler scheitern, wird man in der anschließenden ***gemeinsamen Arbeit*** eine erfolgversprechende *heuristische Vorgehensweise* einführen.

Folgende ***Impulse*** können dabei hilfreich sein:

- Führe zweckmäßige Bezeichnungen ein!
  Übersetze die Aufgabenstellung in die "Symbolsprache"!
  - Wähle für die Abkürzung der Namen die Anfangsbuchstaben! [A,B,C,D,E,F,G]
    Wie kann man festhalten, dass A vor B eintraf? [A < B]
    Wie kann man festhalten, dass F den mittleren der sieben Plätze erzielte?
    [F = 4.]
- Was lässt sich aus den Bedingungen (d) und (e) unmittelbar folgern? Begründe!
  Halte die Folgerungen in der Symbolsprache fest!
  [Wenn A und D in A-Stadt wohnen und wenn der Junge, der den 2. Platz schaffte, aus B-Stadt kommt, dann gilt $A \neq 2.$ und $D \neq 2.$]

Ferner ist es günstig, die gesuchte Platzverteilung in einer ***Tabelle*** festzuhalten.
Man lasse erkennen, dass A < B noch nicht bedeutet, dass A *unmittelbar* vor B eingelaufen ist, d.h. dass wir mit unserer symbolischen Schreibweise noch nicht alle Informationen festgehalten haben. Bedingung (a) lässt sich daher genauer in der Form (C;A;B) festhalten, wenn man vereinbart, dass auf diese Weise die zusätzliche Information "direkt" oder "unmittelbar" festgehalten werden soll.
Das Resultat kann man wie folgt an der ***Wandtafel*** festhalten:

(a)	C < A < B	(C;A;B)
(b)	E < D	(E;D)
(c)	F = 4.	

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
			F			

(d)
] → $A \neq 2.$ und $D \neq 2.$
(e)

- Was lässt sich nun unmittelbar folgern? Begründe!
  [Wegen $A \neq 2$ muss (C;A;B) = (5.;6;7) gelten. Wegen $D \neq 2$ muss (E;D) = (2.;3.) gelten. Daraus folgt dann (als letzte Möglichkeit) G = 1.]
- Antwortsatz!

[Die Reihenfolge des Zieleinlaufs lautet: Gunther, Erich, Dieter, Franz, Claus, Andreas, Bernd.]

- Probe am Text!
  [**Es** wird geprüft, ob die angegebene Reihenfolge tatsächlich die Bedingungen (a) bis (d), wie sie im Aufgabentext stehen, erfüllen.]

Der Zweck einer ***Probe*** wird den Schülern damit erklärt, dass auf diese Weise Fehler beim Folgern entdeckt werden sollen.

In Klasse 3 stellen wir nur lösbare Aufgaben. In höheren Klassenstufen muss der Schüler darauf gefasst sein, dass die Aufgabe eine (für die Herleitung nicht verwendete) "fehlerhafte" Bedingung enthält, die bewirkt, dass die Aufgabe keine Lösung besitzt. In solchen Fällen ist eine Probe als ***Existenznachweis*** aus logischer Sicht erforderlich.

Zur Einführung in diese Aufgabengruppe kann man die **Aufgabe 3.5)** wählen. Das ***Wandtafelbild*** kann wie folgt aussehen:

(a) $A < B$
$\rightarrow A < B < D$
$\rightarrow A < B < D < C$
(b) $D < C$
(c) $B < D$
(d) $C > A$, also $A < C$ (überflüssig)

Wie man erkennt, wird Bedingung (d) nicht benötigt. Würde man sie etwa durch die Bedingung (d*) $D < A$ ersetzen, dann hätte die Aufgabe keine Lösung, was man nur bemerken kann, wenn man eine ***Probe am Text*** als ***Existenznachweis*** durchführt.

Bei der ebenfalls ***analog*** zu lösenden etwas schwierigeren **Aufgabe 4.5.)** wird man darauf achten, dass die gegebenen Bedingungen sofort so umformuliert werden, dass man nur das Zeichen "<" zu verwenden braucht.

Das ***Wandtafelbild*** kann wie folgt aussehen:

$T < S < A$
$P < A$ $\rightarrow T < S < P < A$
$\rightarrow S,T < P < A$
$S,T < P$

1.	2.	3.	4.	5.
J				

Wie man beim Lösen von ***Zuordnungsaufgaben*** günstige Bezeichnungen zweckmäßig einsetzen kann, wird anhand der **Aufgaben 5.5), 6.5), 7.5)** und **10.6)** im Abschnitt 5.2.. (Verwenden von Tabellen) gezeigt.

Ab Klasse 6 spielt folgende ***heuristische Vorgehensweise*** eine wichtige Rolle:

- Führe Variable ein!
- Übersetze die Aufgabe in die Sprache der Gleichungen!
- Löse die Gleichungen!

32

[Die Reihenfolge des Zieleinlaufs lautet: Gunther, Erich, Dieter, Franz, Claus, Andreas, Bernd.]

- Probe am Text!
  [**Es** wird geprüft, ob die angegebene Reihenfolge tatsächlich die Bedingungen (a) bis (d), wie sie im Aufgabentext stehen, erfüllen.]

Der Zweck einer ***Probe*** wird den Schülern damit erklärt, dass auf diese Weise Fehler beim Folgern entdeckt werden sollen.

In Klasse 3 stellen wir nur lösbare Aufgaben. In höheren Klassenstufen muss der Schüler darauf gefasst sein, dass die Aufgabe eine (für die Herleitung nicht verwendete) "fehlerhafte" Bedingung enthält, die bewirkt, dass die Aufgabe keine Lösung besitzt. In solchen Fällen ist eine Probe als ***Existenznachweis*** aus logischer Sicht erforderlich.

Zur Einführung in diese Aufgabengruppe kann man die **Aufgabe 3.5)** wählen. Das ***Wandtafelbild*** kann wie folgt aussehen:

(a) $A < B$
$\rightarrow A < B < D$
$\rightarrow A < B < D < C$
(b) $D < C$
(c) $B < D$
(d) $C > A$, also $A < C$ (überflüssig)

Wie man erkennt, wird Bedingung (d) nicht benötigt. Würde man sie etwa durch die Bedingung (d*) $D < A$ ersetzen, dann hätte die Aufgabe keine Lösung, was man nur bemerken kann, wenn man eine ***Probe am Text*** als ***Existenznachweis*** durchführt.

Bei der ebenfalls ***analog*** zu lösenden etwas schwierigeren **Aufgabe 4.5.)** wird man darauf achten, dass die gegebenen Bedingungen sofort so umformuliert werden, dass man nur das Zeichen "<" zu verwenden braucht.

Das ***Wandtafelbild*** kann wie folgt aussehen:

$T < S < A$
$P < A$ $\rightarrow T < S < P < A$
$\rightarrow S,T < P < A$
$S,T < P$

1.	2.	3.	4.	5.
J				

Wie man beim Lösen von ***Zuordnungsaufgaben*** günstige Bezeichnungen zweckmäßig einsetzen kann, wird anhand der **Aufgaben 5.5), 6.5), 7.5)** und **10.6)** im Abschnitt 5.2.. (Verwenden von Tabellen) gezeigt.

Ab Klasse 6 spielt folgende ***heuristische Vorgehensweise*** eine wichtige Rolle:

- Führe Variable ein!
- Übersetze die Aufgabe in die Sprache der Gleichungen!
- Löse die Gleichungen!

Wenn man den letztgenannten Impuls weglässt, dann kann man leistungsstarke Schüler bereits in der Grundschule mit dieser Vorgehensweise vertraut machen.

Bezeichnet man in der recht schwierigen **Aufgabe 8.7)** die Anzahl der Kühe mit k und die Anzahl der Ziegen mit z, dann lässt sich diese Aufgabe wie folgt in die ***Sprache der Gleichungen*** übersetzen:

Wortsprache	Sprache der Gleichungen
3 Kühe und 4 Ziegen kosten 108 Taler. 7 Kühe und 6 Ziegen kosten 212 Taler.	$3\cdot k + 4\cdot z = 108$, $7\cdot k + 6\cdot z = 212$.
a) Wie viele Taler kosten 1 Kuh und 1 Ziege zusammen?	a) $k + z = ?$
b) Wie viele Taler kostet 1 Kuh und wie viele Taler kostet 1 Ziege?	b) Ermittle alle Zahlenpaare (k; z), für die beide Gleichungen gelten!

Wir werden auf diese Aufgabe im Abschnitt 5.4. (Systematisches Probieren) nochmals zurückkommen.

Bezeichnet man in der recht schwierigen **Aufgabe 15.7)** das Gewicht einer leeren Flasche mit l und das Gewicht einer vollen Flasche mit v, dann kann man diese Aufgabe wie folgt ***in die Sprache der Gleichungen übersetzen***:

Wortsprache	Sprache der Gl.
Auf einer Waage sind fünf links stehende leere Mineralwasserflaschen mit zwei rechts stehenden vollen im Gleichgewicht.	$5\cdot l = 2\cdot v$
a) Britta füllt zwei der leeren Flaschen mit Mineralwasser und errreicht dann, dass wieder Gleichgewicht eintritt, indem sie auf die rechte Waagschale leere Flaschen dazustellt. Wie viele leere Flaschen sind das?	$3\cdot l + 2\cdot v = ?\cdot l + 2\cdot v$ $? = 3$
b) Jan entleert dann eine der rechts stehenden Flaschen und nimmt von der linken Waagschale eine leere Flasche weg. Welche Waagschale neigt sich nun nach unten?	$2\cdot l + 2\cdot v$ **?** $4\cdot l + 1\cdot v$
c) Pia nimmt alle Flaschen von der Waage und stellt dann links zwei volle Flaschen und eine leere Flasche auf, rechts eine volle Flasche und drei leere Flaschen. Welche Waagschale neigt sich nun nach unten?	$1\cdot l + 2\cdot v$ **?** $3\cdot l + 1\cdot v$

Bei diesem ***"Übersetzen"*** werden vom Schüler ***Begründungen*** verlangt:
Zu a): Wenn 2 von den 5 leeren Flaschen gefüllt werden, dann stehen auf der linken Waagschale 3 leere und 2 volle Flaschen.
Auch leistungsschwächere Schüler dürften aus dieser Gleichung ablesen, dass auf der rechten Waagschale auch 3 leere Flaschen stehen müssen, damit Gleichgewicht eintritt.
Also wird die Situation, die Jan vorfindet, durch die Gleichung $3\cdot l + 2\cdot v = 3\cdot l + 2\cdot v$ beschrieben.
Wir werden auf diese Aufgabe im Abschnitt 5.5. (Folgern aus Bedingungen) noch zurückkommen.

33

Wenn man den letztgenannten Impuls weglässt, dann kann man leistungsstarke Schüler bereits in der Grundschule mit dieser Vorgehensweise vertraut machen.

Bezeichnet man in der recht schwierigen **Aufgabe 8.7)** die Anzahl der Kühe mit k und die Anzahl der Ziegen mit z, dann lässt sich diese Aufgabe wie folgt in die ***Sprache der Gleichungen*** übersetzen:

Wortsprache	Sprache der Gleichungen
3 Kühe und 4 Ziegen kosten 108 Taler. 7 Kühe und 6 Ziegen kosten 212 Taler.	$3\cdot k + 4\cdot z = 108$, $7\cdot k + 6\cdot z = 212$.
a) Wie viele Taler kosten 1 Kuh und 1 Ziege zusammen?	a) $k + z = ?$
b) Wie viele Taler kostet 1 Kuh und wie viele Taler kostet 1 Ziege?	b) Ermittle alle Zahlenpaare (k; z), für die beide Gleichungen gelten!

Wir werden auf diese Aufgabe im Abschnitt 5.4. (Systematisches Probieren) nochmals zurückkommen.

Bezeichnet man in der recht schwierigen **Aufgabe 15.7)** das Gewicht einer leeren Flasche mit l und das Gewicht einer vollen Flasche mit v, dann kann man diese Aufgabe wie folgt ***in die Sprache der Gleichungen übersetzen***:

Wortsprache	Sprache der Gl.
Auf einer Waage sind fünf links stehende leere Mineralwasserflaschen mit zwei rechts stehenden vollen im Gleichgewicht.	$5\cdot l = 2\cdot v$
a) Britta füllt zwei der leeren Flaschen mit Mineralwasser und errreicht dann, dass wieder Gleichgewicht eintritt, indem sie auf die rechte Waagschale leere Flaschen dazustellt. Wie viele leere Flaschen sind das?	$3\cdot l + 2\cdot v = ?\cdot l + 2\cdot v$ $? = 3$
b) Jan entleert dann eine der rechts stehenden Flaschen und nimmt von der linken Waagschale eine leere Flasche weg. Welche Waagschale neigt sich nun nach unten?	$2\cdot l + 2\cdot v$ **?** $4\cdot l + 1\cdot v$
c) Pia nimmt alle Flaschen von der Waage und stellt dann links zwei volle Flaschen und eine leere Flasche auf, rechts eine volle Flasche und drei leere Flaschen. Welche Waagschale neigt sich nun nach unten?	$1\cdot l + 2\cdot v$ **?** $3\cdot l + 1\cdot v$

Bei diesem ***"Übersetzen"*** werden vom Schüler ***Begründungen*** verlangt:
Zu a): Wenn 2 von den 5 leeren Flaschen gefüllt werden, dann stehen auf der linken Waagschale 3 leere und 2 volle Flaschen.
Auch leistungsschwächere Schüler dürften aus dieser Gleichung ablesen, dass auf der rechten Waagschale auch 3 leere Flaschen stehen müssen, damit Gleichgewicht eintritt.
Also wird die Situation, die Jan vorfindet, durch die Gleichung $3\cdot l + 2\cdot v = 3\cdot l + 2\cdot v$ beschrieben.
Wir werden auf diese Aufgabe im Abschnitt 5.5. (Folgern aus Bedingungen) noch zurückkommen.

5.2. Verwenden von Tabellen

Tabellen dienen zunächst dem übersichtlichen ***Festhalten von Gegebenem*** und ***Gesuchtem*** (was durch eingerahmte Leerfelder gekennzeichnet werden kann).
Oft ist es auch möglich, den ***Lösungsplan*** festzuhalten, indem auf benötigte ***Teilziele*** durch ***Leerfelder*** hingewiesen wird. Dabei kann sich der Lehrer auch notieren, in welcher *Reihenfolge* die Leerfelder gefüllt und damit die Teilziele erreicht werden müssen.
Ferner können ausgefüllte Tabellen für eine ***Probe am Text*** verwendet werden.

Derartige Tabellen treten im Aufgabentext der **Aufgaben 11.2), 12.2), 13.2), 14.2), 14.7), 15.2), 16.2)** auf.

Das Verwenden von Tabellen sollte bewusst eingeführt und geübt werden. Der Lehrer wird bei geeigneten Aufgaben *vormachen*, wie man Tabellen aufstellt und die Schüler auffordern, dies bei *analogen* Aufgaben *nachzumachen*.

Folgende ***Impulse*** können hilfreich sein:

- Wähle die ***Zeilen*** und ***Spalten*** einer Tabelle stets so, dass ***Felder*** entstehen, in die man das ***Gegebene***, das ***Gesuchte*** sowie benötigte ***Hilfsgrößen*** eintragen kann!
- Als ***Spalteneingänge*** kann man oft Anzahlen oder Größen wählen, die in der Aufgabe vorkommen. Als ***Zeileneingänge*** eignen sich oft die in der Aufgabe beschriebenen "Situationen".
- Manchmal muss man nachträglich weitere Zeilen oder Spalten einführen, um benötigte Hilfsgrößen oder Ergebnisse von Nebenrechnungen festzuhalten.

Die **Aufgabe 6.3)** wird recht leicht, wenn man folgende ***Tabelle*** vorgibt, in die die Schüler dann die dem Aufgabentext entnommenen Zahlen eintragen, die (hier eingeklammerten) Hilfsgrößen und die (hier fett gedruckten) gesuchten Anzahlen berechnen und in die umrahmten Felder eintragen.

	Anzahl Köpfe		Anzahl Beine	
	über W.	unter W.	über W.	unter W.
1 Ente an Land	*1*		*2*	
3 Enten "verkehrt" im Wasser		*3*	*6*	
4 Enten "normal" im Wasser	(4)			(8)
Insgesamt	**5**	**3**	**8**	**8**

Wie man für benötigte ***Nebenrechnungen*** Felder der Tabelle bereitstellen kann, sei anhand der **Aufgabe 13.3)** gezeigt:

	Liter	Kilometer
a)	32	400
		100
		600
b)		

Liter	Kilometer
32	400
(32:4 =) **8**	100
(6·8 =) **48**	600
(15 · 4) = 60	(15·50=) **750**
8	100
4	50

34

5.2. Verwenden von Tabellen

Tabellen dienen zunächst dem übersichtlichen ***Festhalten von Gegebenem*** und ***Gesuchtem*** (was durch eingerahmte Leerfelder gekennzeichnet werden kann).
Oft ist es auch möglich, den ***Lösungsplan*** festzuhalten, indem auf benötigte ***Teilziele*** durch ***Leerfelder*** hingewiesen wird. Dabei kann sich der Lehrer auch notieren, in welcher *Reihenfolge* die Leerfelder gefüllt und damit die Teilziele erreicht werden müssen.
Ferner können ausgefüllte Tabellen für eine ***Probe am Text*** verwendet werden.

Derartige Tabellen treten im Aufgabentext der **Aufgaben 11.2), 12.2), 13.2), 14.2), 14.7), 15.2), 16.2)** auf.

Das Verwenden von Tabellen sollte bewusst eingeführt und geübt werden. Der Lehrer wird bei geeigneten Aufgaben *vormachen*, wie man Tabellen aufstellt und die Schüler auffordern, dies bei *analogen* Aufgaben *nachzumachen*.

Folgende ***Impulse*** können hilfreich sein:

- Wähle die ***Zeilen*** und ***Spalten*** einer Tabelle stets so, dass ***Felder*** entstehen, in die man das ***Gegebene***, das ***Gesuchte*** sowie benötigte ***Hilfsgrößen*** eintragen kann!
- Als ***Spalteneingänge*** kann man oft Anzahlen oder Größen wählen, die in der Aufgabe vorkommen. Als ***Zeileneingänge*** eignen sich oft die in der Aufgabe beschriebenen "Situationen".
- Manchmal muss man nachträglich weitere Zeilen oder Spalten einführen, um benötigte Hilfsgrößen oder Ergebnisse von Nebenrechnungen festzuhalten.

Die **Aufgabe 6.3)** wird recht leicht, wenn man folgende ***Tabelle*** vorgibt, in die die Schüler dann die dem Aufgabentext entnommenen Zahlen eintragen, die (hier eingeklammerten) Hilfsgrößen und die (hier fett gedruckten) gesuchten Anzahlen berechnen und in die umrahmten Felder eintragen.

	Anzahl Köpfe		Anzahl Beine	
	über W.	unter W.	über W.	unter W.
1 Ente an Land	*1*		*2*	
3 Enten "verkehrt" im Wasser		*3*	*6*	
4 Enten "normal" im Wasser	(4)			(8)
Insgesamt	**5**	**3**	**8**	**8**

Wie man für benötigte ***Nebenrechnungen*** Felder der Tabelle bereitstellen kann, sei anhand der **Aufgabe 13.3)** gezeigt:

	Liter	Kilometer
a)	32	400
		100
		600
b)		

Liter	Kilometer
32	400
(32:4 =) **8**	100
(6·8 =) **48**	600
(15 · 4) = 60	(15·50=) **750**
8	100
4	50

Bei der wegen der Fülle der Daten recht schwierigen **Aufgabe 11.6)** ist es günstig, die nicht angegebene Uhrzeit der Abfahrt auf 0.00 Uhr zu verlegen und in die *Tabelle* eine zusätzliche ***Hilfsspalte*** für die Uhrzeit aufzunehmen, so dass die gegebene Fahrzeit in Form der Ankunftszeit 01.45 Uhr festgehalten werden kann.
Die (mündlich ausführbaren) Nebenrechnungen wurden in der Zeile festgehalten, in der sie benötigt werden.
Nachdem alle gegebenen Bedingungen ausgewertet und die Teilresultate in der Uhrzeit-Spalte festgehalten wurden, ist es nicht mehr schwer, die Resultate zu den Teilaufgaben a), b), c) zu ermitteln.

Situation	Uhrzeit	Schlafzeit	Wachzeit	
Abfahrt	0.00 Uhr			1 h 45 min = 105 min
			35 min	(105 **:** 3 =) 35 min
1. Einschlafen	0.35 Uhr			
		10 min		Bremsen nach 45 min
1. Aufwachen	0.45 Uhr			(105 - 45 =) 60 min Restzeit
			15 min	(60 **:** 4 =) 15 min
2. Einschlafen	1.00 Uhr			(105 - 60 =) 45 min Restzeit
		15 min		(45 **:** 3 =) 15 min
2. Aufwachen	1.15 Uhr			
			5 min	
3. Einschlafen	1.20 Uhr			
		25 min		1.20 Uhr bis 1.45 Uhr: 25 min
3. Aufwachen	1.45 Uhr			
	insgesamt	**50 min**		(10 + 15 + 25 =) 50 min

Eine ***Probe am Text*** besteht nun darin, dass man den Aufgabentext nochmals durchliest und zunächst nachprüft, ob alle gegebenen Beziehungen tatsächlich für die Herleitung verwendet und auch richtig erfasst wurden.
Wenn die Aufgabe ***überbestimmt*** ist, d.h. wenn eine Bedingung vorkommt, die für die Herleitung der Lösung nicht benötigt wurde, dann muss man überprüfen, ob die angegebene Lösung auch die überflüssige Bedingung erfüllt. Wäre dies nicht der Fall, dann besäße diese Aufgabe keine Lösung.
Auch wenn wir hier keine derartigen Aufgaben stellen, sollte man die Schüler anhalten, stets eine solche *Probe am Text* durchzuführen, um Rechen- oder Flüchtigkeitsfehler zu entdecken.

Bei **Aufgabe 4.3)** kann man die Informationen über das ***Gegebene*** und das ***Gesuchte*** durch die nachfolgend angegebene ***linke Tabelle*** festhalten, das ***Resultat*** und den ***Lösungsweg*** durch die **rechte *Tabelle***.

1. Preis	250 €
2. Preis	
3. Preis	
1 Sonderpreis	25 €
7 Sonderpreise	
alle Preise	$\boxed{}$

1. Preis	250 €
2. Preis	(1) 150 €
3. Preis	(2) 75 €
1 Sonderpreis	25 €
7 Sonderpreise	(3) 175 €
alle Preise	$\boxed{\textbf{650}\ €}$

35

Bei der wegen der Fülle der Daten recht schwierigen **Aufgabe 11.6)** ist es günstig, die nicht angegebene Uhrzeit der Abfahrt auf 0.00 Uhr zu verlegen und in die *Tabelle* eine zusätzliche ***Hilfsspalte*** für die Uhrzeit aufzunehmen, so dass die gegebene Fahrzeit in Form der Ankunftszeit 01.45 Uhr festgehalten werden kann.
Die (mündlich ausführbaren) Nebenrechnungen wurden in der Zeile festgehalten, in der sie benötigt werden.
Nachdem alle gegebenen Bedingungen ausgewertet und die Teilresultate in der Uhrzeit-Spalte festgehalten wurden, ist es nicht mehr schwer, die Resultate zu den Teilaufgaben a), b), c) zu ermitteln.

Situation	Uhrzeit	Schlafzeit	Wachzeit	
Abfahrt	0.00 Uhr			1 h 45 min = 105 min
			35 min	(105 **:** 3 =) 35 min
1. Einschlafen	0.35 Uhr			
		10 min		Bremsen nach 45 min
1. Aufwachen	0.45 Uhr			(105 - 45 =) 60 min Restzeit
			15 min	(60 **:** 4 =) 15 min
2. Einschlafen	1.00 Uhr			(105 - 60 =) 45 min Restzeit
		15 min		(45 **:** 3 =) 15 min
2. Aufwachen	1.15 Uhr			
			5 min	
3. Einschlafen	1.20 Uhr			
		25 min		1.20 Uhr bis 1.45 Uhr: 25 min
3. Aufwachen	1.45 Uhr			
	insgesamt	**50 min**		(10 + 15 + 25 =) 50 min

Eine ***Probe am Text*** besteht nun darin, dass man den Aufgabentext nochmals durchliest und zunächst nachprüft, ob alle gegebenen Beziehungen tatsächlich für die Herleitung verwendet und auch richtig erfasst wurden.
Wenn die Aufgabe ***überbestimmt*** ist, d.h. wenn eine Bedingung vorkommt, die für die Herleitung der Lösung nicht benötigt wurde, dann muss man überprüfen, ob die angegebene Lösung auch die überflüssige Bedingung erfüllt. Wäre dies nicht der Fall, dann besäße diese Aufgabe keine Lösung.
Auch wenn wir hier keine derartigen Aufgaben stellen, sollte man die Schüler anhalten, stets eine solche *Probe am Text* durchzuführen, um Rechen- oder Flüchtigkeitsfehler zu entdecken.

Bei **Aufgabe 4.3)** kann man die Informationen über das ***Gegebene*** und das ***Gesuchte*** durch die nachfolgend angegebene ***linke Tabelle*** festhalten, das ***Resultat*** und den ***Lösungsweg*** durch die **rechte *Tabelle***.

1. Preis	250 €
2. Preis	
3. Preis	
1 Sonderpreis	25 €
7 Sonderpreise	
alle Preise	$\boxed{}$

1. Preis	250 €
2. Preis	(1) 150 €
3. Preis	(2) 75 €
1 Sonderpreis	25 €
7 Sonderpreise	(3) 175 €
alle Preise	$\boxed{\textbf{650}\ €}$

Bei **Aufgabe 5.3)** kann man die Informationen über das ***Gegebene*** und das ***Gesuchte*** durch die nachfolgend angegebene ***linke Tabelle*** festhalten, das ***Resultat*** und den ***Lösungsweg*** durch die ***rechte Tabelle***.

	Weg	Verbrauch
Lieferwagen	100 km	9 Liter
in 1 Monat	700 km	
Kleinbus	100 km	8 Liter
in 1 Monat		3 l. weniger als L.

	Weg	Verbrauch
Lieferwagen	100 km	9 Liter
in 1 Monat	700 km	(7·9=) 63 Liter
Kleinbus	100 km	8 Liter
in 1 Monat	**750 km**	(63 - 3=) 60 Liter
	(100:2=) 50 km	(8:2 =) 4 Liter
	(15·50=) 750 km	(15·4 =) 60 Liter

Bei **Aufgabe 8.3)** ist es günstig, die Zeiten zunächst stets in Minuten umzurechnen. Folgende Tabellen halten Aufgabenstellung und Lösung fest:

	Weg	Zeit
mit Bus	20 km	30 min
Aufenthalt	0 km	42 min
mit Zug		
insgesamt		192 min
	60 km	60 min

	Weg	Zeit
mit Bus	20 km	30 min
Aufenthalt	0 km	42 min
mit Zug	120 km	(1) (192 - 42 - 30 =) **120 min**
insgesamt	**140 km**	192 min
	60 km	60 min

Ein einfaches Beispiel für das Festhalten des Lösungsweges wird anhand der **Aufgabe 3.3)**, die dem Einführen in das ***Vorwärtsarbeiten*** dient, im Abschnitt 5.5. besprochen.

Wenn eine Lösung durch ***systematisches Erfassen aller möglichen Fälle*** *(und Ausschließen der nicht möglichen Fälle)* ermittelt wird, dann spielen ***Tabellen*** ebenfalls eine wichtige Rolle.
Dies wird anhand der **Aufgaben 7.3), 8.4), 11.3), 12.4)** im Abschnitt 5.4. (Systematisches Probieren), anhand der **Aufgabe 3.7)** im Abschnitt 5.5. (Vorwärtsarbeiten) und anhand der **Aufgabe 6.7)** im Abschnitt 5.8. (Problemtransformation) demonstriert.

Auch beim ***Suchen nach Gesetzmäßigkeiten*** kann das übersichtliche Festhalten der erreichten Teilergebniss in Form von ***Tabellen*** wichtig sein. Dies wird anhand der **Aufgaben 4.7), 12.7) und 99)** im Abschnitt 5.7. vorgeführt.

Tabellen spielen schließlich auch beim Lösen von ***logisch-kombinatorischen Zuordnungsaufgaben*** eine wichtige Rolle.

Bei **Aufgabe 10.6)** wird nach der Zuordnung von vier Namen zu vier Berufen gesucht.
Verwirrend ist die Tatsache, dass die Berufsnamen mit den Familiennamen übereinstimmen.

36

Bei **Aufgabe 5.3)** kann man die Informationen über das ***Gegebene*** und das ***Gesuchte*** durch die nachfolgend angegebene ***linke Tabelle*** festhalten, das ***Resultat*** und den ***Lösungsweg*** durch die ***rechte Tabelle***.

	Weg	Verbrauch
Lieferwagen	100 km	9 Liter
in 1 Monat	700 km	
Kleinbus	100 km	8 Liter
in 1 Monat		3 l. weniger als L.

	Weg	Verbrauch
Lieferwagen	100 km	9 Liter
in 1 Monat	700 km	(7·9=) 63 Liter
Kleinbus	100 km	8 Liter
in 1 Monat	**750 km**	(63 - 3=) 60 Liter
	(100:2=) 50 km	(8:2 =) 4 Liter
	(15·50=) 750 km	(15·4 =) 60 Liter

Bei **Aufgabe 8.3)** ist es günstig, die Zeiten zunächst stets in Minuten umzurechnen. Folgende Tabellen halten Aufgabenstellung und Lösung fest:

	Weg	Zeit
mit Bus	20 km	30 min
Aufenthalt	0 km	42 min
mit Zug		
insgesamt		192 min
	60 km	60 min

	Weg	Zeit
mit Bus	20 km	30 min
Aufenthalt	0 km	42 min
mit Zug	120 km	(1) (192 - 42 - 30 =) **120 min**
insgesamt	**140 km**	192 min
	60 km	60 min

Ein einfaches Beispiel für das Festhalten des Lösungsweges wird anhand der **Aufgabe 3.3)**, die dem Einführen in das ***Vorwärtsarbeiten*** dient, im Abschnitt 5.5. besprochen.

Wenn eine Lösung durch ***systematisches Erfassen aller möglichen Fälle*** *(und Ausschließen der nicht möglichen Fälle)* ermittelt wird, dann spielen ***Tabellen*** ebenfalls eine wichtige Rolle.
Dies wird anhand der **Aufgaben 7.3), 8.4), 11.3), 12.4)** im Abschnitt 5.4. (Systematisches Probieren), anhand der **Aufgabe 3.7)** im Abschnitt 5.5. (Vorwärtsarbeiten) und anhand der **Aufgabe 6.7)** im Abschnitt 5.8. (Problemtransformation) demonstriert.

Auch beim ***Suchen nach Gesetzmäßigkeiten*** kann das übersichtliche Festhalten der erreichten Teilergebniss in Form von ***Tabellen*** wichtig sein. Dies wird anhand der **Aufgaben 4.7), 12.7) und 99)** im Abschnitt 5.7. vorgeführt.

Tabellen spielen schließlich auch beim Lösen von ***logisch-kombinatorischen Zuordnungsaufgaben*** eine wichtige Rolle.

Bei **Aufgabe 10.6)** wird nach der Zuordnung von vier Namen zu vier Berufen gesucht.
Verwirrend ist die Tatsache, dass die Berufsnamen mit den Familiennamen übereinstimmen.

- Bei solchen Zuordnungsaufgaben hilft meist eine *Tabelle* weiter!
  - ° Wie viele Zeilen und wie viele Spalten soll die Tabelle haben?
    [4 Zeilen, 4 Spalten.]
  - ° Wie sollen die Zeileneingänge, wie die Spalteneingänge lauten?

Hier ist man gezwungen, durch geschickte Wahl der *Bezeichnungen* Verwechlungen zu vermeiden. Wir kürzen die Namen mit a, b, f, s , die Berufe mit A, B, F, S ab.

- Was lässt sich aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar ableiten? Begründe!
  - ° Welche Zuordnungen können nicht zutreffen?
    Kennzeichne sie jeweils durch ein "-" in den betreffenden Feldern!
    [Da keiner der Herren den Beruf hatte, den sein Name angibt, trägt man in die Felder (a;A), (b;B), (f;F) und (s;S) ein "-" ein.]
- Was lässt sich nun aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar ableiten? Begründe!
  [In den Feldern (b;F) und (s;F) muss ein "-" stehen, da b und s Gäste von F sind.]
  - ° Welche Zuordnung muss nun zutreffen? Kennzeichne das Feld mit einem "+"!
    [Im Feld (a;F) muss "+" stehen; letzte Möglichkeit in der 3. Spalte.]

	A	B	F	S
a	- (1)		+ (3)	
b		- (1)	- (2)	
f			- (1)	
s			- (2)	- (1)

	A	B	F	S
a	- (1)	- (4)	+ (3)	- (4)
b	- (5)	- (1)	- (2)	+ (7)
f	+(5)	- (6)	- (1)	- (6)
s	- (5)	+ (7)	- (2)	- (1)

Die bis jetzt *abgeleiteten Folgerungen* sind in der *linken Tabelle* festgehalten. Für den Lehrer ist zusätzlich angegeben, in welcher Reihenfolge die Felder gefüllt wurden.
Der vierte abwesende Herr ist A, kann also nicht b oder s heissen, muss also - als letzte verbleibende Möglichkeit - f heissen.
Der Rest ist einfach. *Resultat* und *Lösung* sind der *rechten Tabelle* zu entnehmen.
Probe am Text nicht vergessen!

Analog zu lösen sind die leichteren Aufgaben 5.5), 6.5) und 7.5).
Resultat und *Lösungsweg* werden durch die folgenden Tabellen festgehalten:

	M	S	L
k	- (1)	+	- (6)
d	- (3)		+
r	+ (4)	- (2)	- (5)

	H	R	S
h		- (2)	+ (6)
r	- (4)	+ (3)	- (1)
s	+ (6)	- (2)	- (5)

	r	g	b
R	- (1)	- (4)	+ (3)
G	+ (7)	- (1)	- (2)
B	- (6)	+ (5)	- (1)

Von wesentlich höherem Schwierigkeitsgrad ist die Aufgabe 11.7). Hier ist eine Zuordnung von 3 Farben, 3 Namen, 3 Spielzeugen und 3 Naschereien zu finden. Ferner muss man den Aufgabentext mindestens zweimal hintereinander durcharbeiten, um alle Informationen voll ausschöpfen zu können.

37

- Bei solchen Zuordnungsaufgaben hilft meist eine *Tabelle* weiter!
  - ° Wie viele Zeilen und wie viele Spalten soll die Tabelle haben?
    [4 Zeilen, 4 Spalten.]
  - ° Wie sollen die Zeileneingänge, wie die Spalteneingänge lauten?

Hier ist man gezwungen, durch geschickte Wahl der *Bezeichnungen* Verwechlungen zu vermeiden. Wir kürzen die Namen mit a, b, f, s , die Berufe mit A, B, F, S ab.

- Was lässt sich aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar ableiten? Begründe!
  - ° Welche Zuordnungen können nicht zutreffen?
    Kennzeichne sie jeweils durch ein "-" in den betreffenden Feldern!
    [Da keiner der Herren den Beruf hatte, den sein Name angibt, trägt man in die Felder (a;A), (b;B), (f;F) und (s;S) ein "-" ein.]
- Was lässt sich nun aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar ableiten? Begründe!
  [In den Feldern (b;F) und (s;F) muss ein "-" stehen, da b und s Gäste von F sind.]
  - ° Welche Zuordnung muss nun zutreffen? Kennzeichne das Feld mit einem "+"!
    [Im Feld (a;F) muss "+" stehen; letzte Möglichkeit in der 3. Spalte.]

	A	B	F	S
a	- (1)		+ (3)	
b		- (1)	- (2)	
f			- (1)	
s			- (2)	- (1)

	A	B	F	S
a	- (1)	- (4)	+ (3)	- (4)
b	- (5)	- (1)	- (2)	+ (7)
f	+(5)	- (6)	- (1)	- (6)
s	- (5)	+ (7)	- (2)	- (1)

Die bis jetzt *abgeleiteten Folgerungen* sind in der *linken Tabelle* festgehalten. Für den Lehrer ist zusätzlich angegeben, in welcher Reihenfolge die Felder gefüllt wurden.
Der vierte abwesende Herr ist A, kann also nicht b oder s heissen, muss also - als letzte verbleibende Möglichkeit - f heissen.
Der Rest ist einfach. *Resultat* und *Lösung* sind der *rechten Tabelle* zu entnehmen.
Probe am Text nicht vergessen!

Analog zu lösen sind die leichteren Aufgaben 5.5), 6.5) und 7.5).
Resultat und *Lösungsweg* werden durch die folgenden Tabellen festgehalten:

	M	S	L
k	- (1)	+	- (6)
d	- (3)		+
r	+ (4)	- (2)	- (5)

	H	R	S
h		- (2)	+ (6)
r	- (4)	+ (3)	- (1)
s	+ (6)	- (2)	- (5)

	r	g	b
R	- (1)	- (4)	+ (3)
G	+ (7)	- (1)	- (2)
B	- (6)	+ (5)	- (1)

Von wesentlich höherem Schwierigkeitsgrad ist die Aufgabe 11.7). Hier ist eine Zuordnung von 3 Farben, 3 Namen, 3 Spielzeugen und 3 Naschereien zu finden. Ferner muss man den Aufgabentext mindestens zweimal hintereinander durcharbeiten, um alle Informationen voll ausschöpfen zu können.

Man sollte den Schülern die Tabelle mit den drei Spalteneingängen und den vier Zeileneingängen vorgeben und sie auffordern, zunächst alle Informationen einzutragen, die man beim erstmaligen Durchlesen dem Aufgabentext entnehmen kann.
Dies führt zu folgender ***Tabelle*** :

		1. Haus	mittl. Haus	3. Haus
Farben:	gelb, blau, rot		nicht blau (5)	
Namen:	Bettina, Sven, Tanja		Tanja (4)	nicht Bettina (2)
Spielzeuge:	Puppe, Rennbahn, Theater			Rennbahn (3)
Naschereien	Eis, Kaugummi, Schokolade		Eis (1)	

Schwierig ist hierbei nur die ***Folgerung***: Wenn das rote Haus neben dem gelben Haus steht, dann kann das blaue Haus nicht in der Mitte stehen.
Erst wenn man die im ersten Durchlauf gewonnenen ***Folgerungen*** betrachtet, kann man erkennen, dass Bettina im 1. Haus wohnen muss.
Beim zweiten Durchlesen der Aufgabenstellung erkennt man leicht, dass das 1. Haus gelb, folglich das 3. Haus blau und damit das mittlere Haus rot sein muss und dass daher Sven im 3. Haus wohnt.
Recht schwierig ist dann die ***Folgerung***, die aus der Bedingung zu ziehen ist, dass das Kind mit der Puppe Kaugummi kaut. Dies ist nur dann möglich, wenn "Kaugummi" zum 1. Haus gehört.
Der Rest ist einfach.

		1. Haus	mittl. Haus	3. Haus
Farben:	gelb, blau, rot	gelb (6)	rot (8)	blau (8)
Namen:	Bettina, Sven, Tanja	Bettina (6)	Tanja (4)	Sven (9)
Spielzeuge:	Puppe, Rennb., Theater	Puppe (10)	Theater (11)	Rennbahn (11)
Naschereien	Eis, Kaugummi, Schoko.	Kaug. (10)	Eis (1)	Schokolade (11)

Durch eine ***Probe am Text*** wird man überprüfen, ob alle Bedingungen erfasst wurden und ob alle Folgerungen korrekt waren.

38

Man sollte den Schülern die Tabelle mit den drei Spalteneingängen und den vier Zeileneingängen vorgeben und sie auffordern, zunächst alle Informationen einzutragen, die man beim erstmaligen Durchlesen dem Aufgabentext entnehmen kann.
Dies führt zu folgender ***Tabelle*** :

		1. Haus	mittl. Haus	3. Haus
Farben:	gelb, blau, rot		nicht blau (5)	
Namen:	Bettina, Sven, Tanja		Tanja (4)	nicht Bettina (2)
Spielzeuge:	Puppe, Rennbahn, Theater			Rennbahn (3)
Naschereien	Eis, Kaugummi, Schokolade		Eis (1)	

Schwierig ist hierbei nur die ***Folgerung***: Wenn das rote Haus neben dem gelben Haus steht, dann kann das blaue Haus nicht in der Mitte stehen.
Erst wenn man die im ersten Durchlauf gewonnenen ***Folgerungen*** betrachtet, kann man erkennen, dass Bettina im 1. Haus wohnen muss.
Beim zweiten Durchlesen der Aufgabenstellung erkennt man leicht, dass das 1. Haus gelb, folglich das 3. Haus blau und damit das mittlere Haus rot sein muss und dass daher Sven im 3. Haus wohnt.
Recht schwierig ist dann die ***Folgerung***, die aus der Bedingung zu ziehen ist, dass das Kind mit der Puppe Kaugummi kaut. Dies ist nur dann möglich, wenn "Kaugummi" zum 1. Haus gehört.
Der Rest ist einfach.

		1. Haus	mittl. Haus	3. Haus
Farben:	gelb, blau, rot	gelb (6)	rot (8)	blau (8)
Namen:	Bettina, Sven, Tanja	Bettina (6)	Tanja (4)	Sven (9)
Spielzeuge:	Puppe, Rennb., Theater	Puppe (10)	Theater (11)	Rennbahn (11)
Naschereien	Eis, Kaugummi, Schoko.	Kaug. (10)	Eis (1)	Schokolade (11)

Durch eine ***Probe am Text*** wird man überprüfen, ob alle Bedingungen erfasst wurden und ob alle Folgerungen korrekt waren.

5.3. Verwenden von Skizzen und Mengendiagrammen

Skizzen dienen der ***Veranschaulichung*** von Sachverhalten sowie dem übersichtlichen Festhalten von ***Gegebenem*** und ***Gesuchtem***.
In höheren Klassenstufen können sie auch zum Festhalten des ***Lösungsweges*** verwendet werden. Somit spielen sie eine ähnliche Rolle wie *Tabellen*.

Skizzen können bei den **Aufgaben 13.4), 14.4), 15.3), 15.5), 81)** und **88)** eingesetzt werden.

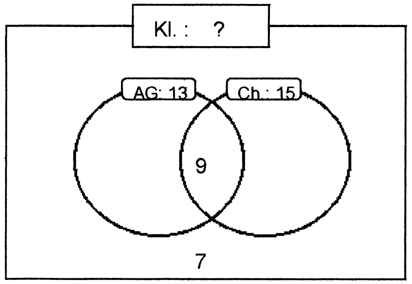
Eine besondere Rolle spielen ***Mengendiagramme*** bei einer spezifischen Gruppe von Aufgaben, bei denen Gesetze aus der Mengenlehre verwendet werden. Solche Aufgaben kommen recht häufig in mathematischen Wettbewerben vor.
Wir beschränken uns hier auf den einfachen Fall, dass in einer Allmenge zwei Teilmengen mit im allgemeinen nicht leerem Durchschnitt liegen.

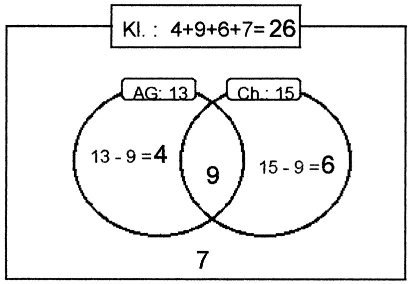
In **Aufgabe 11.5)** wird nach der Anzahl der Schüler einer Klasse gefragt, von der bekannt ist:
13 Schüler gehen in die AG Mathematik; 15 Schüler gehen in den Schulchor; 9 Schüler gehen sowohl in die AG Mathematik als auch in der Schulchor; 7 Schüler gehen weder in die AG Mathematik noch in den Schulchor.
Wenn die Schüler diese Aufgabe nicht selbständig lösen können oder wenn sie fälschlicherweise alle gegebenen Zahlen addieren, um die gesuchte Schüleranzahl zu erhalten, dann wird ihnen der Lehrer zeigen, wie man ein solches ***Mengendiagramm*** zeichnet und wie man die ***gegebenen Anzahlen*** und die ***gesuchte Anzahl*** eintragen bzw. kennzeichnen kann (siehe das linke Mengendiagramm).

- Was lässt sich aus den gegebenen Anzahlen unmittelbar berechnen? Begründe!
- Woraus ließe sich die gesuchte Anzahl unmittelbar berechnen? Begründe!

Beide Fragen konnen die Schüler zur Erkenntnis führen, dass dies jeweils die Anzahl der Schüler ist, die ***nur*** in die AG bzw. ***nur*** in den Chor gehen.

Das rechte ***Mengendiagramm*** hält den ***Lösungsweg*** und das ***Resultat*** fest.





Völlig *analog* hierzu ist die **Aufgabe 12.5)**. Lediglich die Zahlen und die Einkleidung wurden anders gewählt. Die Allmenge ist wiederum die Menge der Schüler einer Klasse. Die erste Teilmenge wird von denjenigen Schüler gebildet, die im Urlaub

39

5.3. Verwenden von Skizzen und Mengendiagrammen

Skizzen dienen der Veranschaulichung von Sachverhalten sowie dem übersichtlichen Festhalten von Gegebenem und Gesuchtem.
In höheren Klassenstufen können sie auch zum Festhalten des Lösungsweges verwendet werden. Somit spielen sie eine ähnliche Rolle wie Tabellen.

Skizzen können bei den Aufgaben 13.4), 14.4), 15.3), 15.5), 81) und 88) eingesetzt werden.

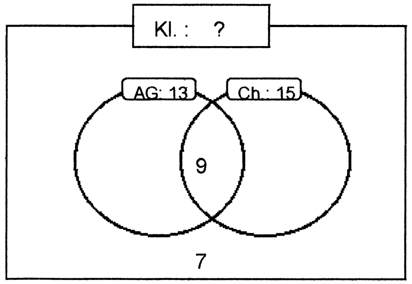
Eine besondere Rolle spielen Mengendiagramme bei einer spezifischen Gruppe von Aufgaben, bei denen Gesetze aus der Mengenlehre verwendet werden. Solche Aufgaben kommen recht häufig in mathematischen Wettbewerben vor.
Wir beschränken uns hier auf den einfachen Fall, dass in einer Allmenge zwei Teilmengen mit im allgemeinen nicht leerem Durchschnitt liegen.

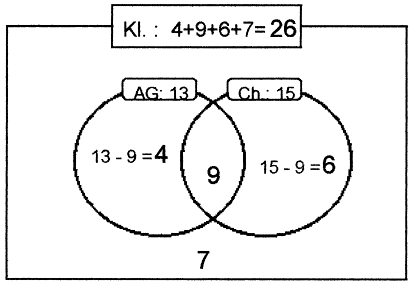
In Aufgabe 11.5) wird nach der Anzahl der Schüler einer Klasse gefragt, von der bekannt ist:
13 Schüler gehen in die AG Mathematik; 15 Schüler gehen in den Schulchor; 9 Schüler gehen sowohl in die AG Mathematik als auch in der Schulchor; 7 Schüler gehen weder in die AG Mathematik noch in den Schulchor.
Wenn die Schüler diese Aufgabe nicht selbständig lösen können oder wenn sie fälschlicherweise alle gegebenen Zahlen addieren, um die gesuchte Schüleranzahl zu erhalten, dann wird ihnen der Lehrer zeigen, wie man ein solches Mengendiagramm zeichnet und wie man die gegebenen Anzahlen und die gesuchte Anzahl eintragen bzw. kennzeichnen kann (siehe das linke Mengendiagramm).

- Was lässt sich aus den gegebenen Anzahlen unmittelbar berechnen? Begründe!
- Woraus ließe sich die gesuchte Anzahl unmittelbar berechnen? Begründe!

Beide Fragen konnen die Schüler zur Erkenntnis führen, dass dies jeweils die Anzahl der Schüler ist, die nur in die AG bzw. nur in den Chor gehen.

Das rechte Mengendiagramm hält den Lösungsweg und das Resultat fest.

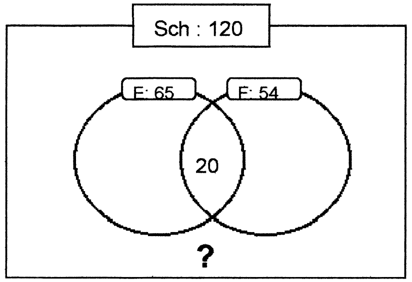


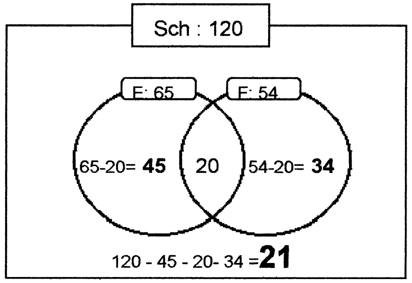


Völlig analog hierzu ist die Aufgabe 12.5). Lediglich die Zahlen und die Einkleidung wurden anders gewählt. Die Allmenge ist wiederum die Menge der Schüler einer Klasse. Die erste Teilmenge wird von denjenigen Schüler gebildet, die im Urlaub

schon einmal an der Ostsee waren, die zweite Teilmenge von denjenigen Schülern, die schon einmal in den Alpen waren.

Analog zu lösen ist auch die **Aufgabe 16.5)**.
Dem *linken* ***Mengendiagramm*** ist zu entnehmen, dass lediglich nach einer anderen Anzahl gefragt wird.
Das *rechte Mengendiagramm* hält wiederum den ***Lösungsweg*** und das ***Resultat*** fest.



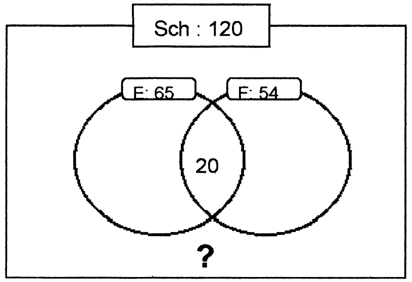


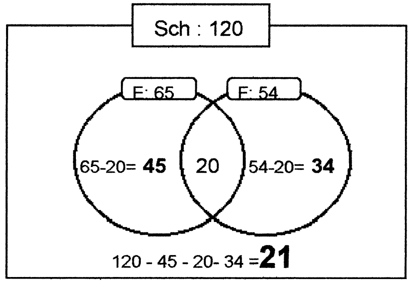
Wenn den Schülern das Lösen solcher Aufgaben Spaß macht, dann sollte der Lehrer weitere *analoge* Aufgaben selbst bilden.

40

schon einmal an der Ostsee waren, die zweite Teilmenge von denjenigen Schülern, die schon einmal in den Alpen waren.

Analog zu lösen ist auch die **Aufgabe 16.5)**.
Dem *linken* ***Mengendiagramm*** ist zu entnehmen, dass lediglich nach einer anderen Anzahl gefragt wird.
Das *rechte Mengendiagramm* hält wiederum den ***Lösungsweg*** und das ***Resultat*** fest.





Wenn den Schülern das Lösen solcher Aufgaben Spaß macht, dann sollte der Lehrer weitere *analoge* Aufgaben selbst bilden.

5.4. Das systematische Probieren (Erfassen aller Möglichkeiten)

Schüler dieser Klassenstufe neigen dazu, Lösungen durch ***unsystematisches Probieren*** mehr oder minder nur zu erraten, wobei begabte Schüler dabei eine große Findigkeit entwickeln können.
Unser Ziel besteht darin, sie an ein ***systematisches Probieren*** zu gewöhnen, ihnen die Vorteile eines solchen Vorgehens zu zeigen und sie aufzufordern, dabei stets möglichst ***geschickt*** vorzugehen.

Es ist wichtig, sich stets bewusst zu machen, welches ***Ordnungsprinzip*** man anwenden will, um sicherzugehen, dass man wirklich ***alle*** möglichen Fälle erfasst. Bei schwereren Aufgaben ist es manchmal erforderlich, mehrere Ordnungsprinzipien zu kombinieren, wobei es darauf ankommt, sie in eine ***hierarchische Ordnung*** zu bringen.

Systematisches Probieren führt immer zum Ziel, wenn es darum geht, zu einer gegebenen Aussageform eine ***endliche Lösungsmenge*** zu ermitteln, wobei die Anzahl der Elemente dieser Lösungsmenge nicht zu groß sein darf.

Besonders leicht sind derartige Aufgaben, wenn die Aussageform nur eine Variable besitzt und die Elemente des Variablengrundbereichs sich gut ordnen lassen.
Dies ist z.B. beim Ermitteln der *Lösungsmenge einer Ungleichung über dem Bereich der natürlichen Zahlen* der Fall, wie dies in den **Aufgaben 1.2)** und **8.1)** gefordert wird.
Da jeder Lehrer derartige Aufgaben leicht selbst bilden kann, haben wir darauf verzichtet, solche Aufgaben in die Aufgabensammlung aufzunehmen.

Obwohl in **Aufgabe 2.2)** mehrere Gleichungen mit den beiden Variablen A und B gegeben sind, führt auch hier ein solches Vorgehen zum Ziel.
Man untersucht die Fälle $A = 0$, $A = 1$, $A = 2$, $A > 2$.
Für $A = 0$ wird $B = 0$, was der Forderung widerspricht, dass A und B verschieden sein sollen.
Für $A = 1$ ist die Bedingung $A + A = A \cdot A$ nicht erfüllt; dasselbe trifft für $A > 2$ zu.
Für $A = 2$ ist diese Bedingung erfüllt und es gilt $B = 4$. Folglich ist dies die *einzige* Lösung der Aufgabe.
Nachträglich wird man erkennen lassen, dass $B - B = 0$ für alle B gilt und dass es daher nur auf die oben genannte Bedingung für A ankommt.

Bei ***Auswahl- oder Anordnungsproblemen*** aus der Kombinatorik spielt das ***lexikografische Ordnen*** eine wichtige Rolle.
Das Ordnen von natürlichen Zahlen nach ihrer Größe, wie dies z.B. in der **Aufgabe 4.4)** gefordert wird, kann man als einen Spezialfall dieses Ordnungsprinzips auffassen.

Die **Aufgabe 5.4)** ist als Einführung in das ***lexikographische Ordnen*** gut geeignet.

Vorschläge für das Behandeln der **Aufgaben 5.4a) und 5.4b)** findet man im Abschnitt 3.3.

41

5.4. Das systematische Probieren (Erfassen aller Möglichkeiten)

Schüler dieser Klassenstufe neigen dazu, Lösungen durch unsystematisches Probieren mehr oder minder nur zu erraten, wobei begabte Schüler dabei eine große Findigkeit entwickeln können.
Unser Ziel besteht darin, sie an ein systematisches Probieren zu gewöhnen, ihnen die Vorteile eines solchen Vorgehens zu zeigen und sie aufzufordern, dabei stets möglichst geschickt vorzugehen.

Es ist wichtig, sich stets bewusst zu machen, welches Ordnungsprinzip man anwenden will, um sicherzugehen, dass man wirklich alle möglichen Fälle erfasst. Bei schwereren Aufgaben ist es manchmal erforderlich, mehrere Ordnungsprinzipien zu kombinieren, wobei es darauf ankommt, sie in eine hierarchische Ordnung zu bringen.

Systematisches Probieren führt immer zum Ziel, wenn es darum geht, zu einer gegebenen Aussageform eine endliche Lösungsmenge zu ermitteln, wobei die Anzahl der Elemente dieser Lösungsmenge nicht zu groß sein darf.

Besonders leicht sind derartige Aufgaben, wenn die Aussageform nur eine Variable besitzt und die Elemente des Variablengrundbereichs sich gut ordnen lassen.
Dies ist z.B. beim Ermitteln der Lösungsmenge einer Ungleichung über dem Bereich der natürlichen Zahlen der Fall, wie dies in den Aufgaben 1.2) und 8.1) gefordert wird.
Da jeder Lehrer derartige Aufgaben leicht selbst bilden kann, haben wir darauf verzichtet, solche Aufgaben in die Aufgabensammlung aufzunehmen.

Obwohl in Aufgabe 2.2) mehrere Gleichungen mit den beiden Variablen A und B gegeben sind, führt auch hier ein solches Vorgehen zum Ziel.
Man untersucht die Fälle $A = 0$, $A = 1$, $A = 2$, $A > 2$.
Für $A = 0$ wird $B = 0$, was der Forderung widerspricht, dass A und B verschieden sein sollen.
Für $A = 1$ ist die Bedingung $A + A = A \cdot A$ nicht erfüllt; dasselbe trifft für $A > 2$ zu.
Für $A = 2$ ist diese Bedingung erfüllt und es gilt $B = 4$. Folglich ist dies die einzige Lösung der Aufgabe.
Nachträglich wird man erkennen lassen, dass $B - B = 0$ für alle B gilt und dass es daher nur auf die oben genannte Bedingung für A ankommt.

Bei Auswahl- oder Anordnungsproblemen aus der Kombinatorik spielt das lexikografische Ordnen eine wichtige Rolle.
Das Ordnen von natürlichen Zahlen nach ihrer Größe, wie dies z.B. in der Aufgabe 4.4) gefordert wird, kann man als einen Spezialfall dieses Ordnungsprinzips auffassen.

Die Aufgabe 5.4) ist als Einführung in das lexikographische Ordnen gut geeignet.

Vorschläge für das Behandeln der Aufgaben 5.4a) und 5.4b) findet man im Abschnitt 3.3.

Für eine Wiederholung und Übung dieses Vorgehens eignet sich die **Aufgabe 93)**. Es wäre allerdings völlig verfehlt, wenn man die Schüler auffordern würde, sich die Formel $P(n) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ für die Anzahl der verschiedenen Anordnungen von n Elementen zu merken.
Sie sollen nur die Fertigkeit erwerben, Anordnungen in lexikografischer Reihenfolge festzuhalten und leistungsstarke Schüler sollten sich das geschilderte Verfahren einprägen.

Bei der **Aufgabe 6.4)** geht es darum, aus 6 Elementen { A, B, C, D, E, F} (Schülern) alle möglichen Paare (Spielpaarungen) auszuwählen. Wiederum wird das ***lexikografische Ordnungsprinzip*** eingesetzt.

Nach der abschließenden Auswertung wird an der ***Wandtafel*** festgehalten:

(A;B), (A;C), (A;D), (A;E), (A;F)
(B;C), (B;D), (B;E), (B;F)
(C;D), (C;E), (C;F)
(D;E), (D;F)
(E;F)

(4 + 3 + 2 + 1 =) 10 Möglichkeiten.

Ein solches Ermitteln von Paaren wird auch in der **Aufgabe 6.4)** benötigt.

Es gibt relativ viele Aufgaben, wo beim ***systematischen Ermitteln aller Möglichkeiten*** als Hilfsmittel ***Tabellen*** verwendet werden.

In **Aufgabe 7.3)** wird angegeben, dass in einem Käfig, in dem sich Kaninchen und Hühner befinden, insgesamt 5 Köpfe und 14 Beine zu sehen sind.

Natürlich kann man die Lösung auch durch unsystematisches Probieren erraten. Wenn man zusätzlich wissen möchte, ob es eine weitere Lösung geben kann, muss man ***systematisch*** probieren.

Anzahl Köpfe	Anzahl Beine
5 = 1 + 4	$1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 12 < 14$
5 = 2 + 3	$2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$
5 = 3 + 2	$3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 16 > 14$
5 = 4 + 1	

Es gibt genau vier Möglichkeiten, wie viele der 5 Köpfe Kaninchenköpfe und wie viele davon Hühnerköpfe sind.
Wenn man die jeweils zugehörige Anzahl der Beine ausrechnet, dann erkennt man, dass die Aufgabe genau eine Lösung besitzt: Es waren 2 Kaninchen und 3 Hühner.
Auf diese Weise hat man auch sofort eine ***Probe*** gemacht.
Darüberhinaus erkennt man, dass die Anzahl der Beine in der betrachteten Reihenfolge stets um 2 größer wird, was sich auch inhaltlich begründen lässt.
Folglich braucht man im 4. Fall die Anzahl der Beine gar nicht auszurechnen, da sie mit Sicherheit größer als 14 sein wird.

Die **Aufgabe 8.4)** ist *analog* zur Aufgabe 7.3). Hier geht es um Autos (Kaninchen) mit 4 Rädern (Beinen) und Fahrräder (Hühner) mit 2 Rädern (Beinen), von denen bekannt ist, dass es insgesamt 60 Fahrzeuge (5 Tiere) mit insgesamt 200 Rädern (14 Beinen) sind.
Wenn die Schüler diese ***Analogie*** erkannt haben, und wenn man ausdrücklich gefordert hat, dass *alle* Lösungen zu ermitteln sind, dann werden viele von ihnen auch *analog* vorgehen wollen und systematisch alle möglichen Paare (Anzahl der Autos; Anzahl der Fahrräder) untersuchen: (1;59), (2;58), (3;57), ..., (58;2), (59;1) .

42

Für eine Wiederholung und Übung dieses Vorgehens eignet sich die **Aufgabe 93)**. Es wäre allerdings völlig verfehlt, wenn man die Schüler auffordern würde, sich die Formel $P(n) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ für die Anzahl der verschiedenen Anordnungen von n Elementen zu merken.
Sie sollen nur die Fertigkeit erwerben, Anordnungen in lexikografischer Reihenfolge festzuhalten und leistungsstarke Schüler sollten sich das geschilderte Verfahren einprägen.

Bei der **Aufgabe 6.4)** geht es darum, aus 6 Elementen { A, B, C, D, E, F} (Schülern) alle möglichen Paare (Spielpaarungen) auszuwählen. Wiederum wird das ***lexikografische Ordnungsprinzip*** eingesetzt.

Nach der abschließenden Auswertung wird an der ***Wandtafel*** festgehalten:

(A;B), (A;C), (A;D), (A;E), (A;F)
(B;C), (B;D), (B;E), (B;F)
(C;D), (C;E), (C;F)
(D;E), (D;F)
(E;F)

(4 + 3 + 2 + 1 =) 10 Möglichkeiten.

Ein solches Ermitteln von Paaren wird auch in der **Aufgabe 6.4)** benötigt.

Es gibt relativ viele Aufgaben, wo beim ***systematischen Ermitteln aller Möglichkeiten*** als Hilfsmittel ***Tabellen*** verwendet werden.

In **Aufgabe 7.3)** wird angegeben, dass in einem Käfig, in dem sich Kaninchen und Hühner befinden, insgesamt 5 Köpfe und 14 Beine zu sehen sind.

Natürlich kann man die Lösung auch durch unsystematisches Probieren erraten. Wenn man zusätzlich wissen möchte, ob es eine weitere Lösung geben kann, muss man ***systematisch*** probieren.

Anzahl Köpfe	Anzahl Beine
5 = 1 + 4	$1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 12 < 14$
5 = 2 + 3	$2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$
5 = 3 + 2	$3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 16 > 14$
5 = 4 + 1	

Es gibt genau vier Möglichkeiten, wie viele der 5 Köpfe Kaninchenköpfe und wie viele davon Hühnerköpfe sind.
Wenn man die jeweils zugehörige Anzahl der Beine ausrechnet, dann erkennt man, dass die Aufgabe genau eine Lösung besitzt: Es waren 2 Kaninchen und 3 Hühner.
Auf diese Weise hat man auch sofort eine ***Probe*** gemacht.
Darüberhinaus erkennt man, dass die Anzahl der Beine in der betrachteten Reihenfolge stets um 2 größer wird, was sich auch inhaltlich begründen lässt.
Folglich braucht man im 4. Fall die Anzahl der Beine gar nicht auszurechnen, da sie mit Sicherheit größer als 14 sein wird.

Die **Aufgabe 8.4)** ist *analog* zur Aufgabe 7.3). Hier geht es um Autos (Kaninchen) mit 4 Rädern (Beinen) und Fahrräder (Hühner) mit 2 Rädern (Beinen), von denen bekannt ist, dass es insgesamt 60 Fahrzeuge (5 Tiere) mit insgesamt 200 Rädern (14 Beinen) sind.
Wenn die Schüler diese ***Analogie*** erkannt haben, und wenn man ausdrücklich gefordert hat, dass *alle* Lösungen zu ermitteln sind, dann werden viele von ihnen auch *analog* vorgehen wollen und systematisch alle möglichen Paare (Anzahl der Autos; Anzahl der Fahrräder) untersuchen: (1;59), (2;58), (3;57), ..., (58;2), (59;1) .

Man beobachte, ob es Schüler gibt, die von sich aus ***geschickter*** vorgehen und die oben gewonnene ***Erfahrung nutzen***, dass es ausreicht, drei günstig gewählte Fälle zu untersuchen. Dies würde auf eine hohe Begabungspotenz dieser Schüler hinweisen.
Hierbei ist es nicht nur statthaft sondern sogar geschickt, zunächst "auf gut Glück" zu probieren und die Lösung (40;20) zu erraten.

Als Lösung genügt dann die nebenstehend angegebene Tabelle mit dem Hinweis, dass die Anzahl der Räder jeweils um 2 zunimmt.

Fahrzeuge	Räder
$60 = 41 + 19$	$39 \cdot 4 + 21 \cdot 2 = 198 < 200$
$60 = 40 + 20$	$40 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 200$
$60 = 39 + 21$	$41 \cdot 4 + 19 \cdot 2 = 202 > 200$

Ferner wird man die Schüler darauf aufmerksam machen, dass diese Aufgabe ***überbestimmt*** ist, d.h. eine überflüssige Angabe, nämlich "15 Minuten und 30 Sekunden" enthält., dass dies jedoch der gefundenen Lösung nicht widerspricht.

Es gibt folgenden ***Typ von Sachaufgaben***:
"Zwei Teile a und b betragen zusammen s ; ein Teil ist um d größer (kleiner) als der andere."

In **Aufgabe 10.3)** kennt man die Summe 40 € der Preise zweier Bücher und weiß, dass das eine Buch um 5 € billiger ist als das andere.

In **Aufgabe 11.3)** weiß man, dass die verkaufte Ware und die nicht verkaufte Ware zusammen 40 kg wiegt und dass die nicht verkaufte Ware um 8 kg schwerer ist als die verkaufte.

Auch die **Aufgaben 10.2)** und **76)** gehören zu diesem Typ, und es bereitet keine Schwierigkeiten, weitere Einkleidungen zu finden.

Dieser Sachverhalt lässt sich durch die beiden ***Gleichungen*** $x + y = s$ und $x = y \pm d$ festhalten.
Da in dieser Klassenstufe ein Lösen solcher Gleichungssysteme nicht in Frage kommt, bleibt nur die Möglichkeit, die Lösung durch ***systematisches Probieren*** oder durch ***inhaltliches Schließen*** zu ermitteln.

Bei **Aufgabe 11.3)** führt ***geschicktes Probieren*** zur nebenstehenden ***Tabelle***.
Die ***Stichprobe*** für v = 10 muss man nicht mit aufführen. Natürlich hätte man auch v = 20 wählen können und dabei bemerkt, dass diese Stickprobe zu groß gewählt wurde.

verkauft	nicht verkauft	Differenz
10	40 - 10 = 30	20 > 8
15	40 - 15 = 5	10 > 8
16	40 - 16 = **24**	**8**
17	40 - 17 = 23	6 < 8

Bei Aufgaben dieses Typs sollte man durch ***inhaltliches Schließen*** zu einem eleganteren ***2. Lösungsweg*** *gelangen.*
Folgende ***Impulse*** können hilfreich sein:
- Wie groß wäre die Summe der zwei größeren Teile? [s + d]
- Also: Wie groß ist der größere Teil ? [(s + d) : 2 = a]
- Und wie groß ist dann der kleinere Teil? [s - a = b]

43

Man beobachte, ob es Schüler gibt, die von sich aus ***geschickter*** vorgehen und die oben gewonnene ***Erfahrung nutzen***, dass es ausreicht, drei günstig gewählte Fälle zu untersuchen. Dies würde auf eine hohe Begabungspotenz dieser Schüler hinweisen.
Hierbei ist es nicht nur statthaft sondern sogar geschickt, zunächst "auf gut Glück" zu probieren und die Lösung (40;20) zu erraten.

Als Lösung genügt dann die nebenstehend angegebene Tabelle mit dem Hinweis, dass die Anzahl der Räder jeweils um 2 zunimmt.

Fahrzeuge	Räder
$60 = 41 + 19$	$39 \cdot 4 + 21 \cdot 2 = 198 < 200$
$60 = 40 + 20$	$40 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 200$
$60 = 39 + 21$	$41 \cdot 4 + 19 \cdot 2 = 202 > 200$

Ferner wird man die Schüler darauf aufmerksam machen, dass diese Aufgabe ***überbestimmt*** ist, d.h. eine überflüssige Angabe, nämlich "15 Minuten und 30 Sekunden" enthält., dass dies jedoch der gefundenen Lösung nicht widerspricht.

Es gibt folgenden ***Typ von Sachaufgaben***:
"Zwei Teile a und b betragen zusammen s ; ein Teil ist um d größer (kleiner) als der andere."

In **Aufgabe 10.3)** kennt man die Summe 40 € der Preise zweier Bücher und weiß, dass das eine Buch um 5 € billiger ist als das andere.

In **Aufgabe 11.3)** weiß man, dass die verkaufte Ware und die nicht verkaufte Ware zusammen 40 kg wiegt und dass die nicht verkaufte Ware um 8 kg schwerer ist als die verkaufte.

Auch die **Aufgaben 10.2)** und **76)** gehören zu diesem Typ, und es bereitet keine Schwierigkeiten, weitere Einkleidungen zu finden.

Dieser Sachverhalt lässt sich durch die beiden ***Gleichungen*** $x + y = s$ und $x = y \pm d$ festhalten.
Da in dieser Klassenstufe ein Lösen solcher Gleichungssysteme nicht in Frage kommt, bleibt nur die Möglichkeit, die Lösung durch ***systematisches Probieren*** oder durch ***inhaltliches Schließen*** zu ermitteln.

Bei **Aufgabe 11.3)** führt ***geschicktes Probieren*** zur nebenstehenden ***Tabelle***.
Die ***Stichprobe*** für v = 10 muss man nicht mit aufführen. Natürlich hätte man auch v = 20 wählen können und dabei bemerkt, dass diese Stickprobe zu groß gewählt wurde.

verkauft	nicht verkauft	Differenz
10	40 - 10 = 30	20 > 8
15	40 - 15 = 5	10 > 8
16	40 - 16 = **24**	**8**
17	40 - 17 = 23	6 < 8

Bei Aufgaben dieses Typs sollte man durch ***inhaltliches Schließen*** zu einem eleganteren ***2. Lösungsweg*** *gelangen.*
Folgende ***Impulse*** können hilfreich sein:
- Wie groß wäre die Summe der zwei größeren Teile? [s + d]
- Also: Wie groß ist der größere Teil ? [(s + d) : 2 = a]
- Und wie groß ist dann der kleinere Teil? [s - a = b]

Selbstverständlich werden diese Impulse nur für konkrete Sachverhalte und mit konkreten Zahlen gestellt.

Auch bei **Aufgabe 12.4)** kann man diese beiden Lösungswege beschreiten.
Geschicktes systematisches Probieren führt zu der angegebenen ***Tabelle***.
- Wie viele Cent verliert der Sohn, wenn er eine Aufgabe falsch löst?

Anzahl "richtig"	Anzahl "falsch"	erhaltenes Geld (in Cent)
10	10	100 - 50 = 50 < 80
11	9	110 - 45 = 65 < 80
12	**8**	120 - 40 = **80**
13	7	130 - 35 = 95 > 80

Die richtige Antwort "15 Cent" ist der Tabelle sofort zu entnehmen; die vorschnelle falsche Antwort "5 Cent" wird durch die Tabelle sofort widerlegt.

- Wie viele Cent hat der Sohn insgesamt verloren? [(200 - 80 =) 120 Cent].
- Also: Wie viele Aufgaben wurden falsch gelöst? [(120:15 =) 8 Aufgaben].
- Und wie viele Aufgaben wurden dann richtig gelöst? [(20 - 8) = 12 Aufgaben].

Weitere Aufgaben, bei denen man beim ***systematischen Probieren*** auch ***Tabellen*** einsetzen kann, sind die **Aufgaben 32), 60), 64), 72), 89), 90), 95)** .

Es ist wenig wahrscheinlich, dass die Schüler eine Lösung der **Aufgabe 8.5)** beim unsystemtischen Probieren erraten, und es ist wohl ausgeschlossen, dass sie auf diese Weise ***alle*** Lösungen finden.

Der Lehrer kann die Schüler mit folgendem ***Trugschluss*** konfrontieren:
"Wenn die Summe der Zahlen auf jeder Seite des Dreiecks 17 betragen soll, dann müsste die Gesamtsumme 51 betragen. Die Summe der einzutragenden Zahlen von 1 bis 9 beträgt aber nur 45, also um 6 weniger. Folglich kann die Aufgabe keine Lösung besitzen."

- Wo liegt hier der Denkfehler?
  [Die in den Ecken stehenden Zahlen werden doppelt gezählt.]
- Was lässt sich hieraus folgern?
  ° Was lässt sich über die drei in den Ecken stehenden Zahlen aussagen?
  [Da für die Differenz 6 = 1 + 2 + 3 gilt, müssen es die Zahlen 1, 2, 3 sein.]
- Was lässt sich hieraus weiter folgern?
  ° Was lässt sich über die drei Paare von "Seitenzahlen" aussagen?

Wenn man für die Seitenzahlen die *Bezeichnungen* a, b, c, d, e, f einführt und festhält, dass als Seitenzahlen nur die 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 in Frage kommen, dann kann man durch ***systematisches Erfassen aller möglichen Fälle*** erkennen:

° Wegen 17 - (1 + 2) = 14 muss a + b = 14 gelten; 14 = 5 + 9 = 6 + 8 .
° Wegen 17 - (2 + 3) = 12 muss c + d = 12 gelten. 12 = 4 + 8 = 5 + 7 .
° Wegen 17 - (1 + 3) = 13 muss e + f = 13 gelten; 13 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7.

Eine weitere ***vollständige Fallunterscheidung*** liefert:

1. Fall: Wenn 14 = a + b = 5 + 9 , dann 12 = c + d = 4 + 8 und 13 = e + f = 6 + 7 .
2. Fall : Wenn 14 = a + b = 6 + 8 , dann 12 = c + d = 5 + 7 und 13 = e + f = 4 + 9 .

44

Selbstverständlich werden diese Impulse nur für konkrete Sachverhalte und mit konkreten Zahlen gestellt.

Auch bei **Aufgabe 12.4)** kann man diese beiden Lösungswege beschreiten.
Geschicktes systematisches Probieren führt zu der angegebenen ***Tabelle***.
- Wie viele Cent verliert der Sohn, wenn er eine Aufgabe falsch löst?

Anzahl "richtig"	Anzahl "falsch"	erhaltenes Geld (in Cent)
10	10	100 - 50 = 50 < 80
11	9	110 - 45 = 65 < 80
12	**8**	120 - 40 = **80**
13	7	130 - 35 = 95 > 80

Die richtige Antwort "15 Cent" ist der Tabelle sofort zu entnehmen; die vorschnelle falsche Antwort "5 Cent" wird durch die Tabelle sofort widerlegt.

- Wie viele Cent hat der Sohn insgesamt verloren? [(200 - 80 =) 120 Cent].
- Also: Wie viele Aufgaben wurden falsch gelöst? [(120:15 =) 8 Aufgaben].
- Und wie viele Aufgaben wurden dann richtig gelöst? [(20 - 8) = 12 Aufgaben].

Weitere Aufgaben, bei denen man beim ***systematischen Probieren*** auch ***Tabellen*** einsetzen kann, sind die **Aufgaben 32), 60), 64), 72), 89), 90), 95)** .

Es ist wenig wahrscheinlich, dass die Schüler eine Lösung der **Aufgabe 8.5)** beim unsystemtischen Probieren erraten, und es ist wohl ausgeschlossen, dass sie auf diese Weise ***alle*** Lösungen finden.

Der Lehrer kann die Schüler mit folgendem ***Trugschluss*** konfrontieren:
"Wenn die Summe der Zahlen auf jeder Seite des Dreiecks 17 betragen soll, dann müsste die Gesamtsumme 51 betragen. Die Summe der einzutragenden Zahlen von 1 bis 9 beträgt aber nur 45, also um 6 weniger. Folglich kann die Aufgabe keine Lösung besitzen."

- Wo liegt hier der Denkfehler?
  [Die in den Ecken stehenden Zahlen werden doppelt gezählt.]
- Was lässt sich hieraus folgern?
  ° Was lässt sich über die drei in den Ecken stehenden Zahlen aussagen?
  [Da für die Differenz 6 = 1 + 2 + 3 gilt, müssen es die Zahlen 1, 2, 3 sein.]
- Was lässt sich hieraus weiter folgern?
  ° Was lässt sich über die drei Paare von "Seitenzahlen" aussagen?

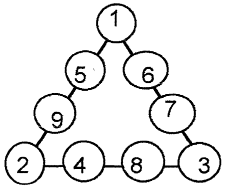
Wenn man für die Seitenzahlen die *Bezeichnungen* a, b, c, d, e, f einführt und festhält, dass als Seitenzahlen nur die 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 in Frage kommen, dann kann man durch ***systematisches Erfassen aller möglichen Fälle*** erkennen:

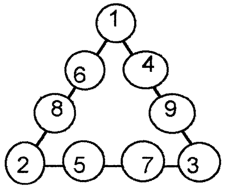
° Wegen 17 - (1 + 2) = 14 muss a + b = 14 gelten; 14 = 5 + 9 = 6 + 8 .
° Wegen 17 - (2 + 3) = 12 muss c + d = 12 gelten. 12 = 4 + 8 = 5 + 7 .
° Wegen 17 - (1 + 3) = 13 muss e + f = 13 gelten; 13 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7.

Eine weitere ***vollständige Fallunterscheidung*** liefert:

1. Fall: Wenn 14 = a + b = 5 + 9 , dann 12 = c + d = 4 + 8 und 13 = e + f = 6 + 7 .
2. Fall : Wenn 14 = a + b = 6 + 8 , dann 12 = c + d = 5 + 7 und 13 = e + f = 4 + 9 .

Wenn man als ***Ordnungsprinzip*** "kleinere Zahl vor größerer Zahl"; erst "von oben nach unten", dann "von links nach rechts" verwendet, dann erhält man die beiden Lösungen, die in der folgenden Abbildung festgehalten sind.





Wenn nach der *Anzahl von Teilfiguren, die in einer Figur vorhanden sind* gefragt wird, ist es wieder wichtig, sich vorher für ein ***Ordnungsprinzip*** zu entscheiden, das man anwenden will, um keine der Teilfiguren zu übersehen.

Bei **Aufgabe 7.4)** ist es angemessen, das ***lexikografische Ordnungsprinzip*** einzusetzen und die gesuchten 10 Dreiecke in der Form ABG, ACD, ..., EGH festzuhalten.

Bei **Aufgabe 9.4)** scheint es nahe zu liegen, ebenfalls das lexikografische Ordnungsprinzip zu verwenden.
Dies erweist sich jedoch als ungeschickt. Hier ist es günstiger, als ***Ordnungsprinzip*** die ***Anzahl der Dreiecke*** zu wählen, die die gesuchten Vierecke enthalten, also z.B. erst alle Vierecke mit dem Eckpunkt D, die aus 3 Dreiecken bestehen, dann alle solche Vierecke, die nur aus 2 Dreiecken bestehen. Eine weitere Möglichkeit gibt es nicht.
Ferner kann man hier die vorhandene Spiegelsymmetrie beim geschickten Zählen ausnützen.

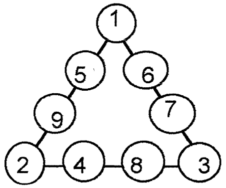
Bei **Aufgabe 10.4)** wird nach der Anzahl der vorhandenen Vierecke gefragt. Wenn man erst einmal erkannt hat, dass es außer nicht zusammengesetzten "Grundvierecken" (die leicht zu erkennen sind) auch Vierecke gibt, die aus mehreren solchen Grundvierecken zusammengesetzt sind, dann ist damit ein brauchbares ***Ordnungsprinzip*** gefunden.

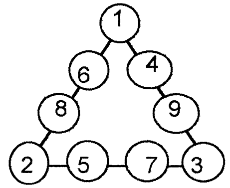
- Welche Arten zusammengesetzter Vierecke gibt es; wie viele sind es jeweils?
  [2 Vierecke aus zwei "Grundvierecken"; 1 Viereck aus drei "Grundvierecken".]

Aufgabe 11.4) ist wegen der Staffelung in einen leichten Teil a), einen mittelschweren Teil b) und einen sehr schweren Teil c) besonders gut geeignet.
Hier sollte man zu Beginn reichlich Zeit für das ***selbständige Arbeiten*** einplanen. Wenn ein Schüler die erste der Teilaufgaben gelöst zu haben glaubt, darf er die ermittelte Anzahl nennen und dann die nächste Teilaufgabe in Angriff nehmen. Der Lehrer notiert kommentarlos die genannten Anzahlen, auch die fehlerhaften.
Wenn ein zweiter Schüler diese Teilaufgabe gelöst hat, darf er sich dem an der Tafel stehenden "Angebot" anschließen oder ein "Gegenangebot" machen, das ebenfalls kommentarlos notiert wird.
Erst wenn zu Teil c) mehrere verschiedene (und damit auch falsche) Anzahlen von Vierecken genannt und notiert wurden, sollte man mit der ***gemeinsamen Arbeit*** beginnen.

45

Wenn man als ***Ordnungsprinzip*** "kleinere Zahl vor größerer Zahl"; erst "von oben nach unten", dann "von links nach rechts" verwendet, dann erhält man die beiden Lösungen, die in der folgenden Abbildung festgehalten sind.





Wenn nach der *Anzahl von Teilfiguren, die in einer Figur vorhanden sind* gefragt wird, ist es wieder wichtig, sich vorher für ein ***Ordnungsprinzip*** zu entscheiden, das man anwenden will, um keine der Teilfiguren zu übersehen.

Bei **Aufgabe 7.4)** ist es angemessen, das ***lexikografische Ordnungsprinzip*** einzusetzen und die gesuchten 10 Dreiecke in der Form ABG, ACD, ..., EGH festzuhalten.

Bei **Aufgabe 9.4)** scheint es nahe zu liegen, ebenfalls das lexikografische Ordnungsprinzip zu verwenden.
Dies erweist sich jedoch als ungeschickt. Hier ist es günstiger, als ***Ordnungsprinzip*** die ***Anzahl der Dreiecke*** zu wählen, die die gesuchten Vierecke enthalten, also z.B. erst alle Vierecke mit dem Eckpunkt D, die aus 3 Dreiecken bestehen, dann alle solche Vierecke, die nur aus 2 Dreiecken bestehen. Eine weitere Möglichkeit gibt es nicht.
Ferner kann man hier die vorhandene Spiegelsymmetrie beim geschickten Zählen ausnützen.

Bei **Aufgabe 10.4)** wird nach der Anzahl der vorhandenen Vierecke gefragt. Wenn man erst einmal erkannt hat, dass es außer nicht zusammengesetzten "Grundvierecken" (die leicht zu erkennen sind) auch Vierecke gibt, die aus mehreren solchen Grundvierecken zusammengesetzt sind, dann ist damit ein brauchbares ***Ordnungsprinzip*** gefunden.

- Welche Arten zusammengesetzter Vierecke gibt es; wie viele sind es jeweils?
  [2 Vierecke aus zwei "Grundvierecken"; 1 Viereck aus drei "Grundvierecken".]

Aufgabe 11.4) ist wegen der Staffelung in einen leichten Teil a), einen mittelschweren Teil b) und einen sehr schweren Teil c) besonders gut geeignet.
Hier sollte man zu Beginn reichlich Zeit für das ***selbständige Arbeiten*** einplanen. Wenn ein Schüler die erste der Teilaufgaben gelöst zu haben glaubt, darf er die ermittelte Anzahl nennen und dann die nächste Teilaufgabe in Angriff nehmen. Der Lehrer notiert kommentarlos die genannten Anzahlen, auch die fehlerhaften.
Wenn ein zweiter Schüler diese Teilaufgabe gelöst hat, darf er sich dem an der Tafel stehenden "Angebot" anschließen oder ein "Gegenangebot" machen, das ebenfalls kommentarlos notiert wird.
Erst wenn zu Teil c) mehrere verschiedene (und damit auch falsche) Anzahlen von Vierecken genannt und notiert wurden, sollte man mit der ***gemeinsamen Arbeit*** beginnen.

Folgende ***Impulse*** können beim Lösen der **Aufgabe 11.4a)** hilfreich sein:

- Welches Ordnungsprinzip wollen wir beim Abzählen der Quadrate verwenden?
  [Der Größe nach ordnen; "Grundquadrat" vor zusammengesetzten Quadraten.]
  - Wie viele Sorten von Quadraten gibt es?
    [3 Sorten; großes Ausgangsquadrat nicht vergessen!]
- Wie viele Quadrate gibt es von jeder Sorte, wie viele insgesamt? [4 + 1 + 1 = 6]

Beim Ermitteln der Anzahl der vorhandenen Dreiecke in **Aufgabe 11.4b)** wird man dieselben Impulse einsetzen und feststellen, dass es hier vier Sorten von verschiedenen großen Dreiecken gibt und dass insgesamt (8 + 4 + 4 + 4 =) 20 Dreiecke vorkommen.
Zusätzlich kann man fragen:

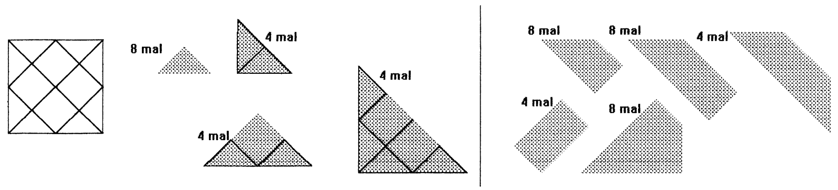
- Was können wir bei dieser Aufgabe für ein *geschicktes* Zählen ausnützen?
  ["Symmetrie" bezüglich der Diagonalen.]

An der *Wandtafel* werden die unten links angegebenen Figuren festgehalten.

Wenn es Schüler gibt, die die **Aufgabe 11.4c)** selbständig und richtig lösen, dann weist dies auf eine hohe *Begabungspotenz* hin.
Als ***1. Ordnungsprinzip*** bietet sich die Einteilung der ***Vierecksarten*** in folgender Reihenfolge an: Quadrate, Rechtecke, Trapeze, allgemeine Vierecke.
Als ***2. Ordnungsprinzip*** wird man die unterschiedlichen ***Größen*** der vorkommenden Vierecksarten wählen und erkennen lassen, dass nur die Quadrate und die Trapeze in unterschiedlicher Größe vorkommen.

Für die Gesamtanzahl der vorkommenden Vierecke gilt dann:
(4 + 1 + 1) + 4 + (8 + 8 + 4) + 8 = 6 + 4 + 20 + 8 = 38

An der ***Wandtafel*** wird man folgende rechts stehende Figuren festhalten:



Bei der recht schwierigen **Aufgabe 13.6a)** können die Schüler nachweisen, wie gut sie das ***systematische Ermitteln aller Möglichkeiten*** bereits beherrschen.
Hier geht es letztlich darum, alle Möglichkeiten zu finden, wie man eine Zahl als Summe der (beliebig oft vorkommenden) Zahlen 1 oder 2 darstellen kann.
Es bietet sich das folgende ***Ordnungsprinzip*** an:
Man verwende zunächst möglichst oft den Summanden 1 und ordne (wenn sowohl die 1 als auch die 2 als Summanden vorkommen) die Summanden lexikografisch.
Die so erhaltenen Resultate kann man wie folgt in einer ***Tabelle*** übersichtlich festhalten:

Darstellungen als Summen			Anzahl der Möglichkeiten
4 = 1+1+1+1	= 1+1+2	= 2+2	1 + 3 + 1 = **5**
	= 1+2+1		
	= 2+1+1		

46

Folgende ***Impulse*** können beim Lösen der **Aufgabe 11.4a)** hilfreich sein:

- Welches Ordnungsprinzip wollen wir beim Abzählen der Quadrate verwenden?
  [Der Größe nach ordnen; "Grundquadrat" vor zusammengesetzten Quadraten.]
  - Wie viele Sorten von Quadraten gibt es?
    [3 Sorten; großes Ausgangsquadrat nicht vergessen!]
- Wie viele Quadrate gibt es von jeder Sorte, wie viele insgesamt? [4 + 1 + 1 = 6]

Beim Ermitteln der Anzahl der vorhandenen Dreiecke in **Aufgabe 11.4b)** wird man dieselben Impulse einsetzen und feststellen, dass es hier vier Sorten von verschiedenen großen Dreiecken gibt und dass insgesamt (8 + 4 + 4 + 4 =) 20 Dreiecke vorkommen.
Zusätzlich kann man fragen:

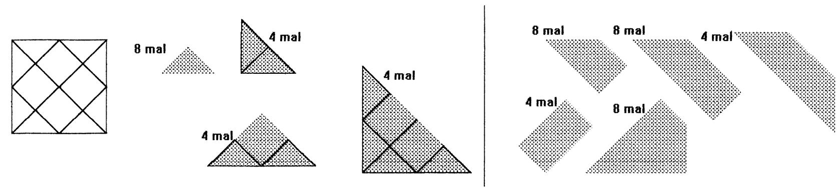
- Was können wir bei dieser Aufgabe für ein *geschicktes* Zählen ausnützen?
  ["Symmetrie" bezüglich der Diagonalen.]

An der *Wandtafel* werden die unten links angegebenen Figuren festgehalten.

Wenn es Schüler gibt, die die **Aufgabe 11.4c)** selbständig und richtig lösen, dann weist dies auf eine hohe *Begabungspotenz* hin.
Als ***1. Ordnungsprinzip*** bietet sich die Einteilung der ***Vierecksarten*** in folgender Reihenfolge an: Quadrate, Rechtecke, Trapeze, allgemeine Vierecke.
Als ***2. Ordnungsprinzip*** wird man die unterschiedlichen ***Größen*** der vorkommenden Vierecksarten wählen und erkennen lassen, dass nur die Quadrate und die Trapeze in unterschiedlicher Größe vorkommen.

Für die Gesamtanzahl der vorkommenden Vierecke gilt dann:
(4 + 1 + 1) + 4 + (8 + 8 + 4) + 8 = 6 + 4 + 20 + 8 = 38

An der ***Wandtafel*** wird man folgende rechts stehende Figuren festhalten:



Bei der recht schwierigen **Aufgabe 13.6a)** können die Schüler nachweisen, wie gut sie das ***systematische Ermitteln aller Möglichkeiten*** bereits beherrschen.
Hier geht es letztlich darum, alle Möglichkeiten zu finden, wie man eine Zahl als Summe der (beliebig oft vorkommenden) Zahlen 1 oder 2 darstellen kann.
Es bietet sich das folgende ***Ordnungsprinzip*** an:
Man verwende zunächst möglichst oft den Summanden 1 und ordne (wenn sowohl die 1 als auch die 2 als Summanden vorkommen) die Summanden lexikografisch.
Die so erhaltenen Resultate kann man wie folgt in einer ***Tabelle*** übersichtlich festhalten:

Darstellungen als Summen			Anzahl der Möglichkeiten
4 = 1+1+1+1	= 1+1+2	= 2+2	1 + 3 + 1 = **5**
	= 1+2+1		
	= 2+1+1		

5 =	1+1+1+1+1	= 1+1+1+2 = 1+1+2+1 = 1+2+1+1 = 2+1+1+1	= 1+2+2 = 2+1+2 = 2+2+1	1 + 4 + 3 = **8**
6 :	{1,1,1,1,1,1=	{1.1.1.1.2}	{2,2,2}	1 + 5 + 6 + 1 = **13**

Bei der 6 wurde bewusst auf die Darstellung der Summen verzichtet. Die Schüler sollen erkennen, dass es genügt, die Anzahlen der verschiedenen Anordnungen der Zahlen 1 und 2 zu ermitteln.

Die Aufgabe 13.6a) ist eine ***Hilfsaufgabe*** für die **Aufgabe 13.6b)**. Die durch die ermittelten Zahlen ergänzte ***Tabelle*** aus dem Aufgabentext sieht wie folgt aus:

Geldbetrag in €	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Darstellungen	1	2	3	**5**	**8**	**13**				

Die zu entdeckende ***Gesetzmäßigkeit*** lautet: Ab der "3" ist jede Zahl gleich der Summe ihrer beiden Vorgänger.
Hiernach müssen in die noch leeren Felder der Tabelle die Zahlen 21, 34, 55 und **89** eingetragen werden.
Wenn die vermutete Gesetzmäßigkeit tatsächlich gilt, dann gibt es für 10 DM genau 89 verschiedene Darstellungen als Summe von 1 € ,- und 2 € - Münzen.

Die **Aufgaben 16.7)** und **104)**, bei denen das ***systematische Probieren*** ebenfalls eine wichtige Rolle spielt, werden im Abschnitt 5.5. (Vorwärtsarbeiten) bzw. 5.6. (Rückwärtsarbeiten) noch besprochen.

Wenn ein Schüler bei der recht schwierigen **Aufgabe 8.7)** selbständig zur Lösung gelangt, dann deutet dies auf hohe *Begabungspotenzen* hin.
In Abschnitt 5.1 wurde bereits gezeigt, wie man nach dem ***Einführen günstiger Bezeichnungen*** diese Aufgabe ***in die Sprache der Gleichungen übersetzen*** kann.
Bezeichnet man die Anzahl der Kühe mit k und die Anzahl der Ziegen mit z , dann gilt nach Aufgabenstellung $3 \cdot k + 4 \cdot z = 108$ und $7 \cdot k + 6 \cdot z = 212$.

1. Lösungsweg durch ***systematisches Probieren***:
Diese Aufgabe sollte man nur solchen Schülern stellen, die bereits gelernt haben, *geschickt* zu probieren.
Es liegt nahe, mit dem besonders einfachen $k = 10$ zu beginnen. Dabei merkt man, dass dies keine Lösung liefern kann, weil $4 \cdot z = 78$ im Bereich der natürlichen Zahlen keine Lösung besitzt.
Folgende ***Impulse*** können nützlich sein:

- Mit welcher Zahl k soll man das Probieren fortsetzen?
  [Mit $k = 12$, weil es unwahrscheinlich ist, dass für $k = 11$ die Zahl $4 \cdot z$ durch 4 teilbar ist.]
- Mit welcher Zahl k soll man nun das Probieren fortsetzen?
  [Wenn für $k = 10$ und für $k = 11$ kein ganzahliges z existiert, wohl aber zu $k = 12$, dann dürfte für k = 13, 14, 15 wieder kein ganzzahliges z existieren, wohl aber für $k = 16$, dann wieder für $k = 20$ und für $k = 24$.]

Die Resultate dieses ***systematischen und geschickten Probierens*** werden in der folgenden ***Tabelle*** festgehalten:

47

5 =	1+1+1+1+1	= 1+1+1+2 = 1+1+2+1 = 1+2+1+1 = 2+1+1+1	= 1+2+2 = 2+1+2 = 2+2+1	1 + 4 + 3 = **8**
6 :	{1,1,1,1,1,1=	{1.1.1.1.2}	{2,2,2}	1 + 5 + 6 + 1 = **13**

Bei der 6 wurde bewusst auf die Darstellung der Summen verzichtet. Die Schüler sollen erkennen, dass es genügt, die Anzahlen der verschiedenen Anordnungen der Zahlen 1 und 2 zu ermitteln.

Die Aufgabe 13.6a) ist eine ***Hilfsaufgabe*** für die **Aufgabe 13.6b)**. Die durch die ermittelten Zahlen ergänzte ***Tabelle*** aus dem Aufgabentext sieht wie folgt aus:

Geldbetrag in €	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Darstellungen	1	2	3	**5**	**8**	**13**				

Die zu entdeckende ***Gesetzmäßigkeit*** lautet: Ab der "3" ist jede Zahl gleich der Summe ihrer beiden Vorgänger.
Hiernach müssen in die noch leeren Felder der Tabelle die Zahlen 21, 34, 55 und **89** eingetragen werden.
Wenn die vermutete Gesetzmäßigkeit tatsächlich gilt, dann gibt es für 10 DM genau 89 verschiedene Darstellungen als Summe von 1 € ,- und 2 € - Münzen.

Die **Aufgaben 16.7)** und **104)**, bei denen das ***systematische Probieren*** ebenfalls eine wichtige Rolle spielt, werden im Abschnitt 5.5. (Vorwärtsarbeiten) bzw. 5.6. (Rückwärtsarbeiten) noch besprochen.

Wenn ein Schüler bei der recht schwierigen **Aufgabe 8.7)** selbständig zur Lösung gelangt, dann deutet dies auf hohe *Begabungspotenzen* hin.
In Abschnitt 5.1 wurde bereits gezeigt, wie man nach dem ***Einführen günstiger Bezeichnungen*** diese Aufgabe ***in die Sprache der Gleichungen übersetzen*** kann.
Bezeichnet man die Anzahl der Kühe mit k und die Anzahl der Ziegen mit z , dann gilt nach Aufgabenstellung $3 \cdot k + 4 \cdot z = 108$ und $7 \cdot k + 6 \cdot z = 212$.

1. Lösungsweg durch ***systematisches Probieren***:
Diese Aufgabe sollte man nur solchen Schülern stellen, die bereits gelernt haben, *geschickt* zu probieren.
Es liegt nahe, mit dem besonders einfachen $k = 10$ zu beginnen. Dabei merkt man, dass dies keine Lösung liefern kann, weil $4 \cdot z = 78$ im Bereich der natürlichen Zahlen keine Lösung besitzt.
Folgende ***Impulse*** können nützlich sein:

- Mit welcher Zahl k soll man das Probieren fortsetzen?
  [Mit $k = 12$, weil es unwahrscheinlich ist, dass für $k = 11$ die Zahl $4 \cdot z$ durch 4 teilbar ist.]
- Mit welcher Zahl k soll man nun das Probieren fortsetzen?
  [Wenn für $k = 10$ und für $k = 11$ kein ganzahliges z existiert, wohl aber zu $k = 12$, dann dürfte für k = 13, 14, 15 wieder kein ganzzahliges z existieren, wohl aber für $k = 16$, dann wieder für $k = 20$ und für $k = 24$.]

Die Resultate dieses ***systematischen und geschickten Probierens*** werden in der folgenden ***Tabelle*** festgehalten:

k	3·k	4·z	z	7·k	6·z	7·k + 6·z	
10	30	78	k.L.	----	----	--------	--------
12	36	72	18	84	108	192	< 212
16	48	60	15	112	90	202	< 212
20	60	48	**12**	140	72	**212**	
24	72	36	9	168	54	222	> 212

Damit ist gezeigt, dass nur für **k = 20** und **z = 12** beide Gleichungen erfüllt sind.

- Antwortsatz! [Eine Kuh kostete 20 Taler, eine Ziege kostete 12 Taler.]
- Welche ***Gesetzmäßigkeiten*** *kann man* ***in den Spalten*** *entdecken?*
  [Wenn k um 4 wächst, dann wächst 3·k um 12, dann nimmt 4·z um 12 ab, dann nimmt 7·k um 28 zu, dann nimmt 6·z um 18 ab und es nimmt (7·k + 6·z) um 10 zu.]
- Probe! [Die ist der Tabelle zu entnehmen: 3 Kühe und 4 Ziegen kosten (60+48 =) 108 Taler; 7 Kühe und 6 Ziegen kosten (140 + 72 =) 212 Taler.

Einen ***2. Lösungsweg***.und einen ***3. Lösungsweg*** werden wir im Abschnitt 5.5. behandeln.

48

k	3·k	4·z	z	7·k	6·z	7·k + 6·z	
10	30	78	k.L.	----	----	--------	--------
12	36	72	18	84	108	192	< 212
16	48	60	15	112	90	202	< 212
20	60	48	**12**	140	72	**212**	
24	72	36	9	168	54	222	> 212

Damit ist gezeigt, dass nur für **k = 20** und **z = 12** beide Gleichungen erfüllt sind.

- Antwortsatz! [Eine Kuh kostete 20 Taler, eine Ziege kostete 12 Taler.]
- Welche ***Gesetzmäßigkeiten*** *kann man* ***in den Spalten*** *entdecken?*
  [Wenn k um 4 wächst, dann wächst 3·k um 12, dann nimmt 4·z um 12 ab, dann nimmt 7·k um 28 zu, dann nimmt 6·z um 18 ab und es nimmt (7·k + 6·z) um 10 zu.]
- Probe! [Die ist der Tabelle zu entnehmen: 3 Kühe und 4 Ziegen kosten (60+48 =) 108 Taler; 7 Kühe und 6 Ziegen kosten (140 + 72 =) 212 Taler.

Einen ***2. Lösungsweg***.und einen ***3. Lösungsweg*** werden wir im Abschnitt 5.5. behandeln.

5.5. Vorwärtsarbeiten und Folgern aus Bedingungen

Beim Darstellen einer Lösung muss man stets vom *Start* (den gegebenen Größen oder Bedingungen) ausgehen und schrittweise über *Teilziele* das *Ziel* (das Gesuchte) erreichen, wobei jeder Schritt zu *begründen* ist. Dieses Vorgehen entspricht dem *Vorwärtsarbeiten.*
Bei leichten Aufgaben kann man auf diese Weise auch den *Lösungsweg finden.*

Die Aufgabe 3.3) kann für das Einführen in das *Vorwärtsarbeiten*, verbunden mit dem Einsatz einer *Tabelle* verwendet werden.

- Was ist gegeben? Was ist gesucht?
  [Die beiden Uhrzeiten und die "Leerfelder" für die beiden gesuchten Größen werden in der Tabelle festgehalten.]
- Was lässt sich aus dem Gegebenen unmittelbar berechnen? Begründe!
  ° Wann wäre Markus in der Schule?
  [5 Minuten vor Unterrichtsbeginn, also um 7.55 .]
- Was lässt sich nun unmittelbar berechnen? Begründe!
  ° Beachte, dass Markus um 7.45 Uhr die halbe Strecke zurückgelegt hat!
  [Da er von 7.45 bis 7.55 genau 10 Minuten gefahren ist und da er stets mit gleichem Tempo fährt, braucht er für die ganze Strecke 20 Minuten .]
- Was lässt sich nun unmittelbar berechnen? Begründe!
  [Wenn er 20 Minuten gefahren ist und um 7.55 Uhr angekommen ist, dann ist er um 7.35 Uhr abgefahren.]
- Antwortsatz!

Lösungsweg und *Resultat* lassen sich wie angegeben in der Tabelle festhalten.
Die Angaben, in welcher Reihenfolge die Teilresultate erhalten wurden, sind nur für den Lehrer bestimmt.
Bei leistungsstarken Schülern, die diese Aufgabe "im Kopf" lösen, wird man auf die Tabelle verzichten. Dafür wird man verstärkt auf exakte und vollständige *Begründungen* achten.

Uhrzeit	Fahrzeit
$\boxed{}$	
7.45	
8.00	
	$\boxed{}$

Uhrzeit	Fahrzeit
$\boxed{7.35\ ^{(5)}}$	
	10 min (3)
7.45	
	10 min (2)
7.55 (1)	
8.00	
	$\boxed{20\text{ min}\ ^{(4)}}$

Auch beim Lösen leichter Aufgaben, wo man beim Vorwärtsarbeiten bereits nach dem ersten Schritt das Ziel erreicht - wie dies z.B. bei den Aufgaben 40) und 41) der Fall ist - sollte man den angegebenen Hauptimpuls verwenden. Die Schüler sollen sich an diese Frage gewöhnen und sie schließlich selbst stellen.

Bei vielen Aufgaben ist mehr als ein Schritt nötig, d.h. es muss mindestens ein *Teilziel* erreicht werden. Dies ist z.B. bei den Aufgaben 1.3), 2.3), 4.2), 7.2), 8.2), 9.2), 13.4), 14.4) und 14.6) der Fall.

49

5.5. Vorwärtsarbeiten und Folgern aus Bedingungen

Beim Darstellen einer Lösung muss man stets vom Start (den gegebenen Größen oder Bedingungen) ausgehen und schrittweise über Teilziele das Ziel (das Gesuchte) erreichen, wobei jeder Schritt zu begründen ist. Dieses Vorgehen entspricht dem Vorwärtsarbeiten.
Bei leichten Aufgaben kann man auf diese Weise auch den Lösungsweg finden.

Die Aufgabe 3.3) kann für das Einführen in das Vorwärtsarbeiten, verbunden mit dem Einsatz einer Tabelle verwendet werden.

- Was ist gegeben? Was ist gesucht?
  [Die beiden Uhrzeiten und die "Leerfelder" für die beiden gesuchten Größen werden in der Tabelle festgehalten.]
- Was lässt sich aus dem Gegebenen unmittelbar berechnen? Begründe!
  ° Wann wäre Markus in der Schule?
  [5 Minuten vor Unterrichtsbeginn, also um 7.55 .]
- Was lässt sich nun unmittelbar berechnen? Begründe!
  ° Beachte, dass Markus um 7.45 Uhr die halbe Strecke zurückgelegt hat!
  [Da er von 7.45 bis 7.55 genau 10 Minuten gefahren ist und da er stets mit gleichem Tempo fährt, braucht er für die ganze Strecke 20 Minuten .]
- Was lässt sich nun unmittelbar berechnen? Begründe!
  [Wenn er 20 Minuten gefahren ist und um 7.55 Uhr angekommen ist, dann ist er um 7.35 Uhr abgefahren.]
- Antwortsatz!

Lösungsweg und Resultat lassen sich wie angegeben in der Tabelle festhalten.
Die Angaben, in welcher Reihenfolge die Teilresultate erhalten wurden, sind nur für den Lehrer bestimmt.
Bei leistungsstarken Schülern, die diese Aufgabe "im Kopf" lösen, wird man auf die Tabelle verzichten. Dafür wird man verstärkt auf exakte und vollständige Begründungen achten.

Uhrzeit	Fahrzeit
$\boxed{}$	
7.45	
8.00	
	$\boxed{}$

Uhrzeit	Fahrzeit
$\boxed{7.35\ ^{(5)}}$	
	10 min (3)
7.45	
	10 min (2)
7.55 (1)	
8.00	
	$\boxed{20\text{ min}\ ^{(4)}}$

Auch beim Lösen leichter Aufgaben, wo man beim Vorwärtsarbeiten bereits nach dem ersten Schritt das Ziel erreicht - wie dies z.B. bei den Aufgaben 40) und 41) der Fall ist - sollte man den angegebenen Hauptimpuls verwenden. Die Schüler sollen sich an diese Frage gewöhnen und sie schließlich selbst stellen.

Bei vielen Aufgaben ist mehr als ein Schritt nötig, d.h. es muss mindestens ein Teilziel erreicht werden. Dies ist z.B. bei den Aufgaben 1.3), 2.3), 4.2), 7.2), 8.2), 9.2), 13.4), 14.4) und 14.6) der Fall.

Eine Aufgabe wird schwieriger, wenn mehrere Größen / Bedingungen gegeben sind und wenn nicht von vornherein klar ist, mit welcher man günstigerweise beginnen soll bzw. in welcher ***Reihenfolge*** sie benötigt werden. In solchen Fällen ist folgender *Impuls* nützlich:

- Mit welcher Größe / Bedingung soll man günstigerweise beginnen?
  - ° Untersuche, aus welcher Größe / Bedingung sich etwas unmittelbar berechnen / folgern lässt!
- Welche Größe / Bedingung wird man als nächstes verwenden?

Bei **Aufgabe 9.3)** muss man mit Bedingung (e) beginnen und die gegebenen Bedingungen in umgekehrter Reihenfolge verwenden.

Die Lösung sollte wie folgt (mündlich oder schriftlich) dargestellt werden:

Wegen (e) gilt $E = 2 + 6 + 7 = 15$.

Wegen (d) gilt dann $D = 15 : 5 = 3$.

Wegen (c) gilt dann $C = 15 - 3 = 2$.

Wegen (b) gilt dann $B = 3 \cdot 12 = 36$.

Wegen (a) gilt dann $A = 36 - 12 = 24$

Probe: $A + C + E = 24 + 12 + 15 = 51$,

$B + C + E = 36 + 12 + 3 = 51$.

Schwieriger ist die **Aufgabe 16.6)**, weil hier nicht sofort zu erkennen ist, mit welcher Bedingung man beginnen sollte und in welcher Reihenfolge die Bedingungen zu verwenden sind.

Hier muss man mit der Bedingung $B + B = B \cdot B$ beginnen, weil man nur aus ihr etwas Brauchbares ableiten kann. Man ist auf eine ***Hilfsaufgabe*** gestoßen, die wegen $B > 0$ nur die Lösung $B = 2$ besitzt.

Die Reihenfolge, in der die restlichen Bedingungen zu verwenden sind, liegt bei dieser Aufgabe eindeutig fest.

Die ***Lösung nebst Lösungsweg*** kann wie folgt festgehalten werden.

$E \cdot L - K = B$	(4): $40 - K = 2$	$K = 38$
$K : N = B$	(5): $38 : N = 2$	$N = 19$
$B + B = B \cdot B$	(1):	$B = 2$
$3 \cdot L - E = B$	(3): $12 - E = 2$	$E = 10$
$8 \cdot B : L = 2 \cdot B$	(2): $16 : L = 4$	$L = 4$
$K + N - O + B - E + L - N = 17$	(6): 6:$38+19-\mathbf{O}+2-10+4-19=17$	
	$34 - \mathbf{O} = 17$	$\mathbf{O = 17}$

Leichter sind die ***analogen*** **Aufgaben 58)** und **59)**.

In **Aufgabe 103)** sind die Zahlen von 1 bis 12 in eine Sternfigur so einzutragen, dass die Summe von je vier Zahlen, die auf derselben Linie stehen, stets gleich ist. Die sieben Zahlen 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9 sind bereits eingetragen, die restlichen fünf Zahlen sind mit A, B, C, D, E bezeichnet und sind zu ermitteln.

Für den ersten Schritt beim ***Vorwärtsarbeiten*** gibt es hier *2 Möglichkeiten*: Entweder man berechnet die "Liniensumme" (3 + 8 + 6 + 9 =) 26, oder man hält fest, dass für die gesuchten Zahlen nur 2, 7, 11, 12, 13 in Frage kommen. Beide Erkenntnisse werden benötigt.

50

Eine Aufgabe wird schwieriger, wenn mehrere Größen / Bedingungen gegeben sind und wenn nicht von vornherein klar ist, mit welcher man günstigerweise beginnen soll bzw. in welcher ***Reihenfolge*** sie benötigt werden. In solchen Fällen ist folgender *Impuls* nützlich:

- Mit welcher Größe / Bedingung soll man günstigerweise beginnen?
  - ° Untersuche, aus welcher Größe / Bedingung sich etwas unmittelbar berechnen / folgern lässt!
- Welche Größe / Bedingung wird man als nächstes verwenden?

Bei **Aufgabe 9.3)** muss man mit Bedingung (e) beginnen und die gegebenen Bedingungen in umgekehrter Reihenfolge verwenden.

Die Lösung sollte wie folgt (mündlich oder schriftlich) dargestellt werden:

Wegen (e) gilt $E = 2 + 6 + 7 = 15$.

Wegen (d) gilt dann $D = 15 : 5 = 3$.

Wegen (c) gilt dann $C = 15 - 3 = 2$.

Wegen (b) gilt dann $B = 3 \cdot 12 = 36$.

Wegen (a) gilt dann $A = 36 - 12 = 24$

Probe: $A + C + E = 24 + 12 + 15 = 51$,

$B + C + E = 36 + 12 + 3 = 51$.

Schwieriger ist die **Aufgabe 16.6)**, weil hier nicht sofort zu erkennen ist, mit welcher Bedingung man beginnen sollte und in welcher Reihenfolge die Bedingungen zu verwenden sind.

Hier muss man mit der Bedingung $B + B = B \cdot B$ beginnen, weil man nur aus ihr etwas Brauchbares ableiten kann. Man ist auf eine ***Hilfsaufgabe*** gestoßen, die wegen $B > 0$ nur die Lösung $B = 2$ besitzt.

Die Reihenfolge, in der die restlichen Bedingungen zu verwenden sind, liegt bei dieser Aufgabe eindeutig fest.

Die ***Lösung nebst Lösungsweg*** kann wie folgt festgehalten werden.

$E \cdot L - K = B$	(4): $40 - K = 2$	$K = 38$
$K : N = B$	(5): $38 : N = 2$	$N = 19$
$B + B = B \cdot B$	(1):	$B = 2$
$3 \cdot L - E = B$	(3): $12 - E = 2$	$E = 10$
$8 \cdot B : L = 2 \cdot B$	(2): $16 : L = 4$	$L = 4$
$K + N - O + B - E + L - N = 17$	(6): 6:$38+19-\mathbf{O}+2-10+4-19=17$	
	$34 - \mathbf{O} = 17$	$\mathbf{O = 17}$

Leichter sind die ***analogen*** **Aufgaben 58)** und **59)**.

In **Aufgabe 103)** sind die Zahlen von 1 bis 12 in eine Sternfigur so einzutragen, dass die Summe von je vier Zahlen, die auf derselben Linie stehen, stets gleich ist. Die sieben Zahlen 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9 sind bereits eingetragen, die restlichen fünf Zahlen sind mit A, B, C, D, E bezeichnet und sind zu ermitteln.

Für den ersten Schritt beim ***Vorwärtsarbeiten*** gibt es hier *2 Möglichkeiten*: Entweder man berechnet die "Liniensumme" (3 + 8 + 6 + 9 =) 26, oder man hält fest, dass für die gesuchten Zahlen nur 2, 7, 11, 12, 13 in Frage kommen. Beide Erkenntnisse werden benötigt.

Im dritten Schritt kann man wegen 9 + D + 5 + 1 = 26 berechnen, dass **D = 11** gelten muss, ohne die zweitgenannte Erkenntnis zu benötigen, die sich jetzt verschärfen lässt:
(*) Für A, B, C, E kommen nur noch 2, 7, 10 oder 12 in Frage.
Ohne die zweitgenannte Erkenntnis kommt man nun nicht mehr weiter. Die aus der Bedingung für die "Liniensumme" folgenden vier Gleichungen C + E = 9, B + E = 17, A + B = 22 und A + C = 14 legen die vier gesuchten Zahlen nicht eindeutig fest, weil diese Gleichungen voneinander abhängig sind.
Mit Hilfe von (*) kann man dagegen durch ***systematisches Probieren*** recht leicht erkennen, dass **A = 12**, **B = 10** , **C = 2** und **E = 7** gelten muss.

Sehr schwierig ist die **Aufgabe 14.7)**, wo in den drei Teilaufgaben die Leerfelder der folgenden Tabelle zu füllen sind:

	x	y	z	x +y- z	3·x + (y + z)	3·x - (y + z)
a)		5			25	11
b)	8			9	25	
c)					12	12

Aufgabe 14.7a): Im ersten Schritt muss man von von den Zahlen in der 5. und der 6. Spalte ausgehen.
- Vergleiche die Ausdrücke im Spalteneingang der 5. und der 6. Spalte!
  Was kannst du daraus schließen?
  ° Vergleiche 3·x + (y + z) , 3·x und 3·x - (y + z) ! [3·x liegt "genau in der Mitte"]
  : Wie groß ist also 3·x ? [3·x = 18 , also x = 6]

Dieses Resultat wird in die Tabelle eingetragen. Die "$^{(1)}$" hält fest, dass dieses Resultat im 1. Schritt erreicht wurde.
Im 2. Schritt verwendet man am günstigsten die 5. Spalte. Wegen 3·6 + 5 + z = 25 gilt z = 2 .
Der Rest ist einfach. Der ***Lösungsweg und das Resultat*** sind in der folgenden ***Tabelle*** festgehalten:

	x	y	z	x + y - z	3·x + (y + z)	3·x - (y + z)	y + z	y - z
a)	**6** $^{(1)}$	5	**2** $^{(2)}$	**9** $^{(3)}$	25	11		
b)	8	**1** $^{(4)}$	**0** $^{(4)}$	9	25	**23** $^{(2)}$	**1** $^{(1)}$	**1** $^{(3)}$
c)	**4** $^{(3)}$	**0** $^{(2)}$	**0** $^{(2)}$	**4** $^{(4)}$	12	12	**0** $^{(1)}$	

Bei **Aufgabe 14.7b)** muss man von den Zahlen in der 1. und der 5. Spalte ausgehen. Man erhält wegen 3·8 + (y + z) = 25 zunächst die ***Hilfsgröße*** (y + z) = 1
Hieraus erhält man im 2.Schritt in der 6. Spalte 3·8 - 1 = 23 .
Im 3. Schritt muss man von den Zahlen in der 1.Spalte und die 4. Spalte ausgehen.
Da 8 + (y - z) = 9 gelten soll, muss y - z = 1 gelten.
Aus y + z = 1 und y - z = 1 folgt dann y = 1 und z = 0 .

Bei **Aufgabe 14.7c)** muss man offensichtlich von den (einzig vorhandenen) Zahlen in der 5. und 6. Spalte ausgehen.
Da sie einander gleich sind, muss y + z = 0 gelten und daher auch x = y = 0 .
Folglich muss 3·x = 12 und damit x = 4 gelten.

51

Im dritten Schritt kann man wegen 9 + D + 5 + 1 = 26 berechnen, dass **D = 11** gelten muss, ohne die zweitgenannte Erkenntnis zu benötigen, die sich jetzt verschärfen lässt:
(*) Für A, B, C, E kommen nur noch 2, 7, 10 oder 12 in Frage.
Ohne die zweitgenannte Erkenntnis kommt man nun nicht mehr weiter. Die aus der Bedingung für die "Liniensumme" folgenden vier Gleichungen C + E = 9, B + E = 17, A + B = 22 und A + C = 14 legen die vier gesuchten Zahlen nicht eindeutig fest, weil diese Gleichungen voneinander abhängig sind.
Mit Hilfe von (*) kann man dagegen durch ***systematisches Probieren*** recht leicht erkennen, dass **A = 12**, **B = 10** , **C = 2** und **E = 7** gelten muss.

Sehr schwierig ist die **Aufgabe 14.7)**, wo in den drei Teilaufgaben die Leerfelder der folgenden Tabelle zu füllen sind:

	x	y	z	x +y- z	3·x + (y + z)	3·x - (y + z)
a)		5			25	11
b)	8			9	25	
c)					12	12

Aufgabe 14.7a): Im ersten Schritt muss man von von den Zahlen in der 5. und der 6. Spalte ausgehen.
- Vergleiche die Ausdrücke im Spalteneingang der 5. und der 6. Spalte!
  Was kannst du daraus schließen?
  ° Vergleiche 3·x + (y + z) , 3·x und 3·x - (y + z) ! [3·x liegt "genau in der Mitte"]
  : Wie groß ist also 3·x ? [3·x = 18 , also x = 6]

Dieses Resultat wird in die Tabelle eingetragen. Die "$^{(1)}$" hält fest, dass dieses Resultat im 1. Schritt erreicht wurde.
Im 2. Schritt verwendet man am günstigsten die 5. Spalte. Wegen 3·6 + 5 + z = 25 gilt z = 2 .
Der Rest ist einfach. Der ***Lösungsweg und das Resultat*** sind in der folgenden ***Tabelle*** festgehalten:

	x	y	z	x + y - z	3·x + (y + z)	3·x - (y + z)	y + z	y - z
a)	**6** $^{(1)}$	5	**2** $^{(2)}$	**9** $^{(3)}$	25	11		
b)	8	**1** $^{(4)}$	**0** $^{(4)}$	9	25	**23** $^{(2)}$	**1** $^{(1)}$	**1** $^{(3)}$
c)	**4** $^{(3)}$	**0** $^{(2)}$	**0** $^{(2)}$	**4** $^{(4)}$	12	12	**0** $^{(1)}$	

Bei **Aufgabe 14.7b)** muss man von den Zahlen in der 1. und der 5. Spalte ausgehen. Man erhält wegen 3·8 + (y + z) = 25 zunächst die ***Hilfsgröße*** (y + z) = 1
Hieraus erhält man im 2.Schritt in der 6. Spalte 3·8 - 1 = 23 .
Im 3. Schritt muss man von den Zahlen in der 1.Spalte und die 4. Spalte ausgehen.
Da 8 + (y - z) = 9 gelten soll, muss y - z = 1 gelten.
Aus y + z = 1 und y - z = 1 folgt dann y = 1 und z = 0 .

Bei **Aufgabe 14.7c)** muss man offensichtlich von den (einzig vorhandenen) Zahlen in der 5. und 6. Spalte ausgehen.
Da sie einander gleich sind, muss y + z = 0 gelten und daher auch x = y = 0 .
Folglich muss 3·x = 12 und damit x = 4 gelten.

Wesentlich leichter sind die ***analogen*** **Aufgaben 11.2)**, **12.2)**, **13.2)**, **14.2)**, **15.2)**, und **16.2)** .

Die sehr schwierige **Aufgabe 16.7)** kann man nur mit Schülern behandeln, die (über den Unterrichtsstoff hinausgehend) bereits mit vierstelligen Zahlen umgehen können. Es werden vierstellige Zahlen gesucht, die folgende Bedingungen erfüllen:

(a) Keine zwei der vier Ziffern sind gleich.

(b) Der Unterschied zwischen der Zehnerziffer Z und der Hunderterziffer H soll 3 betragen.

(c) Der Unterschied zwischen der Hunderterziffer H und der Tausenderziffer T soll 4 betragen.

- Was lässt sich aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar folgern?
  [(b*) $Z - H = 3$ oder $H - Z = 3$.)
  (c*) $H - T = 4$ oder $T - H = 4$.]
  (a*) Z, H, T und die Einerstelle E sind alle voneinander verschieden.]
- Mit welcher Bedingung soll man günstigerweise beginnen?
  ° Bei welcher Bedingung muss man die wenigsten Fälle untersuchen?
  [Es gibt weniger Paare (T;H) mit der Differenz 4 als Paare (H;Z) mit der Differenz 3]
- Ermittle *systematisch* alle Paare (T;H), die die Bedingung (c*) erfüllen!
  Wie viele Paare sind das?
  [11Paare: 15, 26, 37, 40, 48, 51, 59, 68, 73, 84, 95 .]
- Ermittle *systematisch* alle Tripel (T;H;Z), die auch die Bedingung (b*) erfüllen!
  Wie viele Tripel sind das?
  [16 Tripel: 152. 158; 263, 269; 374; 403; 485; 514; 596; 625; 730, 736; 841, 843; 952, 958.]
- Wie viele Einerziffern E kann man zu jedem Tripel (T;H;Z) hinzufügen, so dass auch die Bedingung (a*) erfüllt ist?
  [7 Ziffern, da die drei für T, H, Z verwendeten Ziffern nicht verwendet werden dürfen.]
- Wie viele vierstellige Zahlen gibt es daher, die die Bedingungen (a), (b), (c) erfüllen?
  [Wenn man zu jedem der 16 möglichen Tripel (T;H;Z) jeweils 7 Einerziffern hinzufügen kann, dann gibt es insgesamt ($16 \cdot 7 =$) **112 vierstellige Zahlen**, die die gegebenen Bedingungen erfüllen.]

Von hohem Schwierigkeitsgrad ist auch die **Aufgabe 3.7)**. Hier ist es günstig, eine ***Fallunterscheidung*** durchzuführen:
1. Fall:
In der linken Hand sind eine ungerade Anzahl u von Kugeln, in der rechten Hand eine gerade Anzahl g von Kugeln.
Dann ist $4 \cdot u$ gerade und $5 \cdot g$ gerade und folglich $4 \cdot u + 5 \cdot g$ eine gerade Zahl.
2. Fall:
In der linken Hand sind eine gerade Anzahl g von Kugeln, in der rechten Hand eine ungerade Anzahl u von Kugeln.
Dann ist $4 \cdot g$ gerade und $5 \cdot u$ ungerade und folglich $4 \cdot u + 5 \cdot g$ eine ungerade Zahl.

Hieraus folgt die Lösung der **Aufgabe 3.7a)**:
Wenn die genannte **Summe gerade** ist, dann ist in der **linken Hand die ungerade Anzahl** von Kugeln.

52

Wesentlich leichter sind die ***analogen*** **Aufgaben 11.2)**, **12.2)**, **13.2)**, **14.2)**, **15.2)**, und **16.2)** .

Die sehr schwierige **Aufgabe 16.7)** kann man nur mit Schülern behandeln, die (über den Unterrichtsstoff hinausgehend) bereits mit vierstelligen Zahlen umgehen können. Es werden vierstellige Zahlen gesucht, die folgende Bedingungen erfüllen:

(a) Keine zwei der vier Ziffern sind gleich.

(b) Der Unterschied zwischen der Zehnerziffer Z und der Hunderterziffer H soll 3 betragen.

(c) Der Unterschied zwischen der Hunderterziffer H und der Tausenderziffer T soll 4 betragen.

- Was lässt sich aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar folgern?
  [(b*) $Z - H = 3$ oder $H - Z = 3$.)
  (c*) $H - T = 4$ oder $T - H = 4$.]
  (a*) Z, H, T und die Einerstelle E sind alle voneinander verschieden.]
- Mit welcher Bedingung soll man günstigerweise beginnen?
  ° Bei welcher Bedingung muss man die wenigsten Fälle untersuchen?
  [Es gibt weniger Paare (T;H) mit der Differenz 4 als Paare (H;Z) mit der Differenz 3]
- Ermittle *systematisch* alle Paare (T;H), die die Bedingung (c*) erfüllen!
  Wie viele Paare sind das?
  [11Paare: 15, 26, 37, 40, 48, 51, 59, 68, 73, 84, 95 .]
- Ermittle *systematisch* alle Tripel (T;H;Z), die auch die Bedingung (b*) erfüllen!
  Wie viele Tripel sind das?
  [16 Tripel: 152. 158; 263, 269; 374; 403; 485; 514; 596; 625; 730, 736; 841, 843; 952, 958.]
- Wie viele Einerziffern E kann man zu jedem Tripel (T;H;Z) hinzufügen, so dass auch die Bedingung (a*) erfüllt ist?
  [7 Ziffern, da die drei für T, H, Z verwendeten Ziffern nicht verwendet werden dürfen.]
- Wie viele vierstellige Zahlen gibt es daher, die die Bedingungen (a), (b), (c) erfüllen?
  [Wenn man zu jedem der 16 möglichen Tripel (T;H;Z) jeweils 7 Einerziffern hinzufügen kann, dann gibt es insgesamt ($16 \cdot 7 =$) **112 vierstellige Zahlen**, die die gegebenen Bedingungen erfüllen.]

Von hohem Schwierigkeitsgrad ist auch die **Aufgabe 3.7)**. Hier ist es günstig, eine ***Fallunterscheidung*** durchzuführen:
1. Fall:
In der linken Hand sind eine ungerade Anzahl u von Kugeln, in der rechten Hand eine gerade Anzahl g von Kugeln.
Dann ist $4 \cdot u$ gerade und $5 \cdot g$ gerade und folglich $4 \cdot u + 5 \cdot g$ eine gerade Zahl.
2. Fall:
In der linken Hand sind eine gerade Anzahl g von Kugeln, in der rechten Hand eine ungerade Anzahl u von Kugeln.
Dann ist $4 \cdot g$ gerade und $5 \cdot u$ ungerade und folglich $4 \cdot u + 5 \cdot g$ eine ungerade Zahl.

Hieraus folgt die Lösung der **Aufgabe 3.7a)**:
Wenn die genannte **Summe gerade** ist, dann ist in der **linken Hand die ungerade Anzahl** von Kugeln.

Wenn die genannte **Summe ungerade** ist, dann ist in der **linken Hand die gerade Anzahl** von Kugeln.

Die **Aufgabe 3.7b)** lässt sich durch ***Vorwärtsarbeiten*** und ***systematisches Probieren*** lösen.
Wenn die (gerade) Summe 60 genannt wird, dann weiß man, dass sich in der linken Hand eine ungerade Anzahl von Kugeln und in der rechten Hand eine gerade Anzahl von Kugeln befindet.
Folglich muss $4 \cdot u + 5 \cdot g = 60$ gelten.
In der folgenden ***Tabelle*** werden ***alle möglichen Fälle*** erfasst und geprüft, in welchen Fällen die Summe 60 entstehen kann.

linke Hand	$4 \cdot u$	4, 12, **20**, 28, 36, 44, 52, 60, ...
rechte Hand	$5 \cdot g$	10, 20, 30, **40**, 50, 60, ...

Dies kann nur für $4 \cdot u = 20$ und $5 \cdot g = 40$. also für $\mathbf{u = 5}$ imd $\mathbf{g = 8}$ eintreten.
Folglich hatte Frank in der **linken Hand 5 Kugeln** und in der **rechten Hand 8 Kugeln**.

Probe: $4 \cdot 5 = 20$ und $5 \cdot 8 = 40$ und $20 + 40 = 60$.

Auf die recht schwierige **Aufgabe 8.7)** sind wir bereits in den Abschnitten 5.1. und 5.4. eingegangen.
Wenn man die Anzahl der Kühe mit k und die Anzahl der Ziegen mit z bezeichnet, dann kann man die gegebenen ***Bedingungen in die Sprache der Gleichungen übersetzen***:

$$3 \cdot k + 4 \cdot z = 108$$
$$7 \cdot k + 6 \cdot z = 212$$

Wer das Umformen von Gleichungen beherrscht, kann diese Aufgabe leicht lösen. Es wäre jedoch wenig sinnvoll, Schülern der Klasse 3 bereits diese Technik beibringen zu wollen, selbst wenn dies bei begabten Schülern nicht schwer fallen würde.
Die *heuristischen Potenzen* dieser Aufgabe liegen vielmehr darin, dass man hier sowohl das ***Einführen günstiger Bezeichnungen*** als auch das ***systematische Probieren*** und das inhaltliche Lösen durch ***Folgern aus den gegebenen Bedingungen*** üben kann.
Auch hierbei dienen die Gleichungen nur einem verkürzten Festhalten der in der Wortsprache durchgeführten Folgerungen.

2. Lösungsweg:

- Was lässt sich aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar folgern? Begründe!
  - ° Was kosten 10 Kühe und 10 Ziegen zusammen?
    [(108 + 212 =) 320 Taler; 3 + 7 = 4 + 6 = 10 ,]
- Was lässt sich nun unmittelbar folgern? Begründe!
  - ° Was kosten 1 Kuh und 1 Ziege zusammen? [(320 **:** 10 =) 32 Taler.]
  - ° Was kosten 3 Kühe und 3 Ziegen zusammen? [($3 \cdot 32$ =) 96 Taler.]
  - ° Was kostet eine Ziege?
    - **:** Beachte, dass 3 Kühe und 4 Ziegen 108 Taler kosten!
      [(108 - 96 =) **12 Taler**.]
  - ° Was kostet eine Kuh?

53

Wenn die genannte **Summe ungerade** ist, dann ist in der **linken Hand die gerade Anzahl** von Kugeln.

Die **Aufgabe 3.7b)** lässt sich durch ***Vorwärtsarbeiten*** und ***systematisches Probieren*** lösen.
Wenn die (gerade) Summe 60 genannt wird, dann weiß man, dass sich in der linken Hand eine ungerade Anzahl von Kugeln und in der rechten Hand eine gerade Anzahl von Kugeln befindet.
Folglich muss $4 \cdot u + 5 \cdot g = 60$ gelten.
In der folgenden ***Tabelle*** werden ***alle möglichen Fälle*** erfasst und geprüft, in welchen Fällen die Summe 60 entstehen kann.

linke Hand	$4 \cdot u$	4, 12, **20**, 28, 36, 44, 52, 60, ...
rechte Hand	$5 \cdot g$	10, 20, 30, **40**, 50, 60, ...

Dies kann nur für $4 \cdot u = 20$ und $5 \cdot g = 40$. also für $\mathbf{u = 5}$ imd $\mathbf{g = 8}$ eintreten.
Folglich hatte Frank in der **linken Hand 5 Kugeln** und in der **rechten Hand 8 Kugeln**.

Probe: $4 \cdot 5 = 20$ und $5 \cdot 8 = 40$ und $20 + 40 = 60$.

Auf die recht schwierige **Aufgabe 8.7)** sind wir bereits in den Abschnitten 5.1. und 5.4. eingegangen.
Wenn man die Anzahl der Kühe mit k und die Anzahl der Ziegen mit z bezeichnet, dann kann man die gegebenen ***Bedingungen in die Sprache der Gleichungen übersetzen***:

$$3 \cdot k + 4 \cdot z = 108$$
$$7 \cdot k + 6 \cdot z = 212$$

Wer das Umformen von Gleichungen beherrscht, kann diese Aufgabe leicht lösen. Es wäre jedoch wenig sinnvoll, Schülern der Klasse 3 bereits diese Technik beibringen zu wollen, selbst wenn dies bei begabten Schülern nicht schwer fallen würde.
Die *heuristischen Potenzen* dieser Aufgabe liegen vielmehr darin, dass man hier sowohl das ***Einführen günstiger Bezeichnungen*** als auch das ***systematische Probieren*** und das inhaltliche Lösen durch ***Folgern aus den gegebenen Bedingungen*** üben kann.
Auch hierbei dienen die Gleichungen nur einem verkürzten Festhalten der in der Wortsprache durchgeführten Folgerungen.

2. Lösungsweg:

- Was lässt sich aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar folgern? Begründe!
  - ° Was kosten 10 Kühe und 10 Ziegen zusammen?
    [(108 + 212 =) 320 Taler; 3 + 7 = 4 + 6 = 10 ,]
- Was lässt sich nun unmittelbar folgern? Begründe!
  - ° Was kosten 1 Kuh und 1 Ziege zusammen? [(320 **:** 10 =) 32 Taler.]
  - ° Was kosten 3 Kühe und 3 Ziegen zusammen? [($3 \cdot 32$ =) 96 Taler.]
  - ° Was kostet eine Ziege?
    - **:** Beachte, dass 3 Kühe und 4 Ziegen 108 Taler kosten!
      [(108 - 96 =) **12 Taler**.]
  - ° Was kostet eine Kuh?

: Beachte, dass 1 Kuh und 1 Ziege 32 Taler kosten! [(32 - 12 =) **20 Taler**.]

- Probe! Antwortsatz!

Dabei kann der Lehrer diese inhaltlichen Schlüsse in Form von Gleichungen an der *Wandtafel* festhalten.

Analog kann man zu einem etwas umständlicheren ***3. Lösungsweg*** gelangen, der in Form von Gleichungen folgendermaßen festgehalten werden kann:

Gegeben:	(1)	$3\cdot k + 4\cdot z = 108$
also	(2)	$9\cdot k + 12\cdot z = 324$
Gegeben:	(3)	$7\cdot k + 6\cdot z = 212$
also	(4)	$14\cdot k + 12\cdot z = 424$
Vergleich von (2) und (4); also	(5)	$5\cdot k = 424 - 324$
also	(6)	$\mathbf{k = 20}$
also	(7)	$3\cdot k = 60$
Vergleich von (1) und (7); also	(8)	$4\cdot z = 108 - 60$
also	(9)	$\mathbf{z = 12}$

In Abschnitt 5.1. hatten wir gezeigt, wie sich die **Aufgabe 15.7)** in die ***Sprache der Gleichungen*** übersetzen lässt.
Die Ausgangssituation der im Gleichgewicht befindlichen Waage, auf deren linker Waagschale sich 5 leere und auf deren rechter Waagschale sich 2 volle Flaschen befinden, lässt sich durch die Gleichung $5\cdot l = 2\cdot v$ festhalten.

Die in **Teilaufgabe a)** beschriebene Situation lässt sich dann durch die Gleichung $3\cdot l + 2\cdot v = ?\cdot l + 2\cdot v$ festhalten, woraus offensichtlich $? = 3$ folgt.
Also muss Britta 3 leere Flaschen auf die rechte Waagschale stellen.

In **Teilaufgabe b)** ist zu entscheiden, ob $2\cdot l + 2\cdot v < 4\cdot l + 1\cdot v$ oder $2\cdot l + 2\cdot v > 4\cdot l + 1\cdot v$ gilt.
Nun können die Schüler erkennen, welche Vorteile diese abkürzende und übersichtliche Sprache der Gleichungen bietet.
Nimmt man auf beiden Seiten 2 leere und 1 volle Flasche weg, dann ist zu entscheiden, ob $v < 2\cdot l$ oder $v > 2\cdot l$ gilt.
Ein Vergleich mit der Ausgangssituation $2\cdot v = 5\cdot l$ zeigt, dass $v < 2\cdot l$ und damit auch $2\cdot l + 2\cdot v < 4\cdot l + 1\cdot v$ gelten muss.
Also neigt sich die linke Waagschale nach unten.

Die **Teilaufgabe c)** lässt sich ***analog*** lösen.

54

: Beachte, dass 1 Kuh und 1 Ziege 32 Taler kosten! [(32 - 12 =) **20 Taler**.]

- Probe! Antwortsatz!

Dabei kann der Lehrer diese inhaltlichen Schlüsse in Form von Gleichungen an der *Wandtafel* festhalten.

Analog kann man zu einem etwas umständlicheren ***3. Lösungsweg*** gelangen, der in Form von Gleichungen folgendermaßen festgehalten werden kann:

Gegeben:	(1)	$3\cdot k + 4\cdot z = 108$
also	(2)	$9\cdot k + 12\cdot z = 324$
Gegeben:	(3)	$7\cdot k + 6\cdot z = 212$
also	(4)	$14\cdot k + 12\cdot z = 424$
Vergleich von (2) und (4); also	(5)	$5\cdot k = 424 - 324$
also	(6)	$\mathbf{k = 20}$
also	(7)	$3\cdot k = 60$
Vergleich von (1) und (7); also	(8)	$4\cdot z = 108 - 60$
also	(9)	$\mathbf{z = 12}$

In Abschnitt 5.1. hatten wir gezeigt, wie sich die **Aufgabe 15.7)** in die ***Sprache der Gleichungen*** übersetzen lässt.
Die Ausgangssituation der im Gleichgewicht befindlichen Waage, auf deren linker Waagschale sich 5 leere und auf deren rechter Waagschale sich 2 volle Flaschen befinden, lässt sich durch die Gleichung $5\cdot l = 2\cdot v$ festhalten.

Die in **Teilaufgabe a)** beschriebene Situation lässt sich dann durch die Gleichung $3\cdot l + 2\cdot v = ?\cdot l + 2\cdot v$ festhalten, woraus offensichtlich $? = 3$ folgt.
Also muss Britta 3 leere Flaschen auf die rechte Waagschale stellen.

In **Teilaufgabe b)** ist zu entscheiden, ob $2\cdot l + 2\cdot v < 4\cdot l + 1\cdot v$ oder $2\cdot l + 2\cdot v > 4\cdot l + 1\cdot v$ gilt.
Nun können die Schüler erkennen, welche Vorteile diese abkürzende und übersichtliche Sprache der Gleichungen bietet.
Nimmt man auf beiden Seiten 2 leere und 1 volle Flasche weg, dann ist zu entscheiden, ob $v < 2\cdot l$ oder $v > 2\cdot l$ gilt.
Ein Vergleich mit der Ausgangssituation $2\cdot v = 5\cdot l$ zeigt, dass $v < 2\cdot l$ und damit auch $2\cdot l + 2\cdot v < 4\cdot l + 1\cdot v$ gelten muss.
Also neigt sich die linke Waagschale nach unten.

Die **Teilaufgabe c)** lässt sich ***analog*** lösen.

5.6. Rückwärtsarbeiten und "Von rückwärts her rechnen"

Das ***Rückwärtsarbeiten*** wird durch folgende ***Impulse*** charakterisiert:

- Betrachte das Gesuchte! Woraus ließe es sich unmittelbar berechnen? Begründe!

Diese Strategie wird in höheren Klassenstufen eine sehr wichtige Rolle spielen.
In Klasse 3 lässt sie sich bisweilen beim Suchen nach einem Lösungsweg einsetzen.

Bei **Aufgabe 9.5)** ist eine Ankunftszeit zu ermitteln.

- Woraus ließe sich die gesuchte Ankunftszeit unmittelbar berechnen?
  [Aus der Gesamtzeit, die seit der Abfahrt vergangen ist; Addition zur Abfahrtzeit.]
- Woraus ließe sich diese Gesamtzeit berechnen? Begründe!
  [Aus der Fahrzeit und der Pausenzeit; Addition dieser Zeiten.]
- Wie läßt sich die Pausenzeit aus dem Gegebenen ermitteln?
  [Addition von gegebenen Zeiten.]
- Wie lässt sich die Fahrzeit aus dem Gegebenen berechnen?
  - Was ist noch gegeben und nicht verwendet worden?
    [Die Durchschnittsgeschwindigkeit.]

Der so gewonnene ***Lösungsplan*** ist in der ***linken Tabelle***, ***Resultat und Lösungsweg*** sind in der ***rechten Tabelle*** festgehalten. Einige ***Nebenrechnungen*** wurden ebenfalls in den betreffenden Zeilen festgehalten.

Abfahrt	14.35 Uhr
Ankunft	$\boxed{}$
Pausenzeit	
Fahrzeit	
Gesamtzeit	

35 min + 55 min = 1 h 20 min

3·15 min + 40 min = 85 min
85 min = 1 h 25 min

Abfahrt	14.35 Uhr
Ankunft	**23.20 Uhr**
Pausenzeit	1 h 25 min
Fahrzeit	7 h 30 min
Gesamtzeit	8 h 55 min

Weg	Zeit
100 km	1 Stunde
750 km	? Stunden

Weg	Zeit
100 km	1 Stunde
750 km	$7\frac{1}{2}$ Stunden

Das ***"Von rückwärts her rechnen"*** darf mit dem *Rückwärtsarbeiten* nicht verwechselt werden. Hier geht es nicht um das Suchen nach hinreichenden Teilzielen, speziell von Hilfsgrößen, sondern es wird ein gegebener Rechenweg umgekehrt durchlaufen, wobei man jeweils die "entgegengesetzte" Rechenoperation anwendet.
Bei solchen Aufgaben sollte man stets eine ***Probe*** verlangen.

Bei **Aufgabe 8.6)** muss man zunächst in einer Nebenrechnung (mündlich) "die Hälfte der Differenz aus der größten dreistelligen und der größten zweistelligen Zahl" berechnen, also (999 - 99):2 = 450.

Die Rechnung lautet dann:
182:7 = 26; 26 + 33 = 59; 59·9 = 531; 531 - 450 = 81 ; 81·4 = 324.

Die gedachte Zahl lautet **324** .

Probe: 324:4 = 81; 81+ 450 = 531; 531:9 = 59; 59 - 33 = 26; 26·7 = 182 .

Analog lassen sich die leichteren **Aufgaben 4.6)**, und **6.6)** lösen.

55

5.6. Rückwärtsarbeiten und "Von rückwärts her rechnen"

Das Rückwärtsarbeiten wird durch folgende Impulse charakterisiert:
- Betrachte das Gesuchte! Woraus ließe es sich unmittelbar berechnen? Begründe!
Diese Strategie wird in höheren Klassenstufen eine sehr wichtige Rolle spielen.
In Klasse 3 lässt sie sich bisweilen beim Suchen nach einem Lösungsweg einsetzen.

Bei Aufgabe 9.5) ist eine Ankunftszeit zu ermitteln.
- Woraus ließe sich die gesuchte Ankunftszeit unmittelbar berechnen?
[Aus der Gesamtzeit, die seit der Abfahrt vergangen ist; Addition zur Abfahrtzeit.]
- Woraus ließe sich diese Gesamtzeit berechnen? Begründe!
[Aus der Fahrzeit und der Pausenzeit; Addition dieser Zeiten.]
- Wie läßt sich die Pausenzeit aus dem Gegebenen ermitteln?
[Addition von gegebenen Zeiten.]
- Wie lässt sich die Fahrzeit aus dem Gegebenen berechnen?
° Was ist noch gegeben und nicht verwendet worden?
[Die Durchschnittsgeschwindigkeit.]
Der so gewonnene Lösungsplan ist in der linken Tabelle, Resultat und Lösungsweg sind in der rechten Tabelle festgehalten. Einige Nebenrechnungen wurden ebenfalls in den betreffenden Zeilen festgehalten.

Abfahrt 14.35 Uhr; Ankunft; Pausenzeit; Fahrzeit; Gesamtzeit
35 min + 55 min = 1 h 20 min
3·15 min + 40 min = 85 min
85 min = 1 h 25 min
Abfahrt 14.35 Uhr; Ankunft 23.20 Uhr; Pausenzeit 1 h 25 min; Fahrzeit 7 h 30 min; Gesamtzeit 8 h 55 min
Weg Zeit; 100 km 1 Stunde; 750 km ? Stunden
Weg Zeit; 100 km 1 Stunde; 750 km 7 1/2 Stunden

Das "Von rückwärts her rechnen" darf mit dem Rückwärtsarbeiten nicht verwechselt werden. Hier geht es nicht um das Suchen nach hinreichenden Teilzielen, speziell von Hilfsgrößen, sondern es wird ein gegebener Rechenweg umgekehrt durchlaufen, wobei man jeweils die "entgegengesetzte" Rechenoperation anwendet.
Bei solchen Aufgaben sollte man stets eine Probe verlangen.

Bei Aufgabe 8.6) muss man zunächst in einer Nebenrechnung (mündlich) "die Hälfte der Differenz aus der größten dreistelligen und der größten zweistelligen Zahl" berechnen, also (999 - 99):2 = 450.
Die Rechnung lautet dann:
182:7 = 26; 26 + 33 = 59; 59·9 = 531; 531 - 450 = 81 ; 81·4 = 324.
Die gedachte Zahl lautet 324 .
Probe: 324:4 = 81; 81+ 450 = 531; 531:9 = 59; 59 - 33 = 26; 26·7 = 182 .
Analog lassen sich die leichteren Aufgaben 4.6), und 6.6) lösen.

5.7. Das Entdecken von Gesetzmäßigkeiten

Für das Entdecken von Gesetzmäßigkeiten bedarf es einer gewissen ***"Findigkeit"***. Einschlägige Aufgaben gestatten es daher besonders gut, Rückschlüsse auf vorhandene ***Begabungspotenzen*** bei den Schülern zu ziehen.
Ab Klasse 6 kann man von Schülern verlangen, vermutete Gesetzmäßigkeiten auch zu beweisen. Für Grundschüler kommt dies natürlich nicht in Frage. Sie sollten allerdings erfahren, dass derartige Vermutungen auch falsch sein können.

Folgende ***Impulse*** können bei derartigen Aufgaben eingesetzt werden:
- Suche nach einer Gesetzmäßigkeit!
- Überprüfe deine Vermutung anhand (mindestens) eines weiteren Beispiels!

In den **Aufgaben 2.4), 5.2)** und **14.3)** geht es um das ***Entdecken des Bildungsgesetzes einer Zahlenfolge***.
Hierbei sollte man niemals nur nach einer einzigen Zahl fragen und man sollte auch stets ein letztes Glied der Zahlenfolge angeben, das es gestattet, die vermutete Gesetzmäßigkeit nochmals zu überprüfen.
Da jeder Lehrer sehr leicht solche Aufgaben selbst bilden kann, haben wir darauf verzichtet, weitere solche Aufgaben in die Aufgabensammlung aufzunehmen.

In den **Aufgaben 1.5), 2.5)** und **13.5)** sind ***Bildungsgesetze für*** (linear oder quadratisch) angeordnete ***Figurenfolgen*** zu entdecken.
Eine Überprüfung der Vermutung anhand eines weiteren Beispiels ist hier allerdings nicht möglich.

In der **Aufgabe 10.7)** wird eine ***Folge von Figuren*** betrachtet, die aus kleinen Dreiecken zusammengesetzt sind. Die Schüler sollen *Gesetzmäßigkeiten entdecken*, die es gestatten, jeweils die ***Anzahl*** dieser Dreiecke zu berechnen.
Zum günstigsten Lösungsweg führen folgende ***Impulse***:
- Wie viele kleine Dreiecke kommen beim Übergang zur nächsten Figur jeweils dazu?
  - ° Welche Zahlen muss man addieren, um die Anzahl der kleinen Dreiecke zu erhalten, aus denen die nächste Figur besteht?
- Wie könnte man die Gesamtanzahl der kleinen Dreiecke, aus denen eine solche Figur besteht, sehr rasch berechnen, ohne die Anzahl von kleinen Dreiecken zu kennen, aus denen die vorangegangene Figur besteht?
  - ° Welche gemeinsame Eigenschaft haben diese Anzahlen?

Es gilt $x = 1 + 3 = 4$; $y = 4 + 5 = 9$; $z = 9 + 7 = 16$.
Man muss zur Anzahl der jeweils schon vorhandenen Dreiecke 3, 5, 7, ..., d.h. die nächst größere ungerade Zahl addieren.
Vermutung: Die Gesamtanzahl der kleinen Dreiecke ist stets eine Quadratzahl, also müsste das vierte große Dreieck 25, das fünfte große Dreieck 36 kleine Dreiecke enthalten, usw.
Eine ***weitere Gesetzmäßigkeit*** kann man entdecken, wenn man die Summen ausführlich hinschreibt: $1 + 3 + 5 = 9$; $1 + 3 + 5 + 7 = 16$;
Vermutung: Jede solche Summe aus ungeraden Zahlen ist eine Quadratzahl.
Die ***Überprüfung*** der Vermutung anhand weiterer Beispiele erhärtet diese Vermutung (beweist sie aber nicht).

56

5.7. Das Entdecken von Gesetzmäßigkeiten

Für das Entdecken von Gesetzmäßigkeiten bedarf es einer gewissen ***"Findigkeit"***. Einschlägige Aufgaben gestatten es daher besonders gut, Rückschlüsse auf vorhandene ***Begabungspotenzen*** bei den Schülern zu ziehen.
Ab Klasse 6 kann man von Schülern verlangen, vermutete Gesetzmäßigkeiten auch zu beweisen. Für Grundschüler kommt dies natürlich nicht in Frage. Sie sollten allerdings erfahren, dass derartige Vermutungen auch falsch sein können.

Folgende ***Impulse*** können bei derartigen Aufgaben eingesetzt werden:
- Suche nach einer Gesetzmäßigkeit!
- Überprüfe deine Vermutung anhand (mindestens) eines weiteren Beispiels!

In den **Aufgaben 2.4), 5.2)** und **14.3)** geht es um das ***Entdecken des Bildungsgesetzes einer Zahlenfolge***.
Hierbei sollte man niemals nur nach einer einzigen Zahl fragen und man sollte auch stets ein letztes Glied der Zahlenfolge angeben, das es gestattet, die vermutete Gesetzmäßigkeit nochmals zu überprüfen.
Da jeder Lehrer sehr leicht solche Aufgaben selbst bilden kann, haben wir darauf verzichtet, weitere solche Aufgaben in die Aufgabensammlung aufzunehmen.

In den **Aufgaben 1.5), 2.5)** und **13.5)** sind ***Bildungsgesetze für*** (linear oder quadratisch) angeordnete ***Figurenfolgen*** zu entdecken.
Eine Überprüfung der Vermutung anhand eines weiteren Beispiels ist hier allerdings nicht möglich.

In der **Aufgabe 10.7)** wird eine ***Folge von Figuren*** betrachtet, die aus kleinen Dreiecken zusammengesetzt sind. Die Schüler sollen *Gesetzmäßigkeiten entdecken*, die es gestatten, jeweils die ***Anzahl*** dieser Dreiecke zu berechnen.
Zum günstigsten Lösungsweg führen folgende ***Impulse***:
- Wie viele kleine Dreiecke kommen beim Übergang zur nächsten Figur jeweils dazu?
  - ° Welche Zahlen muss man addieren, um die Anzahl der kleinen Dreiecke zu erhalten, aus denen die nächste Figur besteht?
- Wie könnte man die Gesamtanzahl der kleinen Dreiecke, aus denen eine solche Figur besteht, sehr rasch berechnen, ohne die Anzahl von kleinen Dreiecken zu kennen, aus denen die vorangegangene Figur besteht?
  - ° Welche gemeinsame Eigenschaft haben diese Anzahlen?

Es gilt $x = 1 + 3 = 4$; $y = 4 + 5 = 9$; $z = 9 + 7 = 16$.
Man muss zur Anzahl der jeweils schon vorhandenen Dreiecke 3, 5, 7, ..., d.h. die nächst größere ungerade Zahl addieren.
Vermutung: Die Gesamtanzahl der kleinen Dreiecke ist stets eine Quadratzahl, also müsste das vierte große Dreieck 25, das fünfte große Dreieck 36 kleine Dreiecke enthalten, usw.
Eine ***weitere Gesetzmäßigkeit*** kann man entdecken, wenn man die Summen ausführlich hinschreibt: $1 + 3 + 5 = 9$; $1 + 3 + 5 + 7 = 16$;
Vermutung: Jede solche Summe aus ungeraden Zahlen ist eine Quadratzahl.
Die ***Überprüfung*** der Vermutung anhand weiterer Beispiele erhärtet diese Vermutung (beweist sie aber nicht).

Auch hier sollte man die Schüler zunächst ***selbständig*** nach den hier vorkommenden Gesetzmäßigkeiten suchen lassen und nicht etwa sofort den oben angegebenen Lösungsweg ansteuern.
Andere Impulse können die Aufmerksamkeit in eine andere Richtung lenken und damit zu ***weiteren Gesetzmäßigkeiten*** führen, z.B:

° Jede Zeile hat ein schwarzes und ein weißes Dreieck mehr als die vorhergehende.
° Die Anzahl der weißen Dreiecke einer Figur ist gleich der Anzahl der schwarzen Dreiecke in der nächsten Figur.
° Die Anzahl der schwarzen Dreiecke in den Figuren beträgt 1, 3, 6, 10, ...
° Die Anzahl der weißen Dreiecke in den Figuren beträgt 3, 6, 10, 15, ...
° Man erhält jeweils das nächste Glied dieser Folge, wenn man 2, 3, 4, ... addiert.

Ferner sollte man auf die ***Analogie*** zu den Aufgaben aufmerksam machen, bei denen das ***Bildungsgesetz einer Zahlenfolge*** zu finden war.

Bei der **Aufgabe 12.7)** sollten die Schüler die ***Analogie*** zur Aufgabe 10.7) erkennen.
Analoges Vorgehen kann zur Erkenntnis führen, dass man beim Übergang zum nächsten Muster jeweils ein entsprechendes Vielfaches von 4 addieren muss.
Sollte ein Schüler selbständig versuchen, einen Zusammenhang mit den in Aufgabe 10.7) vorkommenden Quadratzahlen herzustellen und dabei entdecken, dass die Zahlen unserer Folge Summen von Quadratzahlen sind, dann deutet dies auf hohe *Begabungspotenzen* hin.
In der Regel wird wohl der Lehrer die Schüler auffordern müssen, nach einem solchen Zusammenhang zu suchen.
Der so entdeckte ***2. Lösungsweg*** hat den Vorteil, dass man mit weitaus geringerem Rechenaufwand ans Ziel kommt.
Resultat und beide Lösungswege lassen sich wie folgt übersichtlich in folgender ***Tabelle*** an der ***Wandtafel*** festhalten:

		Anzahl der Kreuze	Anzahl der Kreuze
a)	1. Muster	1 = 1	1 = 1
	2. Muster	5 = 1 + 4	5 = 4 + 1
	3. Muster	13 = 5 + 8	13 = 9 + 4
	4. Muster	**25** = 13 + 12	**25** = 16 + 9
	5. Muster	**41** = 25 + 16	**41** = 25 + 16
b)	6. Muster	41 + 20 = **61**	25 + 36 = **61**
c)	7. Muster	61 + 24 = 85	... + 49 =
	8. Muster	85 + 28 = 113	... + 64 =
	9. Muster	113 + 32 = 145	... + 81 =
	10. Muster	145 + 36 = **181**	81 + 100 = **181**

In der **Aufgabe 99)** werden die Schüler zunächst aufgefordert drei Glieder einer Zahlenfolge nach einer gegebenen Vorschrift auszurechnen und in eine Tabelle einzutragen. Sie werden darauf aufmerksam gemacht, dass es dabei etwas Besonderes zu entdecken gibt.
Dies führt zunächst zu folgendem Resultat:

57

Auch hier sollte man die Schüler zunächst ***selbständig*** nach den hier vorkommenden Gesetzmäßigkeiten suchen lassen und nicht etwa sofort den oben angegebenen Lösungsweg ansteuern.
Andere Impulse können die Aufmerksamkeit in eine andere Richtung lenken und damit zu ***weiteren Gesetzmäßigkeiten*** führen, z.B:

° Jede Zeile hat ein schwarzes und ein weißes Dreieck mehr als die vorhergehende.
° Die Anzahl der weißen Dreiecke einer Figur ist gleich der Anzahl der schwarzen Dreiecke in der nächsten Figur.
° Die Anzahl der schwarzen Dreiecke in den Figuren beträgt 1, 3, 6, 10, ...
° Die Anzahl der weißen Dreiecke in den Figuren beträgt 3, 6, 10, 15, ...
° Man erhält jeweils das nächste Glied dieser Folge, wenn man 2, 3, 4, ... addiert.

Ferner sollte man auf die ***Analogie*** zu den Aufgaben aufmerksam machen, bei denen das ***Bildungsgesetz einer Zahlenfolge*** zu finden war.

Bei der **Aufgabe 12.7)** sollten die Schüler die ***Analogie*** zur Aufgabe 10.7) erkennen.
Analoges Vorgehen kann zur Erkenntnis führen, dass man beim Übergang zum nächsten Muster jeweils ein entsprechendes Vielfaches von 4 addieren muss.
Sollte ein Schüler selbständig versuchen, einen Zusammenhang mit den in Aufgabe 10.7) vorkommenden Quadratzahlen herzustellen und dabei entdecken, dass die Zahlen unserer Folge Summen von Quadratzahlen sind, dann deutet dies auf hohe *Begabungspotenzen* hin.
In der Regel wird wohl der Lehrer die Schüler auffordern müssen, nach einem solchen Zusammenhang zu suchen.
Der so entdeckte ***2. Lösungsweg*** hat den Vorteil, dass man mit weitaus geringerem Rechenaufwand ans Ziel kommt.
Resultat und beide Lösungswege lassen sich wie folgt übersichtlich in folgender ***Tabelle*** an der ***Wandtafel*** festhalten:

		Anzahl der Kreuze	Anzahl der Kreuze
a)	1. Muster	1 = 1	1 = 1
	2. Muster	5 = 1 + 4	5 = 4 + 1
	3. Muster	13 = 5 + 8	13 = 9 + 4
	4. Muster	**25** = 13 + 12	**25** = 16 + 9
	5. Muster	**41** = 25 + 16	**41** = 25 + 16
b)	6. Muster	41 + 20 = **61**	25 + 36 = **61**
c)	7. Muster	61 + 24 = 85	... + 49 =
	8. Muster	85 + 28 = 113	... + 64 =
	9. Muster	113 + 32 = 145	... + 81 =
	10. Muster	145 + 36 = **181**	81 + 100 = **181**

In der **Aufgabe 99)** werden die Schüler zunächst aufgefordert drei Glieder einer Zahlenfolge nach einer gegebenen Vorschrift auszurechnen und in eine Tabelle einzutragen. Sie werden darauf aufmerksam gemacht, dass es dabei etwas Besonderes zu entdecken gibt.
Dies führt zunächst zu folgendem Resultat:

Zahl	größte Zahl	kleinste Zahl	Differenz
182	821	128	821 - 128 = 693
693	963	369	963 - 369 = 594
594	954	459	954 - 459 = 495
495	954	459	954 - 459 = 495
495	954	459	954 - 459 = 495

Vermutlich dürften einige Schüler bemerken, dass man bereits nach der 4. Zeile hätte abbrechen können, weil bereits da klar war, dass alle weiteren Zahlen unserer "Zahlenkette" 495 lauten.
Die mit 768 beginnende Zahlenkette lautet 768, 198, 792, 693, 594, 495] . Dabei wird durch "] " festgehalten, dass sich ab hier die Zahl 495 wiederholt.
Durch das Betrachten weiterer Zahlenketten, die mit einer dreistelligen Zahl beginnen, bei der nicht alle drei Ziffern gleich sind, kommen die Schüler zu der *Vermutung*, dass alle derartige Ketten zu der Zahl 495 führen. (Falls eine zweistellige Zahl als Differenz auftritt, dann wähle man die 0 als Hunderterziffer.)

Weitere Vermutungen über die als Differenzen auftretenden Zahlen lauten:

° Die Zehnerziffer ist immer eine 9.

° Die Summe aus der Hunderter- und der Einerziffer ist ebenfalls stets eine 9.

Nun kann man die Schüler auffordern, *systematisch* alle dreistelligen Zahlen zu ermitteln, die als Differenzen auftreten können.
Es sind dies die Zahlen 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891.
Dazu kommt dann noch die (als 099 aufgefasste) Zahl 99.
Folglich kann - wenn unsere Vermutungen zutreffen - als zweites Glied einer solchen Zahlenkette nur eine dieser neun Zahlen auftauchen.
Nun kann man leicht nachweisen, dass jede dieser Zahlen als Anfangszahl genommen spätestens nach dem 5. Glied zur "Endzahl" 495 führt.

In der Aufgabe 4.7) sollen die Schüler die *"Übersetzungsvorschrift"* für eine (verschiedenartig angeordnete Figuren verwendende) "Geheimschrift" entdecken. Ein Schüler, der völlig selbständig die Lösung findet, dürfte über hohe *Begabungspotenzen* verfügen!

Folgende *Impulse* können hilfreich sein:

- Was wurde zur Verschlüsselung der jeweils aus drei Buchstaben bestehenden "Wörter" verwendet?
  [Drei verschiedene Figuren; 3 verschiedene Anzahlen; 3 verschiedene Anordnungen.]
- Suche nach Beziehungen zwischen den Buchstaben und den Figuren und ihrer Anordnung!
  ° Was haben alle Wörter gemeinsam, die durch Vierecke ausgedrückt sind?
  [Sie enthalten den Anfangsbuchstaben Z.]
  ° Woran erkennt man, dass ein Wort den Mittelbuchstaben E enthält?
  [Es kommen 4 Figuren vor.]
  ° Woran erkennt man, dass ein Wort den Endbuchstaben M besitzt?
  [Die Figuren sind schräg angeordnet.]

Die gesuchte *Übersetzungvorschrift* lautet:

58

Zahl	größte Zahl	kleinste Zahl	Differenz
182	821	128	821 - 128 = 693
693	963	369	963 - 369 = 594
594	954	459	954 - 459 = 495
495	954	459	954 - 459 = 495
495	954	459	954 - 459 = 495

Vermutlich dürften einige Schüler bemerken, dass man bereits nach der 4. Zeile hätte abbrechen können, weil bereits da klar war, dass alle weiteren Zahlen unserer "Zahlenkette" 495 lauten.
Die mit 768 beginnende Zahlenkette lautet 768, 198, 792, 693, 594, 495] . Dabei wird durch "] " festgehalten, dass sich ab hier die Zahl 495 wiederholt.
Durch das Betrachten weiterer Zahlenketten, die mit einer dreistelligen Zahl beginnen, bei der nicht alle drei Ziffern gleich sind, kommen die Schüler zu der *Vermutung*, dass alle derartige Ketten zu der Zahl 495 führen. (Falls eine zweistellige Zahl als Differenz auftritt, dann wähle man die 0 als Hunderterziffer.)

Weitere Vermutungen über die als Differenzen auftretenden Zahlen lauten:

° Die Zehnerziffer ist immer eine 9.

° Die Summe aus der Hunderter- und der Einerziffer ist ebenfalls stets eine 9.

Nun kann man die Schüler auffordern, *systematisch* alle dreistelligen Zahlen zu ermitteln, die als Differenzen auftreten können.
Es sind dies die Zahlen 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891.
Dazu kommt dann noch die (als 099 aufgefasste) Zahl 99.
Folglich kann - wenn unsere Vermutungen zutreffen - als zweites Glied einer solchen Zahlenkette nur eine dieser neun Zahlen auftauchen.
Nun kann man leicht nachweisen, dass jede dieser Zahlen als Anfangszahl genommen spätestens nach dem 5. Glied zur "Endzahl" 495 führt.

In der Aufgabe 4.7) sollen die Schüler die *"Übersetzungsvorschrift"* für eine (verschiedenartig angeordnete Figuren verwendende) "Geheimschrift" entdecken. Ein Schüler, der völlig selbständig die Lösung findet, dürfte über hohe *Begabungspotenzen* verfügen!

Folgende *Impulse* können hilfreich sein:

- Was wurde zur Verschlüsselung der jeweils aus drei Buchstaben bestehenden "Wörter" verwendet?
  [Drei verschiedene Figuren; 3 verschiedene Anzahlen; 3 verschiedene Anordnungen.]
- Suche nach Beziehungen zwischen den Buchstaben und den Figuren und ihrer Anordnung!
  ° Was haben alle Wörter gemeinsam, die durch Vierecke ausgedrückt sind?
  [Sie enthalten den Anfangsbuchstaben Z.]
  ° Woran erkennt man, dass ein Wort den Mittelbuchstaben E enthält?
  [Es kommen 4 Figuren vor.]
  ° Woran erkennt man, dass ein Wort den Endbuchstaben M besitzt?
  [Die Figuren sind schräg angeordnet.]

Die gesuchte *Übersetzungvorschrift* lautet:

Anfangsbuchstabe		Mittelbuchstabe		Endbuchstabe	
Vierecke	Z	4 Figuren	E	waagerecht	G
Dreiecke	W	3 Figuren	U	senkrecht	R
Kreise	D	2 Figuren	A	schräg	M

Die Übersetzung lautet: **DER WEG ZUM ZUG** .
Die Übersetzung von "WER WAR DER ZAR" in die Geheimschrift ist in Abschnitt 6.1. festgehalten.

59

Anfangsbuchstabe		Mittelbuchstabe		Endbuchstabe	
Vierecke	Z	4 Figuren	E	waagerecht	G
Dreiecke	W	3 Figuren	U	senkrecht	R
Kreise	D	2 Figuren	A	schräg	M

Die Übersetzung lautet: **DER WEG ZUM ZUG** .
Die Übersetzung von "WER WAR DER ZAR" in die Geheimschrift ist in Abschnitt 6.1. festgehalten.

5.8. Analogieprinzip, Problemtransformation und Zurückführen auf Hilfsaufgaben

Das im allgemeinen unbewusst angewendete ***Analogieprinzip*** sollte hin und wieder bei den Schülern ins Bewusstsein gehoben werden, indem man die Schüler auffordert, nach bereits gelösten Aufgaben aus den Aufgabenblättern oder der Aufgabensammlung zu suchen, die zur gestellten Aufgabe *"analog"* sind.
Die ***Aufgabenblätter*** und die ***Aufgabensammlung*** enthalten viele Aufgabengruppen mit analogen Aufgaben, z.B.:

- Das Ermitteln von Reihenfolgen und von Zuordnungen.
- Die mit Mengendiagrammen lösbaren Aufgaben.
- Die Aufgaben 10.2), 10.3), 11.3), 12.4) vom Typ $x + y = s$, $y = x + d$.
- Die Aufgaben 16.5), 58) 59) und die Aufgaben 11.2), 12.2), 13.2), 14.2), 14.7), 15.2), 16.2) bei denen es darauf ankommt, beim *Folgern aus gegebenen Bedingungen* eine günstige Reihenfolge zu finden.
- Die Aufgaben 4.6), 6.6), 8.6), bei denen *"Von rückwärts her rechnen"* zum Ziel führt.

Eng damit verwandt ist die ***Suche nach Hilfsaufgaben***, die beim Lösen der gestellten Aufgabe hilfreich sein können.
So sollte man etwa beim Lösen der **Aufgabe 3.4)** beobachten, welche Schüler von sich aus erkennen, dass die **Aufgabe 1.4)** fast denselben Inhalt hat:
Wenn man weiss, dass es genau 10 Möglichkeiten gibt, einen 10-DM-Schein mit (ausreichend vielen) 5-DM-Stücken, 2-DM-Stücken und 1-DM Stücken zu wechseln, dann kann man dies anwenden, um herauszubekommen, wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, einen Gegenstand, der 10 Pfennige kostet, mit (ausreichend vielen) 10-Pfennig-Münzen, 5-Pfennig-Münzen, 2-Pfennig-Münzen und 1-Pfennig-Münzen zu bezahlen. Man muss lediglich beachten, dass das Bezahlen mit einer 10-Pfennig-Münze als 11. Möglichkeit hinzukommt.

Es ist meist nur recht schwer zu erkennen, dass sich eine Aufgabe durch ***"Problemtransformation"***, d.h. durch ein ***geschicktes (äquivalentes) Umformulieren*** vereinfachen lässt.
Sollte ein Schüler von selbst dazu in der Lage sein, dann deutet dies auf eine hohe *Begabungspotenz* hin. In der Regel wird der Lehrer nachträglich auf eine solche Möglichkeit eingehen.
In **Aufgabe 5.6)** wird die Additionsaufgabe $111 + 777 + 999 = 20$ betrachtet und es wird verlangt, von den 9 Ziffern, aus denen die Summanden bestehen, 6 Ziffern so zu streichen, dass das Ergebnis "20" stimmt.
Sollten die meisten Schüler diese Aufgabe nicht selbständig lösen können, dann kann man beim ***gemeinsamen Behandeln*** folgende ***Impulse*** einsetzen:

- Lässt sich die Aufgabe vereinfachen?
  - ° Statt 6 von den 9 Ziffern wegzulassen, könnte man doch auch ... ?
    [Man kann 3 aus den 9 Ziffern auswählen.]
  - ° Welche Ziffern kommen hierfür nur in Frage?
    - : Wie lässt sich die 20 als Summe von Zahlen aus den gegebenen Ziffern darstellen?
      [$11 + 9 = 20$; $1 + 19 = 20$ liefert keine Lösung, da diese Gleichung nicht durch Streichen von Ziffern erhalten werden kann.]

60

5.8. Analogieprinzip, Problemtransformation und Zurückführen auf Hilfsaufgaben

Das im allgemeinen unbewusst angewendete Analogieprinzip sollte hin und wieder bei den Schülern ins Bewusstsein gehoben werden, indem man die Schüler auffordert, nach bereits gelösten Aufgaben aus den Aufgabenblättern oder der Aufgabensammlung zu suchen, die zur gestellten Aufgabe "analog" sind.
Die Aufgabenblätter und die Aufgabensammlung enthalten viele Aufgabengruppen mit analogen Aufgaben, z.B.:
- Das Ermitteln von Reihenfolgen und von Zuordnungen.
- Die mit Mengendiagrammen lösbaren Aufgaben.
- Die Aufgaben 10.2), 10.3), 11.3), 12.4) vom Typ $x + y = s$, $y = x + d$.
- Die Aufgaben 16.5), 58) 59) und die Aufgaben 11.2), 12.2), 13.2), 14.2), 14.7), 15.2), 16.2) bei denen es darauf ankommt, beim Folgern aus gegebenen Bedingungen eine günstige Reihenfolge zu finden.
- Die Aufgaben 4.6), 6.6), 8.6), bei denen "Von rückwärts her rechnen" zum Ziel führt.

Eng damit verwandt ist die Suche nach Hilfsaufgaben, die beim Lösen der gestellten Aufgabe hilfreich sein können.
So sollte man etwa beim Lösen der Aufgabe 3.4) beobachten, welche Schüler von sich aus erkennen, dass die Aufgabe 1.4) fast denselben Inhalt hat:
Wenn man weiss, dass es genau 10 Möglichkeiten gibt, einen 10-DM-Schein mit (ausreichend vielen) 5-DM-Stücken, 2-DM-Stücken und 1-DM Stücken zu wechseln, dann kann man dies anwenden, um herauszubekommen, wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, einen Gegenstand, der 10 Pfennige kostet, mit (ausreichend vielen) 10-Pfennig-Münzen, 5-Pfennig-Münzen, 2-Pfennig-Münzen und 1-Pfennig-Münzen zu bezahlen. Man muss lediglich beachten, dass das Bezahlen mit einer 10-Pfennig-Münze als 11. Möglichkeit hinzukommt.

Es ist meist nur recht schwer zu erkennen, dass sich eine Aufgabe durch "Problemtransformation", d.h. durch ein geschicktes (äquivalentes) Umformulieren vereinfachen lässt.
Sollte ein Schüler von selbst dazu in der Lage sein, dann deutet dies auf eine hohe Begabungspotenz hin. In der Regel wird der Lehrer nachträglich auf eine solche Möglichkeit eingehen.
In Aufgabe 5.6) wird die Additionsaufgabe $111 + 777 + 999 = 20$ betrachtet und es wird verlangt, von den 9 Ziffern, aus denen die Summanden bestehen, 6 Ziffern so zu streichen, dass das Ergebnis "20" stimmt.
Sollten die meisten Schüler diese Aufgabe nicht selbständig lösen können, dann kann man beim gemeinsamen Behandeln folgende Impulse einsetzen:
- Lässt sich die Aufgabe vereinfachen?
° Statt 6 von den 9 Ziffern wegzulassen, könnte man doch auch ... ?
[Man kann 3 aus den 9 Ziffern auswählen.]
° Welche Ziffern kommen hierfür nur in Frage?
: Wie lässt sich die 20 als Summe von Zahlen aus den gegebenen Ziffern darstellen?
[$11 + 9 = 20$; $1 + 19 = 20$ liefert keine Lösung, da diese Gleichung nicht durch Streichen von Ziffern erhalten werden kann.]

- Welche 6 Ziffern müssen also gestrichen werden? [Eine 1, drei 7, zwei 9.]

Bei diesem Vorgehen ist auch leicht zu sehen, dass die angegebene Lösung die *einzige* Lösung ist.

Von wesentlich höherem Schwierigkeitsgrad ist die **Aufgabe 5.7)**, vor allem dann, wenn ***alle*** Lösungen zu ermitteln sind. Es sind aus acht gegebenen Zahlen einige so auszuwählen, dass ihre Summe 100 beträgt.
Die Schüler sollten sich bereits daran gewöhnt haben, bei derartigen Auswahlaufgaben die gegebenen Elemente (in diesem Fall die Zahlen der Größe nach) zu ***ordnen***: { 11, 12, 13, 16, 18, 21, 25, 36 }.
Es ist möglich, dass dann einige Schüler etwa die Lösung 18 + 21 + 25 + 36 = 100 ***selbständig*** finden, es ist jedoch sehr unwahrscheinlich, dass ein Schüler in angemessener Zeit durch reines Probieren auch die restlichen drei Lösungen findet. Also wird man mit der ***gemeinsamen Arbeit*** beginnen:

- Lässt sich die Aufgabe vereinfachen?
  - ° Betrachte zunächst die Summe aus allen acht Zahlen! [152]
    - : Wie kann man das ausnützen? Wie sind wir bei Aufgabe 38) vorgegangen? [Wegen 152 = 100 + 52 kann man auch die folgende einfachere Aufgabe lösen:]

1. Hilfsaufgabe: Wähle aus den acht Zahlen solche mit der Summe 52 aus!
Erst wenn die meisten Schüler nach angemessener Zeit die vier Lösungen nicht finden konnten, wird man erneut mit der *gemeinsamen Arbeit* beginnen:

- Lässt sich die Hilfsaufgabe weiter vereinfachen?
  - ° Betrachte die Einerstellen der acht Zahlen!
    - : Welche Bedingung müssen sie erfüllen? [Summe 2 oder Summe 12]

2. Hilfsaufgabe: Wähle aus den Einerziffern { 1, 1, 2, 3, 5, 6, 6, 8 } solche aus, deren Summe 2 oder 12 beträgt!
Überprüfe, ob die zugehörigen Zahlen die Summe 52 besitzen!

- Wie kann man (systematisch) vorgehen, um keine zulässige Auswahlmöglichkeit zu vergessen?
  [Erst 2 Summanden, dann 3 Summanden usw. betrachten.]

Hier sollte man wiederholen und üben, wie man (***lexikografisch geordnet***) alle Paare, alle Tripel und alle Quadrupel aus den acht Einerziffern bildet.
Wiederum werden die Schüler aufgefordert, ***selbständig*** nach den Lösungen der 2. Hilfsaufgabe zu suchen.
Abschließend wird man den gesamten ***Lösungsplan*** nochmals wiederholen und die wichtigsten Resultate wie folgt an der ***Wandtafel*** festhalten:

1 + 1 = 2	11 + 21 < 52	Lösungen:
6 + 6 = 12	16 + 36 = 52	11 + 12 + 13 + 18 + 21 + 25 = 100
1 + 3 + 8 = 12	11 + 13 + 18 = 52	12 + 13 + 21 + 25 + 36 = 100
	21 + 13 + 18 > 52	
1 + 5 + 6 = 12	11 + 25 + 16 = 52	12 + 16 + 21 + 25 + 36 = 100
	sonst stets > 52	
1 + 2 + 3 + 6 = 12	**11 + 12 + 13 + 16 = 52**	**18 + 21 + 25 + 36 = 100**
	sonst stets > 52	

61

- Welche 6 Ziffern müssen also gestrichen werden? [Eine 1, drei 7, zwei 9.]

Bei diesem Vorgehen ist auch leicht zu sehen, dass die angegebene Lösung die *einzige* Lösung ist.

Von wesentlich höherem Schwierigkeitsgrad ist die **Aufgabe 5.7)**, vor allem dann, wenn ***alle*** Lösungen zu ermitteln sind. Es sind aus acht gegebenen Zahlen einige so auszuwählen, dass ihre Summe 100 beträgt.
Die Schüler sollten sich bereits daran gewöhnt haben, bei derartigen Auswahlaufgaben die gegebenen Elemente (in diesem Fall die Zahlen der Größe nach) zu ***ordnen***: { 11, 12, 13, 16, 18, 21, 25, 36 }.
Es ist möglich, dass dann einige Schüler etwa die Lösung 18 + 21 + 25 + 36 = 100 ***selbständig*** finden, es ist jedoch sehr unwahrscheinlich, dass ein Schüler in angemessener Zeit durch reines Probieren auch die restlichen drei Lösungen findet. Also wird man mit der ***gemeinsamen Arbeit*** beginnen:

- Lässt sich die Aufgabe vereinfachen?
  - ° Betrachte zunächst die Summe aus allen acht Zahlen! [152]
    - : Wie kann man das ausnützen? Wie sind wir bei Aufgabe 38) vorgegangen? [Wegen 152 = 100 + 52 kann man auch die folgende einfachere Aufgabe lösen:]

1. Hilfsaufgabe: Wähle aus den acht Zahlen solche mit der Summe 52 aus!
Erst wenn die meisten Schüler nach angemessener Zeit die vier Lösungen nicht finden konnten, wird man erneut mit der *gemeinsamen Arbeit* beginnen:

- Lässt sich die Hilfsaufgabe weiter vereinfachen?
  - ° Betrachte die Einerstellen der acht Zahlen!
    - : Welche Bedingung müssen sie erfüllen? [Summe 2 oder Summe 12]

2. Hilfsaufgabe: Wähle aus den Einerziffern { 1, 1, 2, 3, 5, 6, 6, 8 } solche aus, deren Summe 2 oder 12 beträgt!
Überprüfe, ob die zugehörigen Zahlen die Summe 52 besitzen!

- Wie kann man (systematisch) vorgehen, um keine zulässige Auswahlmöglichkeit zu vergessen?
  [Erst 2 Summanden, dann 3 Summanden usw. betrachten.]

Hier sollte man wiederholen und üben, wie man (***lexikografisch geordnet***) alle Paare, alle Tripel und alle Quadrupel aus den acht Einerziffern bildet.
Wiederum werden die Schüler aufgefordert, ***selbständig*** nach den Lösungen der 2. Hilfsaufgabe zu suchen.
Abschließend wird man den gesamten ***Lösungsplan*** nochmals wiederholen und die wichtigsten Resultate wie folgt an der ***Wandtafel*** festhalten:

1 + 1 = 2	11 + 21 < 52	Lösungen:
6 + 6 = 12	16 + 36 = 52	11 + 12 + 13 + 18 + 21 + 25 = 100
1 + 3 + 8 = 12	11 + 13 + 18 = 52	12 + 13 + 21 + 25 + 36 = 100
	21 + 13 + 18 > 52	
1 + 5 + 6 = 12	11 + 25 + 16 = 52	12 + 16 + 21 + 25 + 36 = 100
	sonst stets > 52	
1 + 2 + 3 + 6 = 12	**11 + 12 + 13 + 16 = 52**	**18 + 21 + 25 + 36 = 100**
	sonst stets > 52	

Bei der Aufgabe 6.7) kann man analog vorgehen. Hier wird man die Schüler von vornherein darauf orientieren, die *Aufgabe geschickt umzuformulieren*.
Von den (hier bereits geordneten) acht Zahlen 4, 8, 11, 12, 16, 23, 26, 38 sind einige so auszuwählen und von 100 zu subtrahieren, dass man als Ergebnis 1 erhält.
Dies ist zunächst gleichbedeutend damit, dass die Summe der ausgewählten Zahlen 99 betragen soll (*1. Hilfsaufgabe).*
Dies ist gleichbedeutend damit, dass man aus den gegebenen Zahlen einige aussondert, deren Summe (138 - 99 =) 39 beträgt (*2. Hilfsaufgabe*).
Dies ist gleichbedeutend damit, dass man aus den (hier bereits geordneten) acht Einerziffern {1, 2, 3, 4, 6, 6, 8, 8} einige aussondert, deren Summe 9 oder 19 beträgt und in jedem derartigen Fall nachprüft, ob die zugehörigen Zahlen die Summe 39 besitzen (*3. Hilfsaufgabe*).
Offensichtlich darf die Zahl 38 nicht zu den ausgewählten Zahlen gehören, also braucht man auch die zweite Einerziffer 8 nicht mit zu berücksichtigen.

Lösungsweg und *Lösung* lassen sich wie folgt an der *Wandtafel* festhalten:

1 + 8 = 9	11 + 8 < 38	Lösungen:
3 + 6 = 9	23 + 16 = 39	100 - (4+8+11+12+26+38) = 1
	23 + 26 > 39	
1 + 2 + 6 = 9	11 + 12 + 16 = 39	100 - (4+8+23+26+38) = 1
	11 + 12 + 26 > 39	
2 + 3 + 4 = 9	12 + 23 + 4 = 39	100 - (4+8+11+16+26+38) = 1
1 + 4 + 6 + 8 = 19	11 + 4 + 16 + 8 = 39	100 - (12 + 23 + 38) = 1
	11 + 4 + 26 + 8 > 39	

Die Aufgabe 7.6)enthält drei Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad. Dies hat den Vorteil, dass beim selbständigen Arbeiten die leistungsschwächeren Schüler die Chance haben, die leichte Teilaufgabe a) zu lösen, während die leistungsstärksten Schüler mit den restlichen Teilaufgaben hinreichend gefordert werden.
Statt vier bzw. fünf Zahlen durch Addition und Subtraktion so zu verbinden, dass man als Ergebnis die Zahl 0 erhält, kann man auch die geschickt umformulierte *Hilfsaufgabe* lösen, diese Zahlen in zwei Gruppen mit gleicher Summe zu zerlegen. Diese gemeinsame Summe ist gleich der halben Summe aller gegebenen Zahlen.

Bei Aufgabe 7.6a) lautet die Lösung der *Hilfsaufgabe*
12 + 40 = 23 + 29 (= 52),
woraus man als Lösung für die Ausgangsaufgabe
40 + 12 - 29 - 23 = 0 erhält.
Natürlich ist auch 29 + 23 - 40 - 12 eine Lösung und man kann durch Vertauschen der Summanden weitere Lösungen erhalten. Da dies nicht viel bringt, wurde bewusst darauf verzichtet, hier nach allen Lösungen zu fragen.

Bei Aufgabe 7.6b) erhält man 28 + 25 = 31 + 13 + 9 (= 53) als Lösung der *Hilfsaufgabe*.
Eine derartige Aufgabe besitzt keine Lösung, wenn die Summe aller gegebenen Zahlen eine ungerade Zahl und somit die halbe Summe keine natürliche Zahl ist.

Damit ist auch Aufgabe 7.6c) gelöst.

62

Bei der Aufgabe 6.7) kann man analog vorgehen. Hier wird man die Schüler von vornherein darauf orientieren, die *Aufgabe geschickt umzuformulieren*.
Von den (hier bereits geordneten) acht Zahlen 4, 8, 11, 12, 16, 23, 26, 38 sind einige so auszuwählen und von 100 zu subtrahieren, dass man als Ergebnis 1 erhält.
Dies ist zunächst gleichbedeutend damit, dass die Summe der ausgewählten Zahlen 99 betragen soll (*1. Hilfsaufgabe).*
Dies ist gleichbedeutend damit, dass man aus den gegebenen Zahlen einige aussondert, deren Summe (138 - 99 =) 39 beträgt (*2. Hilfsaufgabe*).
Dies ist gleichbedeutend damit, dass man aus den (hier bereits geordneten) acht Einerziffern {1, 2, 3, 4, 6, 6, 8, 8} einige aussondert, deren Summe 9 oder 19 beträgt und in jedem derartigen Fall nachprüft, ob die zugehörigen Zahlen die Summe 39 besitzen (*3. Hilfsaufgabe*).
Offensichtlich darf die Zahl 38 nicht zu den ausgewählten Zahlen gehören, also braucht man auch die zweite Einerziffer 8 nicht mit zu berücksichtigen.

Lösungsweg und *Lösung* lassen sich wie folgt an der *Wandtafel* festhalten:

1 + 8 = 9	11 + 8 < 38	Lösungen:
3 + 6 = 9	23 + 16 = 39	100 - (4+8+11+12+26+38) = 1
	23 + 26 > 39	
1 + 2 + 6 = 9	11 + 12 + 16 = 39	100 - (4+8+23+26+38) = 1
	11 + 12 + 26 > 39	
2 + 3 + 4 = 9	12 + 23 + 4 = 39	100 - (4+8+11+16+26+38) = 1
1 + 4 + 6 + 8 = 19	11 + 4 + 16 + 8 = 39	100 - (12 + 23 + 38) = 1
	11 + 4 + 26 + 8 > 39	

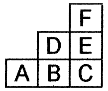
Die Aufgabe 7.6)enthält drei Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad. Dies hat den Vorteil, dass beim selbständigen Arbeiten die leistungsschwächeren Schüler die Chance haben, die leichte Teilaufgabe a) zu lösen, während die leistungsstärksten Schüler mit den restlichen Teilaufgaben hinreichend gefordert werden.
Statt vier bzw. fünf Zahlen durch Addition und Subtraktion so zu verbinden, dass man als Ergebnis die Zahl 0 erhält, kann man auch die geschickt umformulierte *Hilfsaufgabe* lösen, diese Zahlen in zwei Gruppen mit gleicher Summe zu zerlegen. Diese gemeinsame Summe ist gleich der halben Summe aller gegebenen Zahlen.

Bei Aufgabe 7.6a) lautet die Lösung der *Hilfsaufgabe*
12 + 40 = 23 + 29 (= 52),
woraus man als Lösung für die Ausgangsaufgabe
40 + 12 - 29 - 23 = 0 erhält.
Natürlich ist auch 29 + 23 - 40 - 12 eine Lösung und man kann durch Vertauschen der Summanden weitere Lösungen erhalten. Da dies nicht viel bringt, wurde bewusst darauf verzichtet, hier nach allen Lösungen zu fragen.

Bei Aufgabe 7.6b) erhält man 28 + 25 = 31 + 13 + 9 (= 53) als Lösung der *Hilfsaufgabe*.
Eine derartige Aufgabe besitzt keine Lösung, wenn die Summe aller gegebenen Zahlen eine ungerade Zahl und somit die halbe Summe keine natürliche Zahl ist.

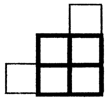
Damit ist auch Aufgabe 7.6c) gelöst.

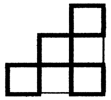
In **Aufgabe 13.7)** sind von den 18 Hölzern einer Figur, die aus 6 kleinen Quadraten besteht, eine gegebene Anzahl n (= 6, 5, 4, 2) von Hölzern zu entfernen, so dass man genau 4 kleine Quadrate erhält.

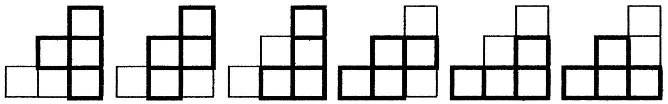


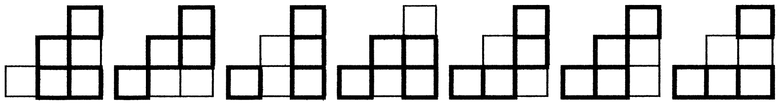
Zunächst sollen die Schüler diese Figur aus Hölzern herstellen und selbständig nach Lösungen der Teilaufgaben a) bis d) suchen. Dies bietet dem Lehrer die Möglichkeit, Leistungsvermögen und *Begabungspotenzen* der Schüler einzuschätzen.
Sehr schwer wird die Aufgabe, wenn man verlangt, jeweils ***alle*** Lösungen zu finden. Auch ein ***systematisches*** Suchen nach allen Möglichkeiten, 4 kleine Quadrate übrig zu lassen, dürfte kaum zu allen 6 Lösungen der Teilaufgabe b) und allen 7 Lösungen der Teilaufgabe c) führen.
Wann zwei Lösungen als verschieden anzusehen sind, wird im Aufgabentext erläutert.
Interessant ist auch die Frage, warum der Fall n = 3 nicht mit betrachtet wird. Dass es für n = 1 keine Lösung geben kann, ist offensichtlich. Dass auch für n > 6 keine Lösungen existieren können, kann man sich leicht überlegen.
Zum Ziel führt wiederum ein ***geschicktes Umformulieren*** der Aufgabe sowie das Lösen der folgenden

Hilfsaufgabe:
Ermittle jeweils alle Möglichkeiten, 2 Quadrate aus der Figur zu entfernen, so dass die gestellte Bedingung (Entfernung von n Hölzern) erfüllt ist.
Dabei ist es günstig - wie oben bereits geschehen - die 6 Quadrate mit A, B, C, D, E. F zu bezeichnen und dann jeweils systematisch die 15 Paare (A;B), (A;C), (A;D), ..., (D;F), (E;F) zu betrachten. Für jeden dieser Fälle ist dann festzustellen, wie viele Hölzer jeweils entfernt wurden, d.h. zu welcher Teilaufgabe dieser Fall eine Lösung liefert. Auf diese Weise erkennt man auch, dass es für n = 3 keine Lösung gibt.
Dieses Vorgehen führt zu folgenden *Lösungen* der vier Teilaufgaben, wobei die gesuchten 4 Quadrate "fett", die entfernten zwei Quadrate "normal" gezeichnet wurden.

a) 

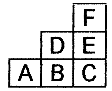
d) 

b) 

c) 

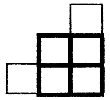
63

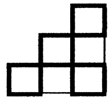
In **Aufgabe 13.7)** sind von den 18 Hölzern einer Figur, die aus 6 kleinen Quadraten besteht, eine gegebene Anzahl n (= 6, 5, 4, 2) von Hölzern zu entfernen, so dass man genau 4 kleine Quadrate erhält.

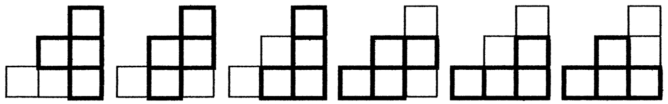


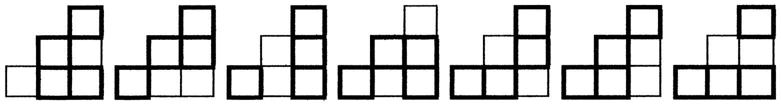
Zunächst sollen die Schüler diese Figur aus Hölzern herstellen und selbständig nach Lösungen der Teilaufgaben a) bis d) suchen. Dies bietet dem Lehrer die Möglichkeit, Leistungsvermögen und *Begabungspotenzen* der Schüler einzuschätzen.
Sehr schwer wird die Aufgabe, wenn man verlangt, jeweils ***alle*** Lösungen zu finden. Auch ein ***systematisches*** Suchen nach allen Möglichkeiten, 4 kleine Quadrate übrig zu lassen, dürfte kaum zu allen 6 Lösungen der Teilaufgabe b) und allen 7 Lösungen der Teilaufgabe c) führen.
Wann zwei Lösungen als verschieden anzusehen sind, wird im Aufgabentext erläutert.
Interessant ist auch die Frage, warum der Fall n = 3 nicht mit betrachtet wird. Dass es für n = 1 keine Lösung geben kann, ist offensichtlich. Dass auch für n > 6 keine Lösungen existieren können, kann man sich leicht überlegen.
Zum Ziel führt wiederum ein ***geschicktes Umformulieren*** der Aufgabe sowie das Lösen der folgenden

Hilfsaufgabe:
Ermittle jeweils alle Möglichkeiten, 2 Quadrate aus der Figur zu entfernen, so dass die gestellte Bedingung (Entfernung von n Hölzern) erfüllt ist.
Dabei ist es günstig - wie oben bereits geschehen - die 6 Quadrate mit A, B, C, D, E. F zu bezeichnen und dann jeweils systematisch die 15 Paare (A;B), (A;C), (A;D), ..., (D;F), (E;F) zu betrachten. Für jeden dieser Fälle ist dann festzustellen, wie viele Hölzer jeweils entfernt wurden, d.h. zu welcher Teilaufgabe dieser Fall eine Lösung liefert. Auf diese Weise erkennt man auch, dass es für n = 3 keine Lösung gibt.
Dieses Vorgehen führt zu folgenden *Lösungen* der vier Teilaufgaben, wobei die gesuchten 4 Quadrate "fett", die entfernten zwei Quadrate "normal" gezeichnet wurden.

a) 

d) 

b) 

c) 

5.9. "Findigkeit" beim Lösen von Aufgaben

Arbeitsgemeinschaften in Grundschulen dienen auch dem Zweck, frühzeitig ***hochbegabte Kinder zu entdecken*** mit dem Ziel, ihnen eine intensive Förderung anzubieten.

Solche Kinder zeichnen sich oft durch eine sehr hohe ***Geschwindigkeit im Produzieren von Lösungsideen*** *und im Finden von Lösungen* aus.
Daher sollte man die Schüler auffordern, sich stets sofort zu melden, wenn sie glauben, eine Lösung gefunden zu haben.

Folgende Aufgaben können eingesetzt werden, um diese Fähigkeiten zu testen:

- *Entdecken von Gesetzmäßigkeiten* in Zahlenfolgen und Figurenfolgen in den **Aufgaben 1.5), 2.4), 2.5), 5.2), 12.3), 13.5), 14.3), 14.5)**.
- Umlegen von Hölzern, so dass bestimmte Bedingungen erfüllt sind, in den **Aufgaben 12.6)**, **15.6)**, **98)**, **108)**, **109)**.
- Das Färben von Landkarten in den **Aufgaben 7.7)** und **9.7)**.
- Die **Aufgaben 3.2)** und **49)** über Schwestern und Brüder.
- Die **Aufgabe 65)** über "Spiegelzahlen".

Hochbegabte Kinder zeichnen sich auch durch das Finden brauchbarer Lösungsideen bei schweren Aufgaben aus.

Dies kann man mit folgenden Aufgaben testen:

- Geschicktes Umformulieren (Problemtransformation) bei den **Aufgaben 5.7), 6.7)** und **13.7)**.
- Die **Aufgabe 16.7)** über das Ermitteln gewisser vierstelliger Zahlen.
- Die Decodierungsaufgabe **4.7)**.
- Die **Aufgabe 2.7)** über das Finden von Wegen in einem Garten.

Diesbezüglich geeignet ist auch die **Aufgabe 9.6)**, in der gefragt wird, auf welchen Wochentag der Neujahrstag fällt, wenn es im Januar genau 4 Montage und genau 4 Freitage gab.
Vor allem bei derartigen Aufgaben sollte man den Schülern ***reichlich Zeit lassen, selbständig nach einer Lösung zu suchen***. Dabei sollte man beobachten, wie die leistungsstärksten Schüler dabei vorgehen.
Natürlich lässt sich diese Aufgabe mit *Vorwärtsarbeiten* bzw. *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* bewältigen. Sie ist aber nicht für ein "Training" dieser heuristischen Vorgehensweise geeignet, weil hier nur *"Findigkeit"* zur entscheidenden Lösungsidee führt:
Der Januar hat 31 Tage.
Wegen $31:7 = 4$, Rest 3 kommen die ersten 3 Wochentage im Januar fünfmal vor.
Folglich darf in den ersten drei Wochentagen weder ein Montag noch ein Freitag liegen.
Das ist nur dann der Fall, wenn das neue Jahr mit einem **Dienstag** beginnt.

64

5.9. "Findigkeit" beim Lösen von Aufgaben

Arbeitsgemeinschaften in Grundschulen dienen auch dem Zweck, frühzeitig hochbegabte Kinder zu entdecken mit dem Ziel, ihnen eine intensive Förderung anzubieten.

Solche Kinder zeichnen sich oft durch eine sehr hohe Geschwindigkeit im Produzieren von Lösungsideen und im Finden von Lösungen aus.
Daher sollte man die Schüler auffordern, sich stets sofort zu melden, wenn sie glauben, eine Lösung gefunden zu haben.

Folgende Aufgaben können eingesetzt werden, um diese Fähigkeiten zu testen:

- Entdecken von Gesetzmäßigkeiten in Zahlenfolgen und Figurenfolgen in den Aufgaben 1.5), 2.4), 2.5), 5.2), 12.3), 13.5), 14.3), 14.5).
- Umlegen von Hölzern, so dass bestimmte Bedingungen erfüllt sind, in den Aufgaben 12.6), 15.6), 98), 108), 109).
- Das Färben von Landkarten in den Aufgaben 7.7) und 9.7).
- Die Aufgaben 3.2) und 49) über Schwestern und Brüder.
- Die Aufgabe 65) über "Spiegelzahlen".

Hochbegabte Kinder zeichnen sich auch durch das Finden brauchbarer Lösungsideen bei schweren Aufgaben aus.

Dies kann man mit folgenden Aufgaben testen:

- Geschicktes Umformulieren (Problemtransformation) bei den Aufgaben 5.7), 6.7) und 13.7).
- Die Aufgabe 16.7) über das Ermitteln gewisser vierstelliger Zahlen.
- Die Decodierungsaufgabe 4.7).
- Die Aufgabe 2.7) über das Finden von Wegen in einem Garten.

Diesbezüglich geeignet ist auch die Aufgabe 9.6), in der gefragt wird, auf welchen Wochentag der Neujahrstag fällt, wenn es im Januar genau 4 Montage und genau 4 Freitage gab.
Vor allem bei derartigen Aufgaben sollte man den Schülern reichlich Zeit lassen, selbständig nach einer Lösung zu suchen. Dabei sollte man beobachten, wie die leistungsstärksten Schüler dabei vorgehen.
Natürlich lässt sich diese Aufgabe mit Vorwärtsarbeiten bzw. Folgern aus den gegebenen Bedingungen bewältigen. Sie ist aber nicht für ein "Training" dieser heuristischen Vorgehensweise geeignet, weil hier nur "Findigkeit" zur entscheidenden Lösungsidee führt:
Der Januar hat 31 Tage.
Wegen 31:7 = 4 , Rest 3 kommen die ersten 3 Wochentage im Januar fünfmal vor.
Folglich darf in den ersten drei Wochentagen weder ein Montag noch ein Freitag liegen.
Das ist nur dann der Fall, wenn das neue Jahr mit einem Dienstag beginnt.

6. LÖSUNGEN DER AUFGABEN

6.1. Lösungen zu den Aufgaben in den "Aufgabenblättern"

1.1) Quiz 1) a) ; 2) b) ; 3) c) ; 4) c) ; 5) a) ; 6) c) ; 7) alles gleich schwer
8) c) ; 9) a) ; 10 c) .

1.2) *Systematisches Probieren*: □ = **4**, **5**, **6**

1.3) *Vorwärtsarbeiten:*
45 € : 5 = 9 €. Ein Spiel kostet **9€** .
72€ : 9 € = 8. Für 72 € erhält man **8 Spiele**

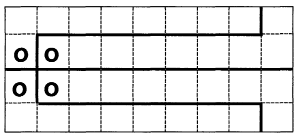
1.4) *Systematisches Ermitteln aller Möglichkeiten* :

5 €	2 €	1 €
2	**0**	**0**
1	**2**	**1**
1	**1**	**3**
1	**0**	**5**
0	**5**	**0**

5 €	2 €	1 €
0	**4**	**2**
0	**3**	**4**
0	**2**	**6**
0	**1**	**8**
0	**0**	**10**

1.5) Entdecken einer *Gesetzmäßigkeit*:
Die erste Zeile (und auch Spalte) enthält einen Kreis, ein Dreieck und ein Viereck.
Also muss auch in den übrigen Zeilen die jeweils fehlende Figur ersetzt werden.
Außerdem soll jede Zeile zwei schwarze und eine weiße Figur enthalten.
Es sind ein **schwarzer Kreis** (Mitte) und ein **schwarzes Dreieck** (unten) einzusetzen.

1.6) *"Findigkeit"*



2.1) Erstes *Ordnungsprinzip* ist die Stellenzahl:
83 □9□ 1000 345□1
□□□1 354□0
Zweites *Ordnungsprinzip* ist die Größe entsprechender Ziffern:
Da 1000 die kleinste vierstellige Zahl ist und 345□1 eine kleinere Tausenderstelle als 354□0 hat, ist die endgültige **Reihenfolge**
83 □9□ 1000 □□□1 345□1 354□0 .

65

6. LÖSUNGEN DER AUFGABEN

6.1. Lösungen zu den Aufgaben in den "Aufgabenblättern"

1.1) Quiz 1) a) ; 2) b) ; 3) c) ; 4) c) ; 5) a) ; 6) c) ; 7) alles gleich schwer
8) c) ; 9) a) ; 10 c) .

1.2) *Systematisches Probieren*: □ = **4**, **5**, **6**

1.3) *Vorwärtsarbeiten:*
45 € : 5 = 9 €. Ein Spiel kostet **9€** .
72€ : 9 € = 8. Für 72 € erhält man **8 Spiele**

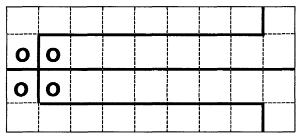
1.4) *Systematisches Ermitteln aller Möglichkeiten* :

5 €	2 €	1 €
2	**0**	**0**
1	**2**	**1**
1	**1**	**3**
1	**0**	**5**
0	**5**	**0**

5 €	2 €	1 €
0	**4**	**2**
0	**3**	**4**
0	**2**	**6**
0	**1**	**8**
0	**0**	**10**

1.5) Entdecken einer *Gesetzmäßigkeit*:
Die erste Zeile (und auch Spalte) enthält einen Kreis, ein Dreieck und ein Viereck.
Also muss auch in den übrigen Zeilen die jeweils fehlende Figur ersetzt werden.
Außerdem soll jede Zeile zwei schwarze und eine weiße Figur enthalten.
Es sind ein **schwarzer Kreis** (Mitte) und ein **schwarzes Dreieck** (unten) einzusetzen.

1.6) *"Findigkeit"*



2.1) Erstes *Ordnungsprinzip* ist die Stellenzahl:
83 □9□ 1000 345□1
□□□1 354□0
Zweites *Ordnungsprinzip* ist die Größe entsprechender Ziffern:
Da 1000 die kleinste vierstellige Zahl ist und 345□1 eine kleinere Tausenderstelle als 354□0 hat, ist die endgültige **Reihenfolge**
83 □9□ 1000 □□□1 345□1 354□0 .

2.2) *Systematisches Probieren:*

A	+	A	=	B	Die einzigen Zahlen, bei denen A + A das gleiche Ergebnis
+		·		-	wie A · A hat, sind 0 und 2 .
A	·	A	=	B	A darf jedoch nicht 0 sein, weil A und B verschieden sein
B	-	B	=	0	sollen.

Also gilt A = **2** und B = **4** .

Siehe auch Abschnitt 5.4., S. 41

2.3) *Ordnen der Größe nach*:

Ingo: 1,15 m; Steffen: 0,95m; Gerhard: 1,05 m; Paul 1,46 m - 0,50 m = 0,96 m .

Geordnet: 0,95 m < 0,96 m < 1,05 m < 1,15 m .

Reihenfolge: **S**teffen, **P**aul, **G**erhard, **I**ngo.

2.4) Entdecken von *Gesetzmäßigkeiten:*

a) 2 5 8 11 **14** **17** **20** 23 (jeweils + 3)

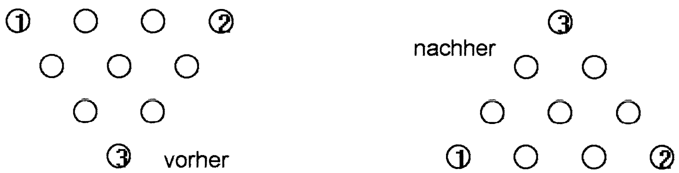
b) 4 **9** 14 19 24 **29** **34** 39 (jeweils + 5)

c) 2 5 11 **23** 47 95 **191** 383
(Es wird jeweils verdoppelt und 1 addiert bzw. die Differenzen 3, 6, 12, ... aufeinanderfolgender Zahlen verdoppeln sich.)

2.5) Entdecken einer *Gesetzmäßigkeit:*

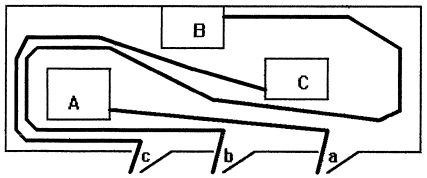
Die Figuren wurden fortlaufend um 90° gedreht.
Da dies bei der **5. Figur** nicht der Fall ist, gehört diese Figur nicht in diese Reihe.

2.6) *"Findigkeit"*



Man braucht nur **drei** Pfennige umzulegen.

2.7) *"Findigkeit"*



(Die zweite Möglichkeit ist spiegelbildlich. B kann auch zuerst um die Laube von C und dann um die Laube von A gehen.)

66

2.2) *Systematisches Probieren:*

A + A = B Die einzigen Zahlen, bei denen A + A das gleiche Ergebnis
+ · - wie A · A hat, sind 0 und 2 .
A · A = B A darf jedoch nicht 0 sein, weil A und B verschieden sein
B - B = 0 sollen.
Also gilt A = **2** und B = **4** .
Siehe auch Abschnitt 5.4., S. 41

2.3) *Ordnen der Größe nach*:

Ingo: 1,15 m; Steffen: 0,95m; Gerhard: 1,05 m; Paul 1,46 m - 0,50 m = 0,96 m .

Geordnet: 0,95 m < 0,96 m < 1,05 m < 1,15 m .

Reihenfolge: **S**teffen, **P**aul, **G**erhard, **I**ngo.

2.4) Entdecken von *Gesetzmäßigkeiten:*

a) 2 5 8 11 **14** **17** **20** 23 (jeweils + 3)

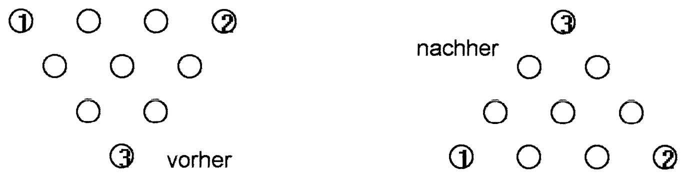
b) 4 **9** 14 19 24 **29** **34** 39 (jeweils + 5)

c) 2 5 11 **23** 47 95 **191** 383
(Es wird jeweils verdoppelt und 1 addiert bzw. die Differenzen 3, 6, 12, ... aufeinanderfolgender Zahlen verdoppeln sich.)

2.5) Entdecken einer *Gesetzmäßigkeit:*

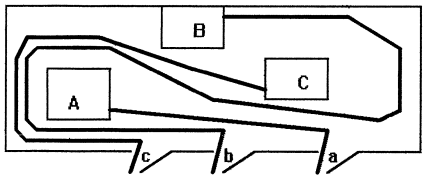
Die Figuren wurden fortlaufend um 90° gedreht.
Da dies bei der **5. Figur** nicht der Fall ist, gehört diese Figur nicht in diese Reihe.

2.6) *"Findigkeit"*



Man braucht nur **drei** Pfennige umzulegen.

2.7) *"Findigkeit"*



(Die zweite Möglichkeit ist spiegelbildlich. B kann auch zuerst um die Laube von C und dann um die Laube von A gehen.)

3.1) $17 + 16 = 33$; $33 \cdot 7 = 231$; $231 - 39 = 192$; $192:3 = 64$.

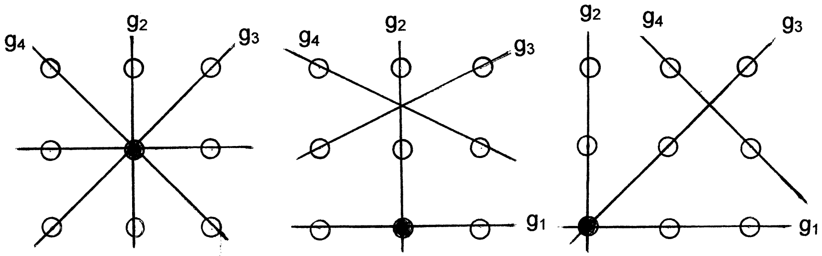
3.2) *"Findigkeit":*
Zur Familie gehören 6 Kinder (4 Jungen, 2 Mädchen).

3.3) Verwenden einer *Tabelle; Vorwärtsarbeiten:*
a) Markus benötigte 20 Minuten Fahrzeit.
b) Er fuhr um 7:35 Uhr los.
Probe am Text mit Hilfe der Tabelle! Siehe Abschnitt 5.5., S. 49

3.4) Verwenden einer *Hilfsaufgabe:.*
Peter hat recht, es gibt 11 Möglichkeiten.
Das sind die 10 Möglichkeiten, wie sie auch in Aufgabe 1.4) gesucht waren (dort in € statt in Cent), und als elfte Möglichkeit eine 10 Cent-Münze.

3.5) Einführen von *zweckmäßigen Bezeichnungen*, Ordnungsrelation:
Reihenfolge: Anne, Britta, Doris, Christa.
Probe am Text nicht vergessen! Siehe Abschnitt 5.1., S. 32

3.6) Neben der naheliegenden Lösung gibt es noch weitere, die *"Findigkeit"* verlangen.



3.7) *Fallunterscheidung; Vorwärtsarbeiten* und *systematisches Probieren:*
a) Wenn die genannte Summe gerade ist, dann sind in der linken Hand eine ungerade Anzahl von Kugeln.
b) Wenn die Zahl 60 genannt wird, dann sind in der linken Hand 20 Kugeln und in der rechten Hand 40 Kugeln. Siehe Abschnitt 5.5., S. 52

4.1) $65 - 36 = 29$; $29 \cdot 8 = 232$; $232:4 = 58$.
Die Multiplikation mit 8 nebst anschließender Division durch 4 lässt sich durch eine Multiplikation mit 2 ersetzen: $29 \cdot 2 = 58$.

4.2) *Vorwärtsarbeiten:*
30 € - 9 € = 21 €
21 € : 3 € = 7 — 7 Schüler brachten je 3 € mit.
7 + 1 = 8 — 8 Schüler waren an der Sammlung beteiligt.
Probe: $7 \cdot 3 + 9 = 30$

67

3.1) $17 + 16 = 33$; $33 \cdot 7 = 231$; $231 - 39 = 192$; $192:3 = 64$.

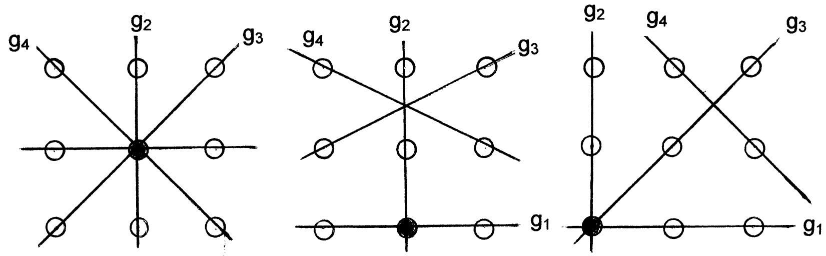
3.2) *"Findigkeit":*
Zur Familie gehören 6 Kinder (4 Jungen, 2 Mädchen).

3.3) Verwenden einer *Tabelle; Vorwärtsarbeiten:*
a) Markus benötigte 20 Minuten Fahrzeit.
b) Er fuhr um 7:35 Uhr los.
Probe am Text mit Hilfe der Tabelle! Siehe Abschnitt 5.5., S. 49

3.4) Verwenden einer *Hilfsaufgabe:.*
Peter hat recht, es gibt 11 Möglichkeiten.
Das sind die 10 Möglichkeiten, wie sie auch in Aufgabe 1.4) gesucht waren (dort in € statt in Cent), und als elfte Möglichkeit eine 10 Cent-Münze.

3.5) Einführen von *zweckmäßigen Bezeichnungen*, Ordnungsrelation:
Reihenfolge: Anne, Britta, Doris, Christa.
Probe am Text nicht vergessen! Siehe Abschnitt 5.1., S. 32

3.6) Neben der naheliegenden Lösung gibt es noch weitere, die *"Findigkeit"* verlangen.



3.7) *Fallunterscheidung; Vorwärtsarbeiten* und *systematisches Probieren:*
a) Wenn die genannte Summe gerade ist, dann sind in der linken Hand eine ungerade Anzahl von Kugeln.
b) Wenn die Zahl 60 genannt wird, dann sind in der linken Hand 20 Kugeln und in der rechten Hand 40 Kugeln. Siehe Abschnitt 5.5., S. 52

4.1) $65 - 36 = 29$; $29 \cdot 8 = 232$; $232:4 = 58$.
Die Multiplikation mit 8 nebst anschließender Division durch 4 lässt sich durch eine Multiplikation mit 2 ersetzen: $29 \cdot 2 = 58$.

4.2) *Vorwärtsarbeiten:*
30 € - 9 € = 21 €
21 € : 3 € = 7 — 7 Schüler brachten je 3 € mit.
7 + 1 = 8 — 8 Schüler waren an der Sammlung beteiligt.
Probe: $7 \cdot 3 + 9 = 30$

Probe: $7 \cdot 3 + 9 = 30$

4.3) Verwenden einer *Tabelle*; *Vorwärtsarbeiten:*
Es wurden 650 € verteilt.
Probe am Text mit Hilfe der Tabelle! Siehe Abschnitt 5.2., S. 35

4.4) *Systematisches Ermitteln aller Möglichkeiten; lexikografisches Ordnen:*
22, 27, 72, 77; 222, 227, 272, 277; 722, 727, 772, 777 .
Es gibt 12 derartige Zahlen.

4.5) Einführen von *zweckmäßigen Bezeichnungen*, Ordnungsrelation:

J ist Erste
T, S vor P
T vor S vor A
P vor A
→ J vor T vor S vor P vor A

Folgern aus gegebenen Bedingungen.
Wenn Jana als erste am Treffpunkt ist und Petra nach Thomas und Sven kommt, kann Petra bestenfalls vierte sein.
Weil sie eher als Anke ist, ist sie auch vierte und Anke fünfte.
Bisher ermittelte Reihenfolge: J __ __ P A .
Da Sven später als Thomas kommt, ist die Reihenfolge
1. Jana, 2. Thomas, 3. Sven, 4. Petra, 5. Anke.
Probe am Text nicht vergessen!

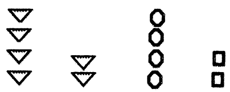
4.6) *"Von rückwärts her rechnen":*
325 - 133 = 192 ; 192 + 45 = 237 . Die gedachte Zahl heißt 237 .
Probe: 237 - 45 = 192 ; 192 + 133 = 325 . Siehe Abschnitt 5.6., S. 55

4.7) Entdecken einer *Gesetzmäßigkeit*.
a) Die gesuchte *Übersetzungvorschrift* lautet:

Anfangsbuchstabe		Mittelbuchstabe		Endbuchstabe	
Vierecke	Z	4 Figuren	E	waagerecht	G
Dreiecke	W	3 Figuren	U	senkrecht	R
Kreise	D	2 Figuren	A	schräg	M

b) Die *Übersetzung* lautet: DER WEG ZUM ZUG

c) "WER WAR DER ZAR"
lautet in der Geheimschrift:



Siehe Abschnitt 5.7., S. 58

68

Probe: $7 \cdot 3 + 9 = 30$

4.3) Verwenden einer *Tabelle*; *Vorwärtsarbeiten:*
Es wurden 650 € verteilt.
Probe am Text mit Hilfe der Tabelle! Siehe Abschnitt 5.2., S. 35

4.4) *Systematisches Ermitteln aller Möglichkeiten; lexikografisches Ordnen:*
22, 27, 72, 77; 222, 227, 272, 277; 722, 727, 772, 777 .
Es gibt 12 derartige Zahlen.

4.5) Einführen von *zweckmäßigen Bezeichnungen*, Ordnungsrelation:

J ist Erste
T, S vor P
T vor S vor A
P vor A
→ J vor T vor S vor P vor A

Folgern aus gegebenen Bedingungen.
Wenn Jana als erste am Treffpunkt ist und Petra nach Thomas und Sven kommt, kann Petra bestenfalls vierte sein.
Weil sie eher als Anke ist, ist sie auch vierte und Anke fünfte.
Bisher ermittelte Reihenfolge: J __ __ P A .
Da Sven später als Thomas kommt, ist die Reihenfolge
1. Jana, 2. Thomas, 3. Sven, 4. Petra, 5. Anke.
Probe am Text nicht vergessen!

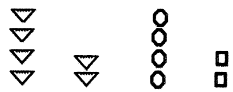
4.6) *"Von rückwärts her rechnen":*
325 - 133 = 192 ; 192 + 45 = 237 . Die gedachte Zahl heißt 237 .
Probe: 237 - 45 = 192 ; 192 + 133 = 325 . Siehe Abschnitt 5.6., S. 55

4.7) Entdecken einer *Gesetzmäßigkeit*.
a) Die gesuchte *Übersetzungvorschrift* lautet:

Anfangsbuchstabe		Mittelbuchstabe		Endbuchstabe	
Vierecke	Z	4 Figuren	E	waagerecht	G
Dreiecke	W	3 Figuren	U	senkrecht	R
Kreise	D	2 Figuren	A	schräg	M

b) Die *Übersetzung* lautet: DER WEG ZUM ZUG

c) "WER WAR DER ZAR"
lautet in der Geheimschrift:



Siehe Abschnitt 5.7., S. 58

5.1) $77 \cdot 9 = 693$; $39 \cdot 3 = 117$; $693 - 117 = 576$; $576 : 4 = 144$; $144 - 66 =$ **78** .

5.2) Entdecken von *Gesetzmäßigkeiten:*

a)	45	60	75	90	105	**120**	**135**	150	(jeweils + 15)
b)	103	90	77	64	51	**38**	**25**	12	(jeweils - 13)
c)	25	45	35	55	45	**65**	**55**	75	(abwechselnd +20 und - 10)

5.3) Verwenden einer *Tabelle; Folgern* aus gegebenen Bedingungen:
Der Kleinbus fuhr **750 km** .
Probe am Text mit Hilfe der Tabelle! Siehe Abschnitt 5.2., S. 36

5.4) *Systematisches Ermitteln aller Möglichkeiten; lexikografisches Ordnen:*
a) **6** verschiedene Reihenfolgen.
b) **24** verschiedene Reihenfolgen. Siehe Abschnitt 5.4., S. 41

5.5) Einführen von *zweckmäßigen Bezeichnungen;* Verwenden einer *Tabelle:*
Die Jungen heißen **K**laus **S**chulze, **D**ieter **L**ehmann und **R**ainer **M**üller.
Probe am Text nicht vergessen! Siehe Abschnitt 5.2., S. 37

5.6) *Umformulieren* der Aufgabe:
Gestrichen werden **eine "1", drei "7", zwei "9"** . Siehe Abschnitt 5.8., S. 60

5.7) *Zurückführen auf Hilfsaufgaben:*
$11 + 12 + 13 + 18 + 21 + 25 = 100$
$12 + 13 + 21 + 25 + 36 = 100$
$12 + 16 + 21 + 25 + 36 = 100$
$18 + 21 + 25 + 36 = 100$ Siehe Abschnitt 5.8., S. 61

6.1) *Systematisches Probieren:*
Es ist günstig, hier zunächst die durch 7 teilbaren Zahlen, die kleiner als 50 sind, zu betrachten, und aus diesen dann die ungeraden Zahlen auszusondern. Anschließend wird summiert.
$14 + 28 + 42 =$ **84**

6.2) *Folgern* aus gegebenen Bedingungen:
$36 : 4 = 9$ Es sind **9 Elektriker**.
$9 + 16 = 25$ (Elektriker und Maurer)
$36 - 25 = 11$ Es sind also **11 Dachdecker** auf der Baustelle.

6.3) Verwenden einer *Tabelle; Folgern* aus gegebenen Bedingungen.
Es waren **3** Köpfe und **8** Beine **unter** Wasser.
Es waren **5** Köpfe und **8** Beine **über** Wasser. Siehe Abschnitt 5.2., S. 34

69

5.1) $77 \cdot 9 = 693$; $39 \cdot 3 = 117$; $693 - 117 = 576$; $576 : 4 = 144$; $144 - 66 =$ **78** .

5.2) Entdecken von *Gesetzmäßigkeiten:*

a)	45	60	75	90	105	**120**	**135**	150	(jeweils + 15)
b)	103	90	77	64	51	**38**	**25**	12	(jeweils - 13)
c)	25	45	35	55	45	**65**	**55**	75	(abwechselnd +20 und - 10)

5.3) Verwenden einer *Tabelle; Folgern* aus gegebenen Bedingungen:
Der Kleinbus fuhr **750 km** .
Probe am Text mit Hilfe der Tabelle! Siehe Abschnitt 5.2., S. 36

5.4) *Systematisches Ermitteln aller Möglichkeiten; lexikografisches Ordnen:*
a) **6** verschiedene Reihenfolgen.
b) **24** verschiedene Reihenfolgen. Siehe Abschnitt 5.4., S. 41

5.5) Einführen von *zweckmäßigen Bezeichnungen;* Verwenden einer *Tabelle:*
Die Jungen heißen **K**laus **S**chulze, **D**ieter **L**ehmann und **R**ainer **M**üller.
Probe am Text nicht vergessen! Siehe Abschnitt 5.2., S. 37

5.6) *Umformulieren* der Aufgabe:
Gestrichen werden **eine "1", drei "7", zwei "9"** . Siehe Abschnitt 5.8., S. 60

5.7) *Zurückführen auf Hilfsaufgaben:*
$11 + 12 + 13 + 18 + 21 + 25 = 100$
$12 + 13 + 21 + 25 + 36 = 100$
$12 + 16 + 21 + 25 + 36 = 100$
$18 + 21 + 25 + 36 = 100$ Siehe Abschnitt 5.8., S. 61

6.1) *Systematisches Probieren:*
Es ist günstig, hier zunächst die durch 7 teilbaren Zahlen, die kleiner als 50 sind, zu betrachten, und aus diesen dann die ungeraden Zahlen auszusondern. Anschließend wird summiert.
$14 + 28 + 42 =$ **84**

6.2) *Folgern* aus gegebenen Bedingungen:
$36 : 4 = 9$ Es sind **9 Elektriker**.
$9 + 16 = 25$ (Elektriker und Maurer)
$36 - 25 = 11$ Es sind also **11 Dachdecker** auf der Baustelle.

6.3) Verwenden einer *Tabelle; Folgern* aus gegebenen Bedingungen.
Es waren **3** Köpfe und **8** Beine **unter** Wasser.
Es waren **5** Köpfe und **8** Beine **über** Wasser. Siehe Abschnitt 5.2., S. 34

6.4) *Systematisches Ermitteln aller Möglichkeiten; lexikografisches Ordnen:*
Es müssen (4 + 3 + 2 + 1 =) **10 Spiele** ausgetragen werden.
Siehe Abschnitt 5.4., S. 42

6.5) Einführen von *zweckmäßigen Bezeichnungen*; Verwenden einer *Tabelle:*
Hans ist der **S**chwimmer, **R**udi ist der **R**adfahrer, **S**teffen ist der **H**andballer.
Probe am Text nicht vergessen! Siehe Abschnitt 5.2., S. 37

6.6) *"Von rückwärts her rechnen"*
Größte zweistellige Zahl: 99 .
99 + 701 = 800 ; 800:5 = 160 ; 160 - 19 = 141 ; 141·4 = 564
Die gedachte Zahl lautet **564** .
Probe: 564:4 = 141 ; 141 + 19 = 160 ; 160·5 = 800 ; 800 - 701 = 99 .

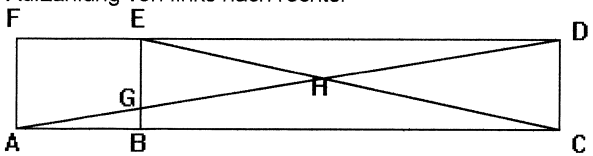
6.7) *Umformulieren* der Aufgabe; *Zurückführen auf Hilfsaufgaben:*
100 - (4 + 8 + 11 + 12 + 26 + 38) = 1
100 - (4 + 8 + 23 + 26 + 38) = 1
100 - (4 + 8 + 11 + 16 + 26 + 38) =1
100 - (12 + 23 + 38) = 1 Siehe Abschnitt 5.8., S. 62

7.1) Verwenden von *Variablen:*
x = 916 - 37 = 879 ; y = 888 - 99 = 789 ; x - y = 879 - 789 = **90** .

7.2) *Vorwärtsarbeiten:*
Für Schleier werden 20 · 1 m = 20 m Stoff gebraucht.
Übrig sind 50 m - 20 m = 30 m.
30 m **:** 15 = 2 m.
2 Meter Stoff waren für einen Umhang erforderlich.

7.3) *Systematisches Probieren:*
Es sind **2** Kaninchen und **3** Hühner. Siehe Abschnitt 5.4., S. 42

7.4) Anwenden von *Ordnungsprinzipien:*
Solche Ordnungsprinzipien könnten sein:
- lexikografisches (alphabetisches) Ordnen (zuerst alle Dreiecke mit A , usw.);
- Ordnen nach Größe (zuerst alle Grunddreiecke, dann aus 2, 3, ... Teilen zusammengesetzte Dreiecke);
- z. B. Aufzählung von links nach rechts.



70

6.4) *Systematisches Ermitteln aller Möglichkeiten; lexikografisches Ordnen:*
Es müssen (4 + 3 + 2 + 1 =) **10 Spiele** ausgetragen werden.
Siehe Abschnitt 5.4., S. 42

6.5) Einführen von *zweckmäßigen Bezeichnungen*; Verwenden einer *Tabelle:*
Hans ist der **S**chwimmer, **R**udi ist der **R**adfahrer, **S**teffen ist der **H**andballer.
Probe am Text nicht vergessen! Siehe Abschnitt 5.2., S. 37

6.6) *"Von rückwärts her rechnen"*
Größte zweistellige Zahl: 99 .
99 + 701 = 800 ; 800:5 = 160 ; 160 - 19 = 141 ; 141·4 = 564
Die gedachte Zahl lautet **564** .
Probe: 564:4 = 141 ; 141 + 19 = 160 ; 160·5 = 800 ; 800 - 701 = 99 .

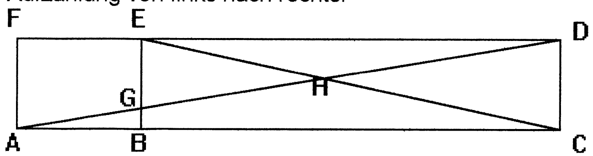
6.7) *Umformulieren* der Aufgabe; *Zurückführen auf Hilfsaufgaben:*
100 - (4 + 8 + 11 + 12 + 26 + 38) = 1
100 - (4 + 8 + 23 + 26 + 38) = 1
100 - (4 + 8 + 11 + 16 + 26 + 38) =1
100 - (12 + 23 + 38) = 1 Siehe Abschnitt 5.8., S. 62

7.1) Verwenden von *Variablen:*
x = 916 - 37 = 879 ; y = 888 - 99 = 789 ; x - y = 879 - 789 = **90** .

7.2) *Vorwärtsarbeiten:*
Für Schleier werden 20 · 1 m = 20 m Stoff gebraucht.
Übrig sind 50 m - 20 m = 30 m.
30 m **:** 15 = 2 m.
2 Meter Stoff waren für einen Umhang erforderlich.

7.3) *Systematisches Probieren:*
Es sind **2** Kaninchen und **3** Hühner. Siehe Abschnitt 5.4., S. 42

7.4) Anwenden von *Ordnungsprinzipien:*
Solche Ordnungsprinzipien könnten sein:
- lexikografisches (alphabetisches) Ordnen (zuerst alle Dreiecke mit A , usw.);
- Ordnen nach Größe (zuerst alle Grunddreiecke, dann aus 2, 3, ... Teilen zusammengesetzte Dreiecke);
- z. B. Aufzählung von links nach rechts.



Lexikografisch geordnet ergeben sich folgende Dreiecke:
ABG, ACD, ACH, ADF, BCE, CDE, CDH, DEG, DEH, EGH.
Es gibt in der Abbildung **10 Dreiecke**.

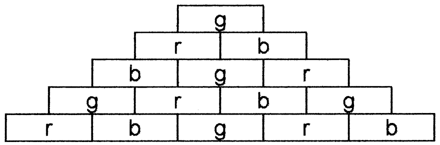
7.5) Einführen von *zweckmäßigen Bezeichnungen*; Verwenden einer *Tabelle:*
Opa **R**ot trägt die **b**laue Tasche, Frau **Gr**ün trägt die **r**ote Tasche und Herr **B**lau trägt die **gr**üne Tasche.
Probe am Text nicht vergessen! Siehe Abschnitt 5.2., S. 37

7.6) Rückführung auf *Hilfsaufgaben:*
a) 40 + 12 - 29 - 23 = 0 .
b) 28 + 25 - 31 - 13 - 9 = 0 .
c) Für 5 Zahlen, deren **Summe ungerade** ist, besitzt die Aufgabe keine Lösung. Siehe Abschnitt 5.8., S. 62

7.7) *Systematisches Probieren*; *Ordnungsprinzipien; "Findigkeit":*
a) - Welche Farben wollen wir in welcher Reihenfolge verwenden?
[r (rot), b (blau), g (grün), v (violett), s (schwarz), ...]
- In welcher Reihenfolge wollen wir die Felder füllen?
[Links unten beginnen, dann "links vor rechts" und "unten vor oben".]
- Wie müssen wir daher die ersten beiden Felder der untersten Reihe färben? [r ; b]
- Welche Farbe muss dann das 1. Feld der 2. Reihe erhalten? [g]

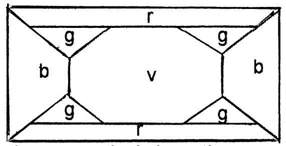
Damit ist nachgewiesen, dass für diese Färbung *mindestens* 3 Farben erforderlich sind.
- Welche Farbe darf das 3. Feld der 2. Reihe erhalten? [r oder g]
- Ist eine der beiden möglichen Färbungen günstiger als die andere?
[Würde man r wählen, dann müsste das 2. Feld der 2. Reihe mit der vierten Farbe v gefärbt werden. Wählt man dagegen g , kann man dieses Feld mit r färben.]

So fortfahrend gelangt man zu folgender Lösung der Färbungsaufgabe:



Die Schüler sollten erkennen, dass in den waagrechten und schrägen Reihen die Farben stets in der Reihenfolge r, g, b, r, g, ... vorkommen.

b) Analog gelangt man auch zur Lösung dieser Färbungsaufgabe, bei der man nachweisen kann, dass vier Farben benötigt werden.



Man wird auf die "Symmetrie" der Farbverteilung hinweisen und den Schülern mitteilen, dass die Mathematiker herausgefunden haben, dass man bei derartigen Färbungsaufgaben stets mit vier Farben auskommen kann.

71

Lexikografisch geordnet ergeben sich folgende Dreiecke:
ABG, ACD, ACH, ADF, BCE, CDE, CDH, DEG, DEH, EGH.
Es gibt in der Abbildung **10 Dreiecke**.

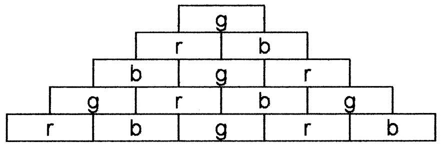
7.5) Einführen von *zweckmäßigen Bezeichnungen*; Verwenden einer *Tabelle:*
Opa **R**ot trägt die **b**laue Tasche, Frau **Gr**ün trägt die **r**ote Tasche und Herr **B**lau trägt die **gr**üne Tasche.
Probe am Text nicht vergessen! Siehe Abschnitt 5.2., S. 37

7.6) Rückführung auf *Hilfsaufgaben:*
a) 40 + 12 - 29 - 23 = 0 .
b) 28 + 25 - 31 - 13 - 9 = 0 .
c) Für 5 Zahlen, deren **Summe ungerade** ist, besitzt die Aufgabe keine Lösung. Siehe Abschnitt 5.8., S. 62

7.7) *Systematisches Probieren*; *Ordnungsprinzipien; "Findigkeit":*
a) - Welche Farben wollen wir in welcher Reihenfolge verwenden?
[r (rot), b (blau), g (grün), v (violett), s (schwarz), ...]
- In welcher Reihenfolge wollen wir die Felder füllen?
[Links unten beginnen, dann "links vor rechts" und "unten vor oben".]
- Wie müssen wir daher die ersten beiden Felder der untersten Reihe färben? [r ; b]
- Welche Farbe muss dann das 1. Feld der 2. Reihe erhalten? [g]

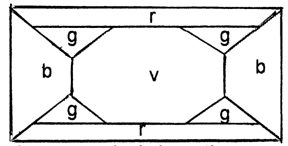
Damit ist nachgewiesen, dass für diese Färbung *mindestens* 3 Farben erforderlich sind.
- Welche Farbe darf das 3. Feld der 2. Reihe erhalten? [r oder g]
- Ist eine der beiden möglichen Färbungen günstiger als die andere?
[Würde man r wählen, dann müsste das 2. Feld der 2. Reihe mit der vierten Farbe v gefärbt werden. Wählt man dagegen g , kann man dieses Feld mit r färben.]

So fortfahrend gelangt man zu folgender Lösung der Färbungsaufgabe:



Die Schüler sollten erkennen, dass in den waagrechten und schrägen Reihen die Farben stets in der Reihenfolge r, g, b, r, g, ... vorkommen.

b) Analog gelangt man auch zur Lösung dieser Färbungsaufgabe, bei der man nachweisen kann, dass vier Farben benötigt werden.



Man wird auf die "Symmetrie" der Farbverteilung hinweisen und den Schülern mitteilen, dass die Mathematiker herausgefunden haben, dass man bei derartigen Färbungsaufgaben stets mit vier Farben auskommen kann.

8.1) Verwenden von *Variablen; systematisches Probieren:*

a) $490 > 80 \cdot x > 310$; $x = 4, 5, 6$.

b) $22 < 4 \cdot x < 40$ $x = 6, 7, 8, 9$.

c) $48:8 + 17 > x + 9$; $48:8 + 17 = 6 + 17 = 23$;
$23 > x + 9$; $x = 0, 1, 2, \ldots, 12, 13$.

8.2) *Vorwärtsarbeiten:*

200 m **:** 2 = 100 m . Jeder Läufer legt **100 m** zurück.

2 · 200 m = 400 m. Die Staffelstrecke hat eine Gesamtlänge von **400 m** .

400 m **:** 100 m = 4. **Vier Läufer** gehören zu einer Staffel.

8.3) Verwenden einer *Tabelle; Vorwärtsarbeiten:*

a) Die Zugfahrt dauerte **120 Minuten** (2 Stunden).

b) Es wurden insgesamt **140 km** gefahren.

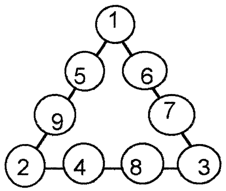
Probe am Text mit Hilfe der Tabelle! Siehe Abschnitt 5.2., S. 36

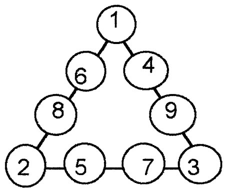
8.4) *Systematisches Probieren:*

Es waren **20** Autos und **40** Fahrräder. Siehe Abschnitt 5.4., S. 42

8.5) *Systematisches Erfassen aller möglichen Fälle; Folgern* aus gegebenen Bedingungen:

Siehe Abschnitt 5.4., S. 44





8.6) *"Von rückwärts her rechnen":*

Die gedachte Zahl lautet **324** . Siehe Abschnitt 5.6., S. 55

8.7) *Zweckmäßige Bezeichnungen; systematisches Probieren; Folgern aus Bedingungen* :

Eine **Kuh** kostet **20 Taler**, eine **Ziege** kostet **12 Taler**. (*3 Lösungswege)*

Probe nicht vergessen!

Siehe Abschnitt 5.1., S. 33, Abschnitt 5.4), S. 47 und Abschnitt 5.5., S. 53

9.1)

$$\begin{array}{rccc} & 5 & 2 & \mathbf{5} \\ + & \mathbf{2} & 1 & 3 \\ \hline & 7 & \mathbf{3} & 8 \end{array}$$

72

8.1) Verwenden von *Variablen; systematisches Probieren:*

a) $490 > 80 \cdot x > 310$; $x = 4, 5, 6$.

b) $22 < 4 \cdot x < 40$ $x = 6, 7, 8, 9$.

c) $48:8 + 17 > x + 9$; $48:8 + 17 = 6 + 17 = 23$;
$23 > x + 9$; $x = 0, 1, 2, \ldots, 12, 13$.

8.2) *Vorwärtsarbeiten:*

200 m **:** 2 = 100 m . Jeder Läufer legt **100 m** zurück.

2 · 200 m = 400 m. Die Staffelstrecke hat eine Gesamtlänge von **400 m** .

400 m **:** 100 m = 4. **Vier Läufer** gehören zu einer Staffel.

8.3) Verwenden einer *Tabelle; Vorwärtsarbeiten:*

a) Die Zugfahrt dauerte **120 Minuten** (2 Stunden).

b) Es wurden insgesamt **140 km** gefahren.

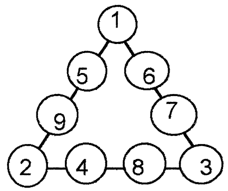
Probe am Text mit Hilfe der Tabelle! Siehe Abschnitt 5.2., S. 36

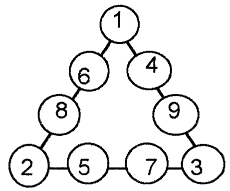
8.4) *Systematisches Probieren:*

Es waren **20** Autos und **40** Fahrräder. Siehe Abschnitt 5.4., S. 42

8.5) *Systematisches Erfassen aller möglichen Fälle; Folgern* aus gegebenen Bedingungen:

Siehe Abschnitt 5.4., S. 44





8.6) *"Von rückwärts her rechnen":*

Die gedachte Zahl lautet **324** . Siehe Abschnitt 5.6., S. 55

8.7) *Zweckmäßige Bezeichnungen; systematisches Probieren; Folgern aus Bedingungen* :

Eine **Kuh** kostet **20 Taler**, eine **Ziege** kostet **12 Taler**. (*3 Lösungswege)*

Probe nicht vergessen!

Siehe Abschnitt 5.1., S. 33, Abschnitt 5.4), S. 47 und Abschnitt 5.5., S. 53

9.1)

$$\begin{array}{rccc} & 5 & 2 & \mathbf{5} \\ + & \mathbf{2} & 1 & 3 \\ \hline & 7 & \mathbf{3} & 8 \end{array}$$

9.2) *Vorwärtsarbeiten:*

Das Entfernen von 7 (gleich breiten) Perlen verkürzt die Kette um (60 cm - 46 cm =) 14 cm .
Wenn 7 Perlen 14 cm breit sind, dann ist **jede Perle** (14 cm **:** 7 =) **2 cm breit**.

9.3) *Vorwärtsarbeiten:*

A = **24**, B = **36**, C = **12**, D = **3**, E = **15** . Siehe Abschnitt 5.5., S. 50

9.4) *Systematisches Ermitteln aller möglichen Fälle; Ordnungsprinzip:*

Hier ist das lexikografische Ordnungsprinzip wenig hilfreich.
Die im gegebenen Sechseck enthaltenen Vierecke bestehen entweder aus 2 oder aus 3 Dreiecken. Auch die Symmetrie der Figur bezüglich der den Punkt D enthaltenden Diagonalen AD sollte ausgenützt werden.

Vierecke (mit dem Eckpunkt D) aus 2 Grunddreiecken:
DEFM und (als Spiegelbild) DMBC ;
CDEM (hat sich selbst als Spiegelbild).

Vierecke (mit Eckpunkt D) aus 3 Grunddreiecken:
ADEF und (als Spiegelbild) ABCD ;
FCDE und (als Spiegelbild) EBCD .

Es gibt daher insgesamt **7 Lösungen**.

Bei der *Ergebniskontolle* muss darauf geachtet werden, dass jedes Viereck auf verschiedene Weise gekennzeichnet sein kann (z.B. ABCD = BCDA = CDAB = DABC, und auch ein entgegengesetzter Umlaufsinn - statt ABCD beispielsweise DCBA - kann von den Schülern zur Kennzeichnung verwendet worden sein).

9.5) *Rückwärtsarbeiten;* Verwenden einer *Tabelle:*

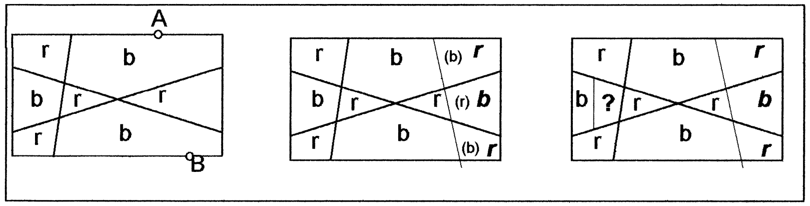
Herr Meier ist um **23.20 Uhr** am Ziel.
Probe mit Hilfe der Tabelle. Siehe Abschnitt 5.6., S. 55

9.6) *"Findigkeit":*

Der Neujahrstag fiel auf einen **Dienstag**.
Siehe Abschnitt 5.9., S. 64

9.7) *Systematisches Probieren; "Findigkeit":*

a) Die sehr leicht zu findende Färbung ist in der linken Abbildung festgehalten.
b) Nach dem Einzeichnen der Strecke AB ist die in der mittleren Abbildung festgehaltene Umfärbung erforderlich.
c) Nach dem Einzeichnen der in der rechten Abbildung festgehaltenen Strecke erkennt man, dass man zur Färbung der mit einem Fragezeichen versehenen Teilfläche eine vierte Farbe benötigt.



73

9.2) *Vorwärtsarbeiten:*

Das Entfernen von 7 (gleich breiten) Perlen verkürzt die Kette um (60 cm - 46 cm =) 14 cm .
Wenn 7 Perlen 14 cm breit sind, dann ist **jede Perle** (14 cm **:** 7 =) **2 cm breit**.

9.3) *Vorwärtsarbeiten:*

A = **24**, B = **36**, C = **12**, D = **3**, E = **15** . Siehe Abschnitt 5.5., S. 50

9.4) *Systematisches Ermitteln aller möglichen Fälle; Ordnungsprinzip:*

Hier ist das lexikografische Ordnungsprinzip wenig hilfreich.
Die im gegebenen Sechseck enthaltenen Vierecke bestehen entweder aus 2 oder aus 3 Dreiecken. Auch die Symmetrie der Figur bezüglich der den Punkt D enthaltenden Diagonalen AD sollte ausgenützt werden.

Vierecke (mit dem Eckpunkt D) aus 2 Grunddreiecken:
DEFM und (als Spiegelbild) DMBC ;
CDEM (hat sich selbst als Spiegelbild).

Vierecke (mit Eckpunkt D) aus 3 Grunddreiecken:
ADEF und (als Spiegelbild) ABCD ;
FCDE und (als Spiegelbild) EBCD .

Es gibt daher insgesamt **7 Lösungen**.

Bei der *Ergebniskontolle* muss darauf geachtet werden, dass jedes Viereck auf verschiedene Weise gekennzeichnet sein kann (z.B. ABCD = BCDA = CDAB = DABC, und auch ein entgegengesetzter Umlaufsinn - statt ABCD beispielsweise DCBA - kann von den Schülern zur Kennzeichnung verwendet worden sein).

9.5) *Rückwärtsarbeiten;* Verwenden einer *Tabelle:*

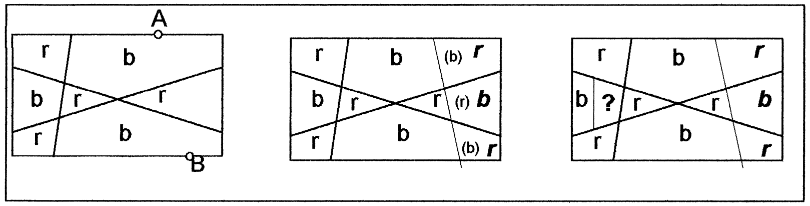
Herr Meier ist um **23.20 Uhr** am Ziel.
Probe mit Hilfe der Tabelle. Siehe Abschnitt 5.6., S. 55

9.6) *"Findigkeit":*

Der Neujahrstag fiel auf einen **Dienstag**.
Siehe Abschnitt 5.9., S. 64

9.7) *Systematisches Probieren; "Findigkeit":*

a) Die sehr leicht zu findende Färbung ist in der linken Abbildung festgehalten.
b) Nach dem Einzeichnen der Strecke AB ist die in der mittleren Abbildung festgehaltene Umfärbung erforderlich.
c) Nach dem Einzeichnen der in der rechten Abbildung festgehaltenen Strecke erkennt man, dass man zur Färbung der mit einem Fragezeichen versehenen Teilfläche eine vierte Farbe benötigt.



10.1) a)

	6	9	8
+	0	2	**5**
	7	**2**	3

b)

	6	5	8
-	4	**3**	5
	2	2	**3**

10.2)

Erfahrungsgemäß nennen viele Schüler bei dieser Aufgabe die falschen Lösungen *240 cm und 360 cm.*
Selbst wenn der erste Schüler gleich ein richtiges "Angebot" bringt, sollte man so lange weiter fragen, bis auch einige falsche Lösungen angeboten werden. Auf diese Weise kann man besonders gut die *Nützlichkeit einer Probe* verdeutlichen.

1. Lösungsweg: Geschicktes Probieren; Verwenden einer *Tabelle:*

kl. Teil	gr. Teil	Summe
250 cm	(250 + 60 =) 310 cm	560 cm < 600 cm
260 cm	(250 + 60 =) 320 cm	580 cm < 600 cm
270 cm	(250 + 60 =) **330 cm**	**600 cm**
280 cm	(250 + 60 =) 340 cm	620 cm > 600 cm

Es wäre ungeschickt, das Probieren etwa mit 10 cm zu beginnen.
Vielmehr sollten die Schüler durch *geschicktes* Probieren mit einer Größe beginnen, die vermutlich in der Nähe der gesuchten Größe liegt.

Dieser Lösungsweg liefert automatisch auch eine *Probe.*

Man lasse feststellen:
Da mit steigender Länge der beiden Teile auch die Summe ständig zunimmt und da gezeigt wurde, dass für 260 cm die Summe zu klein, für 280 cm dagegen bereits zu groß ist, ist nachgewiesen, dass nur die folgende Lösung existiert:

Der **kleinere Teil** des Kupferdrahtes muss **270 cm**, der **größere Teil** muss **330 cm** lang sein.

2. Lösungsweg: Inhaltliches Folgern:.

- Was lässt sich aus dem Gegebenen unmittelbar folgern? Begründe!
  - ° Um wie viele cm muss der kleinere Teil kürzer sein als die Hälfte des Drahtes? [Um (60:2 =) 30 cm]
- Was lässt sich also aus dem Gegebenen folgern?
  [Die Hälfte des Drahtes ist (600:2 =) 300 cm lang.
  Der kleinere Teil ist daher (300 - 30 =) **270 cm**, der größere **330 cm** lang.]
- *Probe!* [330 cm + 270 cm = 600 cm und 330 cm - 270 cm = 60 cm.]

3. Lösungsweg: Inhaltliches Folgern:

Hier können folgende *Unterimpulse* verwendet werden:

- ° Wie groß wäre die Summe von zwei großen Teilen? [(600 + 60 =) 660 cm.]
- ° Wie groß ist daher der größere Teil? [(660:2 =) **330 cm**.]
- ° Wie groß ist daher der kleinere Teil? [(600 - 330 =) **270 cm**.]

Siehe auch Abschnitt 5.4., S. 43

10.3)*Analogie; systematisches Probieren; inhaltliches Folgern:*

- Vergleiche diese Aufgabe mit der Aufgabe 10.2)! Was kannst du feststellen?
  - ° Welche "Ähnlichkeit" (*Analogie*) besteht zwischen diesen Aufgaben?
    [(Zwei Teile - zwei Bücher) ; (Summe 600 cm - Summe 41 €) ; (Ein Teil 60 cm länger - ein Buch um 5 € billiger) .]

74

10.1) a) 6 9 8 + 0 2 5 = 7 2 3   b) 6 5 8 - 4 3 5 = 2 2 3

10.2)

Erfahrungsgemäß nennen viele Schüler bei dieser Aufgabe die falschen Lösungen *240 cm und 360 cm.*
Selbst wenn der erste Schüler gleich ein richtiges "Angebot" bringt, sollte man so lange weiter fragen, bis auch einige falsche Lösungen angeboten werden. Auf diese Weise kann man besonders gut die *Nützlichkeit einer Probe* verdeutlichen.

1. Lösungsweg: Geschicktes Probieren; Verwenden einer *Tabelle:*

kl. Teil	gr. Teil	Summe
250 cm	(250 + 60 =) 310 cm	560 cm < 600 cm
260 cm	(250 + 60 =) 320 cm	580 cm < 600 cm
270 cm	(250 + 60 =) **330 cm**	**600 cm**
280 cm	(250 + 60 =) 340 cm	620 cm > 600 cm

Es wäre ungeschickt, das Probieren etwa mit 10 cm zu beginnen.
Vielmehr sollten die Schüler durch *geschicktes* Probieren mit einer Größe beginnen, die vermutlich in der Nähe der gesuchten Größe liegt.

Dieser Lösungsweg liefert automatisch auch eine *Probe.*

Man lasse feststellen:
Da mit steigender Länge der beiden Teile auch die Summe ständig zunimmt und da gezeigt wurde, dass für 260 cm die Summe zu klein, für 280 cm dagegen bereits zu groß ist, ist nachgewiesen, dass nur die folgende Lösung existiert:

Der **kleinere Teil** des Kupferdrahtes muss **270 cm**, der **größere Teil** muss **330 cm** lang sein.

2. Lösungsweg: Inhaltliches Folgern:.

- Was lässt sich aus dem Gegebenen unmittelbar folgern? Begründe!
  - ° Um wie viele cm muss der kleinere Teil kürzer sein als die Hälfte des Drahtes? [Um (60:2 =) 30 cm]
- Was lässt sich also aus dem Gegebenen folgern?
  [Die Hälfte des Drahtes ist (600:2 =) 300 cm lang.
  Der kleinere Teil ist daher (300 - 30 =) **270 cm**, der größere **330 cm** lang.]
- *Probe!* [330 cm + 270 cm = 600 cm und 330 cm - 270 cm = 60 cm.]

3. Lösungsweg: Inhaltliches Folgern:

Hier können folgende *Unterimpulse* verwendet werden:

- ° Wie groß wäre die Summe von zwei großen Teilen? [(600 + 60 =) 660 cm.]
- ° Wie groß ist daher der größere Teil? [(660:2 =) **330 cm**.]
- ° Wie groß ist daher der kleinere Teil? [(600 - 330 =) **270 cm**.]

Siehe auch Abschnitt 5.4., S. 43

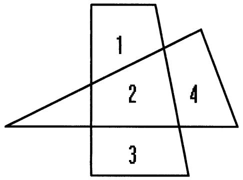
10.3)*Analogie; systematisches Probieren; inhaltliches Folgern:*

- Vergleiche diese Aufgabe mit der Aufgabe 10.2)! Was kannst du feststellen?
  - ° Welche "Ähnlichkeit" (*Analogie*) besteht zwischen diesen Aufgaben?
    [(Zwei Teile - zwei Bücher) ; (Summe 600 cm - Summe 41 €) ; (Ein Teil 60 cm länger - ein Buch um 5 € billiger) .]

- Wie kannst du diese Ähnlichkeit beim Lösen der Aufgabe ausnützen?
  [Ich werde ebenso vorgehen, wie beim Lösen der "ähnlichen" Aufgabe 10.2); das *"inhaltliche Folgern"* ist dabei einfacher und geeigneter als das *"geschickte Probieren"* .]

  2 billige Bücher kosten (41 - 5 =) 36 €, ein **billiges Buch** daher **18 €**; das **teuere Buch** kostet daher (18 + 5 =) **23 €**.
- *Probe:* 18 € + 23 € = 41 € ; 23 € - 18 € = 5 € .

10.4) *Systematisches Ermitteln aller möglichen Fälle; Ordnungsprinzip:.*
- Welche Arten von Vierecken kommen vor?
  [4 nicht zusammengesetzte "Grundvierecke" und zusammengesetzte Vierecke]
- Welche Arten zusammengesetzter Vierecke gibt es; wie viele sind es jeweils?
  [3 Vierecke aus zwei "Grundvierecken"; 1 Viereck aus drei "Grundvierecken".]



An der *Wandtafel* kann festgehalten werden:
Zusammengesetzte Vierecke: (1-2), (2-3), (2-4), (1-2-3).
In der Figur gibt es **7 Vierecke**.

10.5) Einführen von *zweckmäßigen Bezeichnungen;* Ordnungsrelation; Verwenden einer *Tabelle*; *Folgern* aus gegebenen Bedingungen:

Wenn man die 7 Vornamen mit den Anfangsbuchstaben und "X kam direkt vor Y ins Ziel" mit "X < Y" abkürzt, dann lassen sich die gegebenen Bedingungen wie folgt an der *Wandtafel* festhalten:

(a) C < A < B
(b) E < D
(c) F = 4.
(d),(e) $\Rightarrow$ A $\neq$ 2. und D $\neq$ 2.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
			F			

- Was lässt sich aus diesen Bedingungen unmittelbar folgern? Begründe!
  [Da A nicht den 2. Platz belegte, muss wegen (a) gelten: C = 5., A = 6., B = 7.
  Da D nicht den 2. Platz belegte, muss wegen (b) gelten: E = 2., D = 3.
  Für Gunther bleibt nur noch der 1. Platz übrig.]
  Die Platzverteilung lautete: **G**unther, **E**rich, **D**ieter, **F**ranz, **C**laus, **A**ndreas, **B**ernd.
- *Probe am Text* nicht vergessen!

10.6) Einführen von *zweckmäßigen Bezeichnungen*; Verwenden einer *Tabelle*; *Folgern* aus gegebenen Bedingungen:

Herr **Bauer ist** von Beruf **Schlosser**.
(**A**rzt ist **F**leischer; **F**leischer ist **A**rzt; **S**chlosser ist **B**auer.)
Probe am Text nicht vergessen! Siehe Abschnitt 5.2., S. 36

10.7) Entdecken von *Gesetzmäßigkeiten:*

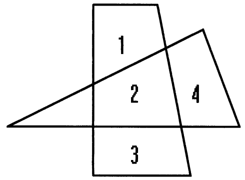
a) Die zweite Figur enthält (1 + 3 + 5 =) **9** (= 3·3) **Dreiecke**.
b) Die dritte Figur enthält (1 + 3 + 5 + 7 =) **16** (= 4·4) **Dreiecke**.

75

- Wie kannst du diese Ähnlichkeit beim Lösen der Aufgabe ausnützen?
  [Ich werde ebenso vorgehen, wie beim Lösen der "ähnlichen" Aufgabe 10.2); das *"inhaltliche Folgern"* ist dabei einfacher und geeigneter als das *"geschickte Probieren"* .]

  2 billige Bücher kosten (41 - 5 =) 36 €, ein **billiges Buch** daher **18 €**; das **teuere Buch** kostet daher (18 + 5 =) **23 €**.
- *Probe:* 18 € + 23 € = 41 € ; 23 € - 18 € = 5 € .

10.4) *Systematisches Ermitteln aller möglichen Fälle; Ordnungsprinzip:.*
- Welche Arten von Vierecken kommen vor?
  [4 nicht zusammengesetzte "Grundvierecke" und zusammengesetzte Vierecke]
- Welche Arten zusammengesetzter Vierecke gibt es; wie viele sind es jeweils?
  [3 Vierecke aus zwei "Grundvierecken"; 1 Viereck aus drei "Grundvierecken".]



An der *Wandtafel* kann festgehalten werden:
Zusammengesetzte Vierecke: (1-2), (2-3), (2-4), (1-2-3).
In der Figur gibt es **7 Vierecke**.

10.5) Einführen von *zweckmäßigen Bezeichnungen;* Ordnungsrelation; Verwenden einer *Tabelle*; *Folgern* aus gegebenen Bedingungen:

Wenn man die 7 Vornamen mit den Anfangsbuchstaben und "X kam direkt vor Y ins Ziel" mit "X < Y" abkürzt, dann lassen sich die gegebenen Bedingungen wie folgt an der *Wandtafel* festhalten:

(a) C < A < B
(b) E < D
(c) F = 4.
(d),(e) $\Rightarrow$ A $\neq$ 2. und D $\neq$ 2.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
			F			

- Was lässt sich aus diesen Bedingungen unmittelbar folgern? Begründe!
  [Da A nicht den 2. Platz belegte, muss wegen (a) gelten: C = 5., A = 6., B = 7.
  Da D nicht den 2. Platz belegte, muss wegen (b) gelten: E = 2., D = 3.
  Für Gunther bleibt nur noch der 1. Platz übrig.]
  Die Platzverteilung lautete: **G**unther, **E**rich, **D**ieter, **F**ranz, **C**laus, **A**ndreas, **B**ernd.
- *Probe am Text* nicht vergessen!

10.6) Einführen von *zweckmäßigen Bezeichnungen*; Verwenden einer *Tabelle*; *Folgern* aus gegebenen Bedingungen:

Herr **Bauer ist** von Beruf **Schlosser**.
(**A**rzt ist **F**leischer; **F**leischer ist **A**rzt; **S**chlosser ist **B**auer.)
Probe am Text nicht vergessen! Siehe Abschnitt 5.2., S. 36

10.7) Entdecken von *Gesetzmäßigkeiten:*

a) Die zweite Figur enthält (1 + 3 + 5 =) **9** (= 3·3) **Dreiecke**.
b) Die dritte Figur enthält (1 + 3 + 5 + 7 =) **16** (= 4·4) **Dreiecke**.

c) Die 4. Figur enthält (5·5 =) 25 Dreiecke;
die 5. Figur enthält (6·6 =) 36 Dreiecke; usw.
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5 \cdot 5 = 25$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6 \cdot 6 = 36$; usw.

Jede Zeile hat ein schwarzes und ein weißes Dreieck mehr als die vorhergehende.

Die Anzahl der weißen Dreiecke einer Figur ist gleich der Anzahl der schwarzen Dreiecke in der nächsten Figur.

Die Anzahl der schwarzen Dreiecke in den Figuren beträgt 1, 3, 6, 10, ...

Die Anzahl der weißen Dreiecke in den Figuren beträgt 3, 6, 10, 15, ...

Man erhält jeweils das nächste Glied der Folge, wenn man 2, 3, 4, ... addiert.

Siehe Abschnitt 5.7., S. 56

11.1) a)
$$\begin{array}{rrrr} & \mathbf{7} & \mathbf{6} & 3 \\ + & 1 & 6 & \mathbf{8} \\ \hline & 9 & 3 & 1 \end{array}$$
b)
$$\begin{array}{rrrr} & 7 & \mathbf{0} & 8 \\ - & 5 & 1 & 9 \\ \hline & \mathbf{1} & 8 & \mathbf{9} \end{array}$$

11.2 Verwenden von *Variablen; Vorwärtsarbeiten:*

a)

- *Was lässt sich aus welchen gegebenen Zahlen unmittelbar berechnen? Begründe!*
  [Aus $x - z = 5$ und $x = 9$ folgt $\mathbf{z = 4}$.]
- Was lässt sich nun unmittelbar berechnen?
  [Aus $x = 9$, $y = 2$ und $z = 4$ folgt $\mathbf{(x + y) \cdot z} = 11 \cdot 4 = \mathbf{44}$.]

b) Aus $x = 12$ und $y = 8$ folgt $x + y = 20$;
aus $(x + y) = 20$ und $(x + y) \cdot z = 100$ folgt $\mathbf{z = 5}$;
aus $x = 12$ und $z = 5$ folgt $\mathbf{x - z = 7}$.

c) Aus $z = 7$ und $x - z = 10$ folgt $\mathbf{x = 17}$;
aus $z = 7$ und $(x + y) \cdot z = 350$ folgt $x + y = 50$.
Tabelle durch *Hilfsspalte* mit dem Spalteneingang $(x+y)$ ergänzen!
Aus $x = 17$ und $x + y = 50$ folgt $\mathbf{y = 33}$.

- *Proben* nicht vergessen!

11.3) *Analogie* zu 10.2) und 10.3); *systematisches Probieren; inhaltliches Folgern:*
Es wurden **16 kg** Ware verkauft.

Siehe Abschnitt 5.4., S. 43

11.4) *Systematisches Ermitteln aller möglichen Fälle; Ordnungsprinzip:*

a) Die Figur enthält (4 + 1 + 1 =) **6 Quadrate**.

b) Die Figur enthält (8 + 4 + 4 + 4 =) **20 Dreiecke**.

c) Die Figur enthält (6 + 4 + 20 + 8 =) **38 Vierecke** Siehe Abschnitt 5.4., S. 46

76

c) Die 4. Figur enthält (5·5 =) 25 Dreiecke;
die 5. Figur enthält (6·6 =) 36 Dreiecke; usw.
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5 \cdot 5 = 25$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6 \cdot 6 = 36$; usw.

Jede Zeile hat ein schwarzes und ein weißes Dreieck mehr als die vorhergehende.

Die Anzahl der weißen Dreiecke einer Figur ist gleich der Anzahl der schwarzen Dreiecke in der nächsten Figur.

Die Anzahl der schwarzen Dreiecke in den Figuren beträgt 1, 3, 6, 10, ...

Die Anzahl der weißen Dreiecke in den Figuren beträgt 3, 6, 10, 15, ...

Man erhält jeweils das nächste Glied der Folge, wenn man 2, 3, 4, ... addiert.

Siehe Abschnitt 5.7., S. 56

11.1) a)
$$\begin{array}{rrrr} & \mathbf{7} & \mathbf{6} & 3 \\ + & 1 & 6 & \mathbf{8} \\ \hline & 9 & 3 & 1 \end{array}$$
b)
$$\begin{array}{rrrr} & 7 & \mathbf{0} & 8 \\ - & 5 & 1 & 9 \\ \hline & \mathbf{1} & 8 & \mathbf{9} \end{array}$$

11.2 Verwenden von *Variablen; Vorwärtsarbeiten:*

a)

- *Was lässt sich aus welchen gegebenen Zahlen unmittelbar berechnen? Begründe!*
  [Aus $x - z = 5$ und $x = 9$ folgt $\mathbf{z = 4}$.]
- Was lässt sich nun unmittelbar berechnen?
  [Aus $x = 9$, $y = 2$ und $z = 4$ folgt $\mathbf{(x + y) \cdot z} = 11 \cdot 4 = \mathbf{44}$.]

b) Aus $x = 12$ und $y = 8$ folgt $x + y = 20$;
aus $(x + y) = 20$ und $(x + y) \cdot z = 100$ folgt $\mathbf{z = 5}$;
aus $x = 12$ und $z = 5$ folgt $\mathbf{x - z = 7}$.

c) Aus $z = 7$ und $x - z = 10$ folgt $\mathbf{x = 17}$;
aus $z = 7$ und $(x + y) \cdot z = 350$ folgt $x + y = 50$.
Tabelle durch *Hilfsspalte* mit dem Spalteneingang $(x+y)$ ergänzen!
Aus $x = 17$ und $x + y = 50$ folgt $\mathbf{y = 33}$.

- *Proben* nicht vergessen!

11.3) *Analogie* zu 10.2) und 10.3); *systematisches Probieren; inhaltliches Folgern:*
Es wurden **16 kg** Ware verkauft.

Siehe Abschnitt 5.4., S. 43

11.4) *Systematisches Ermitteln aller möglichen Fälle; Ordnungsprinzip:*

a) Die Figur enthält (4 + 1 + 1 =) **6 Quadrate**.

b) Die Figur enthält (8 + 4 + 4 + 4 =) **20 Dreiecke**.

c) Die Figur enthält (6 + 4 + 20 + 8 =) **38 Vierecke** Siehe Abschnitt 5.4., S. 46

11.5) Verwenden eines *Mengendiagramms:*
Es gehen **26 Schüler** in die Klasse. Siehe Abschnitt 5.3., S. 39

11.6) *Vorwärtsarbeiten;* Verwenden einer *Tabelle:*

a) Herr Linde schlief am längsten **25 Minuten**.

b) Herr Linde hat insgesamt **50 Minuten** geschlafen.

c) Herr Linde war am längsten **35 Minuten** lang wach.
Siehe Abschnitt 5.2., S. 35

11.7) *Folgern* aus gegebenen Bedingungen; Verwenden einer *Tabelle*

Sven isst am liebsten **Schokolade**.

Tanja gehört das **Kasperletheater**.

Bettina wohnt im **g**elben Haus, ihr Lieblingsspielzeug ist die **P**uppe, sie isst am liebsten **K**augummi.

Tanja - **r**otes Haus - **E**is.

Sven - **b**laues Haus - **A**utorennbahn.

Probe am Text nicht vergessen! Siehe Abschnitt 5.2., S. 37

12.1) a)
$$\begin{array}{r} 1\ \ 7\ \ 5 \\ +\ \ \mathbf{6}\ \ 2\ \ \mathbf{8} \\ \hline 8\ \ \mathbf{0}\ \ 3 \end{array}$$
b)
$$\begin{array}{r} \mathbf{8}\ \ 1\ \ 7 \\ -\ \ 3\ \ \mathbf{0}\ \ 8 \\ \hline 5\ \ 0\ \ \mathbf{9} \end{array}$$

12.2) Verwenden von *Variablen*; *Vorwärtsarbeiten:*

a) - Was lässt sich aus den gegebenen Zahlen unmittelbar berechnen? Begründe!

Aus $x = 99$ und $y = 49$ und $z = 2$ folgt $\mathbf{x - y \cdot z} = 99 - 98 \mathbf{= 1}$;

aus $x = 99$ und $y = 49$ folgt $x - y = 50$ (*Hilfsspalte* einfügen!);

aus $x - y = 50$ und $z = 2$ folgt $\mathbf{(x - y) \cdot z = 100}$.

b) Aus $x = 34$ und $y = 2$ und $x - y \cdot z = 28$ folgt $34 - 2 \cdot z = 28$, also $2 \cdot z = 6$ und damit $\mathbf{z = 3}$;

aus $x = 34$ und $y = 2$ folgt $x - y = 32$ (Hilfsspalte!);

aus $x - y = 32$ und $z = 3$ folgt $\mathbf{(x - y) \cdot z = 96}$.

c) Aus $x = 3$ und $y = 2$ und $x - y \cdot z \geq 0$ folgt $3 - 2 \cdot z \geq 0$, woraus $\mathbf{z = 1}$ **oder** $\mathbf{z = 0}$ folgt (*systematisches Erfassen* aller möglichen Fälle).

Hieraus folgt dann $\mathbf{x - y \cdot z} = 3 - 2 \cdot z \mathbf{= 1}$ (für $z = 1$) **oder** $\mathbf{x - y \cdot z = 3}$ (für $z = 0$).

Weiterhin folgt $(x - y) \cdot z = 1 \cdot z = z$, also $\mathbf{(x - y) \cdot z = 1}$ **oder** $\mathbf{(x - y) \cdot z = 0}$.

Folglich gibt es für [x; y; z; x - y·z; (x - y)·z] folgende beiden Lösungen:

[3; 2; 1; 1; 1] , [3; 2; 0; 3; 0] .

Proben nicht vergessen!

77

11.5) Verwenden eines *Mengendiagramms:*
Es gehen **26 Schüler** in die Klasse. Siehe Abschnitt 5.3., S. 39

11.6) *Vorwärtsarbeiten;* Verwenden einer *Tabelle:*

a) Herr Linde schlief am längsten **25 Minuten**.

b) Herr Linde hat insgesamt **50 Minuten** geschlafen.

c) Herr Linde war am längsten **35 Minuten** lang wach.
Siehe Abschnitt 5.2., S. 35

11.7) *Folgern* aus gegebenen Bedingungen; Verwenden einer *Tabelle*

Sven isst am liebsten **Schokolade**.

Tanja gehört das **Kasperletheater**.

Bettina wohnt im **g**elben Haus, ihr Lieblingsspielzeug ist die **P**uppe, sie isst am liebsten **K**augummi.

Tanja - **r**otes Haus - **E**is.

Sven - **b**laues Haus - **A**utorennbahn.

Probe am Text nicht vergessen! Siehe Abschnitt 5.2., S. 37

12.1) a)
$$\begin{array}{r} 1\ \ 7\ \ 5 \\ +\ \ \mathbf{6}\ \ 2\ \ \mathbf{8} \\ \hline 8\ \ \mathbf{0}\ \ 3 \end{array}$$
b)
$$\begin{array}{r} \mathbf{8}\ \ 1\ \ 7 \\ -\ \ 3\ \ \mathbf{0}\ \ 8 \\ \hline 5\ \ 0\ \ \mathbf{9} \end{array}$$

12.2) Verwenden von *Variablen*; *Vorwärtsarbeiten:*

a) - Was lässt sich aus den gegebenen Zahlen unmittelbar berechnen? Begründe!

Aus $x = 99$ und $y = 49$ und $z = 2$ folgt $\mathbf{x - y \cdot z} = 99 - 98 \mathbf{= 1}$;

aus $x = 99$ und $y = 49$ folgt $x - y = 50$ (*Hilfsspalte* einfügen!);

aus $x - y = 50$ und $z = 2$ folgt $\mathbf{(x - y) \cdot z = 100}$.

b) Aus $x = 34$ und $y = 2$ und $x - y \cdot z = 28$ folgt $34 - 2 \cdot z = 28$, also $2 \cdot z = 6$ und damit $\mathbf{z = 3}$;

aus $x = 34$ und $y = 2$ folgt $x - y = 32$ (Hilfsspalte!);

aus $x - y = 32$ und $z = 3$ folgt $\mathbf{(x - y) \cdot z = 96}$.

c) Aus $x = 3$ und $y = 2$ und $x - y \cdot z \geq 0$ folgt $3 - 2 \cdot z \geq 0$, woraus $\mathbf{z = 1}$ **oder** $\mathbf{z = 0}$ folgt (*systematisches Erfassen* aller möglichen Fälle).

Hieraus folgt dann $\mathbf{x - y \cdot z} = 3 - 2 \cdot z \mathbf{= 1}$ (für $z = 1$) **oder** $\mathbf{x - y \cdot z = 3}$ (für $z = 0$).

Weiterhin folgt $(x - y) \cdot z = 1 \cdot z = z$, also $\mathbf{(x - y) \cdot z = 1}$ **oder** $\mathbf{(x - y) \cdot z = 0}$.

Folglich gibt es für [x; y; z; x - y·z; (x - y)·z] folgende beiden Lösungen:

[3; 2; 1; 1; 1] , [3; 2; 0; 3; 0] .

Proben nicht vergessen!

12.3) *Entdecken von Gesetzmäßigkeiten:*

a) 37 54 71 88 105 **122** **139** 156 (jeweils + 17)

b) 145 126 107 88 69 **50** **31** 12 (jeweils - 19)

c) 25 50 35 60 45 **70** **55** 80 (abwechselnd + 25 und - 13)

12.4) *Systematisches Probieren* und Verwenden einer *Tabelle; Folgern* aus den gegebenen Bedingungen; *2 Lösungswege:*

12 Aufgaben wurden **richtig**, **8** Aufgaben wurden **falsch** gelöst.

Probe nicht vergessen! Siehe Abschnitt 5.2., S. 44

12.5) *Analogie;* Verwenden eines *Mengendiagramms:*

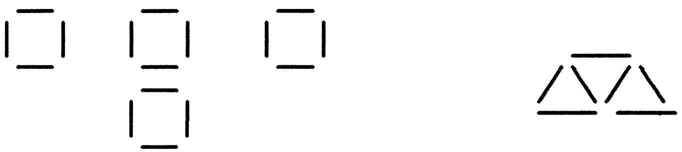
Die Schüler sollen folgende *Analogie zur Aufgabe 11.5)* erkennen:
([Schüler einer Klasse (gesucht) - Schüler einer Klasse (gesucht)] ; [AG Mathematik (13) - Ostsee (14)]; [Schulchor (15) - Alpen (10)] ; ["beides" (7) - "beides" (6)]; ["keines von beiden" (7) - "keines von beiden" (7)].

Analoger Lösungweg:

Nur "Ostsee": 14 - 6 = 8 ; nur "Alpen": 10 - 6 = 4 ; Klasse: 8 + 6 + 4 + 7 = 25 .

Es gingen **25 Schüler** in diese Klasse.

12.6) *"Findigkeit"*



12.7) Entdecken einer *Gesetzmäßigkeit:*

a) Das **3. Muster** enthält **25 Kreuze**; das **4. Muster** enthält **41 Kreuze**.

b) Das **6. Muster** enthält (5·5 + 6·6 = 25 + 36 =) **61 Kreuze**.

c) Das **10. Muster** enthält (9·9 + 10·10 = 81 + 100 =) **181 Kreuze.**
Siehe Abschnitt 5.7., S. 57

13.1) a) **2** 1 4 · 3 = 6 **4** **2** b) 3 8 **:** 7 = **5** Rest **3**

13.2) Verwenden von *Variablen; Vorwärtsarbeiten:*

a) Aus x = 3 und y = 2 und z = 1 folgt **x·y - (x + z)** = 6 - 4 **= 2**
und **x·y + (x + z)** = 6 + 4 **= 10** .

b) Aus x = 3 und y = 3 folgt x·y = 9 , wegen x·y - (x + z) = 0 also 9 - (3 + z) = 0 ,
also 3 + z = 9 und somit **z = 6** .

78

12.3) *Entdecken von Gesetzmäßigkeiten:*

a) 37 54 71 88 105 **122** **139** 156 (jeweils + 17)

b) 145 126 107 88 69 **50** **31** 12 (jeweils - 19)

c) 25 50 35 60 45 **70** **55** 80 (abwechselnd + 25 und - 13)

12.4) *Systematisches Probieren* und Verwenden einer *Tabelle; Folgern* aus den gegebenen Bedingungen; *2 Lösungswege:*

12 Aufgaben wurden **richtig**, **8** Aufgaben wurden **falsch** gelöst.

Probe nicht vergessen! Siehe Abschnitt 5.2., S. 44

12.5) *Analogie;* Verwenden eines *Mengendiagramms:*

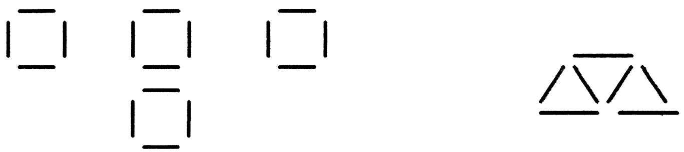
Die Schüler sollen folgende *Analogie zur Aufgabe 11.5)* erkennen:
([Schüler einer Klasse (gesucht) - Schüler einer Klasse (gesucht)] ; [AG Mathematik (13) - Ostsee (14)]; [Schulchor (15) - Alpen (10)] ; ["beides" (7) - "beides" (6)]; ["keines von beiden" (7) - "keines von beiden" (7)].

Analoger Lösungweg:

Nur "Ostsee": 14 - 6 = 8 ; nur "Alpen": 10 - 6 = 4 ; Klasse: 8 + 6 + 4 + 7 = 25 .

Es gingen **25 Schüler** in diese Klasse.

12.6) *"Findigkeit"*



12.7) Entdecken einer *Gesetzmäßigkeit:*

a) Das **3. Muster** enthält **25 Kreuze**; das **4. Muster** enthält **41 Kreuze**.

b) Das **6. Muster** enthält (5·5 + 6·6 = 25 + 36 =) **61 Kreuze**.

c) Das **10. Muster** enthält (9·9 + 10·10 = 81 + 100 =) **181 Kreuze.**
Siehe Abschnitt 5.7., S. 57

13.1) a) **2** 1 4 · 3 = 6 **4** **2** b) 3 8 **:** 7 = **5** Rest **3**

13.2) Verwenden von *Variablen; Vorwärtsarbeiten:*

a) Aus x = 3 und y = 2 und z = 1 folgt **x·y - (x + z)** = 6 - 4 **= 2**
und **x·y + (x + z)** = 6 + 4 **= 10** .

b) Aus x = 3 und y = 3 folgt x·y = 9 , wegen x·y - (x + z) = 0 also 9 - (3 + z) = 0 ,
also 3 + z = 9 und somit **z = 6** .

Hieraus folgt dann $\mathbf{x \cdot y + (x + z)} = 9 + 9 \mathbf{= 18}$.

c) Aus $x = 5$ und $z = 2$ folgt $x + z = 7$.
Wegen $x \cdot y + (x + z) = 27$ folgt hieraus $5 \cdot y + 7 = 27$, also $5 \cdot y = 20$ und somit $\mathbf{y = 4}$.
Hieraus folgt dann $\mathbf{x \cdot y - (x + z)} = 20 - 7 \mathbf{= 13}$.

d) Aus $x = 99$ und $y = 1$ folgt $x \cdot y = 99$ .und $x + z \geq 99$.
Wenn $x \cdot y - (x + z) = 99 - (x + z)$ eine Zahl sein soll, dann kann nur $x + z = 99$ gelten (Hilfsspalte einführen!).
Aus $x = 99$ und $x + z = 99$ folgt $\mathbf{z = 0}$.
Hieraus folgt dann $\mathbf{x \cdot y - (x + y)} = 99 + 99 \mathbf{= 0}$ und $\mathbf{x \cdot y + (x + y)} = 99 + 99 \mathbf{= 198}$.
Proben nicht vergessen!

13.3) *Vorwärtsarbeiten;* Verwenden einer *Tabelle*:

a) Für **100 km** werden **8 Liter**, für **600 km** werden **48 Liter** verbraucht.
Probe am Text mit Hilfe der Tabelle!

b) Er kommt **750 km** weit,

Siehe Abschnitt 5.2., S. 34

13.4) *Folgern* aus den gegebenen Bedingungen; *Skizze:*

Am Ende des 1. Tages (vor dem Abrutschen) hat die Schnecke eine Höhe von 2 m erreicht.
Jeweils 24 Stunden später ist sie 2 m - 1 m = 1 m höher gekommen, bevor sie jeweils wieder abrutscht.
Also hat sie 5 Tage nach dem Ende des ersten Tages die Höhe von
$2\text{ m} + 5 \cdot 1\text{ m} = 7\text{ m}$ erreicht.
Sie erreicht somit **am 6. Tag** die Baumspitze.
(Das folgende Abrutschen in der Nacht ist für das Ergebnis nicht mehr von Bedeutung!)

13.5) Entdecken einer *Gesetzmäßigkeit; "Findigkeit":*

a) Das dritte Quadrat einer jeden Zeile und auch das dritte Quadrat einer jeden Spalte entsteht durch *"Überlagerung"* der ersten beiden Quadrate.
Folglich ist das leere Quadrat zu füllen durch  .

b) Das dritte Quadrat einer jeden Spalte entsteht durch *"Überlagerung"* der beiden ersten Quadrate der Spalte.
Das erste Quadrat einer jeden Zeile entsteht durch *"Überlagerung"* des zweiten und des dritten Quadrats.
Folglich ist das leere Quadrat zu füllen durch  .

79

Hieraus folgt dann $\mathbf{x \cdot y + (x + z)} = 9 + 9 \mathbf{= 18}$.

c) Aus $x = 5$ und $z = 2$ folgt $x + z = 7$.
Wegen $x \cdot y + (x + z) = 27$ folgt hieraus $5 \cdot y + 7 = 27$, also $5 \cdot y = 20$ und somit $\mathbf{y = 4}$.
Hieraus folgt dann $\mathbf{x \cdot y - (x + z)} = 20 - 7 \mathbf{= 13}$.

d) Aus $x = 99$ und $y = 1$ folgt $x \cdot y = 99$ .und $x + z \geq 99$.
Wenn $x \cdot y - (x + z) = 99 - (x + z)$ eine Zahl sein soll, dann kann nur $x + z = 99$ gelten (Hilfsspalte einführen!).
Aus $x = 99$ und $x + z = 99$ folgt $\mathbf{z = 0}$.
Hieraus folgt dann $\mathbf{x \cdot y - (x + y)} = 99 + 99 \mathbf{= 0}$ und $\mathbf{x \cdot y + (x + y)} = 99 + 99 \mathbf{= 198}$.
Proben nicht vergessen!

13.3) *Vorwärtsarbeiten;* Verwenden einer *Tabelle*:

a) Für **100 km** werden **8 Liter**, für **600 km** werden **48 Liter** verbraucht.
Probe am Text mit Hilfe der Tabelle!

b) Er kommt **750 km** weit,

Siehe Abschnitt 5.2., S. 34

13.4) *Folgern* aus den gegebenen Bedingungen; *Skizze:*

Am Ende des 1. Tages (vor dem Abrutschen) hat die Schnecke eine Höhe von 2 m erreicht.
Jeweils 24 Stunden später ist sie 2 m - 1 m = 1 m höher gekommen, bevor sie jeweils wieder abrutscht.
Also hat sie 5 Tage nach dem Ende des ersten Tages die Höhe von
$2\text{ m} + 5 \cdot 1\text{ m} = 7\text{ m}$ erreicht.
Sie erreicht somit **am 6. Tag** die Baumspitze.
(Das folgende Abrutschen in der Nacht ist für das Ergebnis nicht mehr von Bedeutung!)

13.5) Entdecken einer *Gesetzmäßigkeit; "Findigkeit":*

a) Das dritte Quadrat einer jeden Zeile und auch das dritte Quadrat einer jeden Spalte entsteht durch *"Überlagerung"* der ersten beiden Quadrate.
Folglich ist das leere Quadrat zu füllen durch  .

b) Das dritte Quadrat einer jeden Spalte entsteht durch *"Überlagerung"* der beiden ersten Quadrate der Spalte.
Das erste Quadrat einer jeden Zeile entsteht durch *"Überlagerung"* des zweiten und des dritten Quadrats.
Folglich ist das leere Quadrat zu füllen durch  .

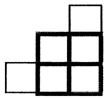
13.6) *Systematisches Ermitteln aller möglichen Fälle;* Entdecken einer *Gesetzmäßigkeit:*

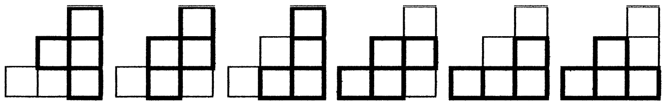
Geldbetrag in €	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Darstellungen	1	2	3	**5**	**8**	**13**	21	34	55	**89**

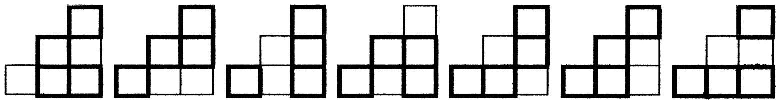
Gesetzmäßigkeit:
Ab der "3" ist jede Zahl gleich der Summe ihrer beiden Vorgänger.
10 € lassen sich auf **89 verschiedene Arten** als Summe von 1 €-Münzen und 2 €-Münzen darstellen.

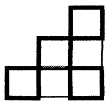
Siehe Abschnitt 5.4., S. 46

13.7) *Umformulieren* der Aufgabe; Zurückführen auf eine *Hilfsaufgabe*; *systematisches Ermitteln* aller möglichen Fälle:

a)


b)


c)


d)


Siehe Abschnitt 5.8., S. 64

14.1) a) 1 **1** **2** · 6   b) 7 7 : **9** = 8
6 7 2   Rest **5**

14.2) Verwenden von *Variablen; Vorwärtsarbeiten:*

a) Aus x = 73, y = 66 und z = 19 folgt **(x - y)·z** = 7·19 **= 133** und **3·(x + y + z)** = 3·(139 + 19) = 3·158 **= 474** .

b) Aus x = 35 und y = 17 folgt x - y = 18, Hieraus und aus (x - y)·z = 90 folgt 18·z = 90, also **z = 5** . Folglich gilt **3·(x + y + z)** = 3·(52 + 5) = 3·57 **= 171** .

c) Aus 3·(x + y + z) = 276 folgt (x + y + z) = 92 . Wegen x = 37 und y = 29 folgt hieraus 66 + z = 92 , also **z = 26** . Hieraus folgt dann **(x - y)·z** = 8·26 **= 208** . *Proben* nicht vergessen!

80

13.6) *Systematisches Ermitteln aller möglichen Fälle;* Entdecken einer *Gesetzmäßigkeit:*

Geldbetrag in €	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Darstellungen	1	2	3	**5**	**8**	**13**	21	34	55	**89**

Gesetzmäßigkeit:
Ab der "3" ist jede Zahl gleich der Summe ihrer beiden Vorgänger.
10 € lassen sich auf **89 verschiedene Arten** als Summe von 1 €-Münzen und 2 €-Münzen darstellen.

Siehe Abschnitt 5.4., S. 46

13.7) *Umformulieren* der Aufgabe; Zurückführen auf eine *Hilfsaufgabe*; *systematisches Ermitteln* aller möglichen Fälle:

a)

b)

c)

d)

Siehe Abschnitt 5.8., S. 64

14.1) a) 1 **1** **2** · 6   b) 7 7 : **9** = 8
6 7 2   Rest **5**

14.2) Verwenden von *Variablen; Vorwärtsarbeiten:*

a) Aus x = 73, y = 66 und z = 19 folgt **(x - y)·z** = 7·19 **= 133** und **3·(x + y + z)** = 3·(139 + 19) = 3·158 **= 474** .

b) Aus x = 35 und y = 17 folgt x - y = 18, Hieraus und aus (x - y)·z = 90 folgt 18·z = 90, also **z = 5** . Folglich gilt **3·(x + y + z)** = 3·(52 + 5) = 3·57 **= 171** .

c) Aus 3·(x + y + z) = 276 folgt (x + y + z) = 92 . Wegen x = 37 und y = 29 folgt hieraus 66 + z = 92 , also **z = 26** . Hieraus folgt dann **(x - y)·z** = 8·26 **= 208** . *Proben* nicht vergessen!

14.3) *Entdecken von Gesetzmäßigkeiten:*

a) 100 140 190 250 **320** **400** 490 590 ; (+ 40, + 50, + 60, + 70, ..., + 100)

b) 10 20 15 30 25 **50** **45** 90 ; (jeweils · 2 , - 5)

c) 4 9 18 23 46 **51** **102** 107 ; (jeweils + 5 , · 2)

14.4) *Vorwärtsarbeiten; Skizze:*

Die Innenkante des Plattenwegs bildet ein Rechteck mit den Seitenlängen 34 m und 13 m. (*Skizze!*)

Der Umfang dieses Rechtecks beträgt 2·(34 m + 13 m) = 94 m.

Die **Laufstrecke** beträgt (mindestens - wenn exakt an der Innenkante gelaufen wird) **94 m**.

14.5) Entdecken einer *Gesetzmäßigkeit; "Findigkeit":*

Es empfiehlt sich, die Zeichnung für dieser Aufgabe als Projektionsfolie vorzubereiten und die Schraffuren in verschiedene Farben umzusetzen. Eventuell kann man das Würfelnetz auch mit den Kindern basteln.

Die Schüler müssen erkennen, dass die jeweils sichtbaren drei Würfelflächen hinsichtlich ihrer gegenseitigen Lage nicht der Anordnung in dem Würfelnetz widersprechen dürfen.

Beim **Würfel D** haben die "leere" Seitenfläche und die "waagrecht gestreifte" Seitenfläche eine gemeinsame Kante, was nach dem Würfelnetz nicht der Fall sein kann.

Bei allen anderen Würfeln ist ein solcher Widerspruch nicht festzustellen.

14.6) *Vorwärtsarbeiten:*

In einer Stunde nähern sich die beiden Jungen um 15 km + 10 km = 25 km.

Also haben sie ihren Abstand von 50 km nach **zwei Stunden** bewältigt.

Der **Junge aus A** hat 2·15 km = **30 km** zurückgelegt.

Der **Junge aus B** hat 2·10 km = **20 km** zurückgelegt.

Probe: 30 km + 20 km = 50 km.

Zur *Zusatzaufgabe:*

Der Junge aus B erreicht 5 Stunden nach dem Start den Wendepunkt.

In dieser Zeit hat der Junge aus A schon 75 km zurückgelegt, hat also vom Rückweg schon 75 km - 50 km = 25 km geschafft.

Ihr Abstand beträgt also jetzt noch 25 km und wird in einer Stunde bewältigt.

Sie treffen sich **6 Stunden** nach dem Start zum zweiten Mal, und zwar **10 km von A entfernt**..

14.7) Verwenden von *Variablen; Vorwärtsarbeiten:*

	x	y	z	x + y - z	3·x + (y + z)	3·x - (y + z)	y + z	y - z
a)	**6** (1)	5	**2** (2)	**9** (3)	25	11		
b)	**4** (3)	**0** (2)	**0** (2)	**4** (4)	12	12	**0** (1)	
c)	8	**1** (4)	**0** (4)	9	25	**23** (2)	**1** (1)	**1** (3)

Proben nicht vergessen! Siehe Abschnitt 5.5., S. 51

81

14.3) *Entdecken von Gesetzmäßigkeiten:*

a) 100 140 190 250 **320** **400** 490 590 ; (+ 40, + 50, + 60, + 70, ..., + 100)

b) 10 20 15 30 25 **50** **45** 90 ; (jeweils · 2 , - 5)

c) 4 9 18 23 46 **51** **102** 107 ; (jeweils + 5 , · 2)

14.4) *Vorwärtsarbeiten; Skizze:*

Die Innenkante des Plattenwegs bildet ein Rechteck mit den Seitenlängen 34 m und 13 m. (*Skizze!*)

Der Umfang dieses Rechtecks beträgt 2·(34 m + 13 m) = 94 m.

Die **Laufstrecke** beträgt (mindestens - wenn exakt an der Innenkante gelaufen wird) **94 m**.

14.5) Entdecken einer *Gesetzmäßigkeit; "Findigkeit":*

Es empfiehlt sich, die Zeichnung für dieser Aufgabe als Projektionsfolie vorzubereiten und die Schraffuren in verschiedene Farben umzusetzen. Eventuell kann man das Würfelnetz auch mit den Kindern basteln.

Die Schüler müssen erkennen, dass die jeweils sichtbaren drei Würfelflächen hinsichtlich ihrer gegenseitigen Lage nicht der Anordnung in dem Würfelnetz widersprechen dürfen.

Beim **Würfel D** haben die "leere" Seitenfläche und die "waagrecht gestreifte" Seitenfläche eine gemeinsame Kante, was nach dem Würfelnetz nicht der Fall sein kann.

Bei allen anderen Würfeln ist ein solcher Widerspruch nicht festzustellen.

14.6) *Vorwärtsarbeiten:*

In einer Stunde nähern sich die beiden Jungen um 15 km + 10 km = 25 km.

Also haben sie ihren Abstand von 50 km nach **zwei Stunden** bewältigt.

Der **Junge aus A** hat 2·15 km = **30 km** zurückgelegt.

Der **Junge aus B** hat 2·10 km = **20 km** zurückgelegt.

Probe: 30 km + 20 km = 50 km.

Zur *Zusatzaufgabe:*

Der Junge aus B erreicht 5 Stunden nach dem Start den Wendepunkt.

In dieser Zeit hat der Junge aus A schon 75 km zurückgelegt, hat also vom Rückweg schon 75 km - 50 km = 25 km geschafft.

Ihr Abstand beträgt also jetzt noch 25 km und wird in einer Stunde bewältigt.

Sie treffen sich **6 Stunden** nach dem Start zum zweiten Mal, und zwar **10 km von A entfernt**..

14.7) Verwenden von *Variablen; Vorwärtsarbeiten:*

	x	y	z	x + y - z	3·x + (y + z)	3·x - (y + z)	y + z	y - z
a)	**6** (1)	5	**2** (2)	**9** (3)	25	11		
b)	**4** (3)	**0** (2)	**0** (2)	**4** (4)	12	12	**0** (1)	
c)	8	**1** (4)	**0** (4)	9	25	**23** (2)	**1** (1)	**1** (3)

Proben nicht vergessen! Siehe Abschnitt 5.5., S. 51

15.1) a) 2 **1** **8** · 3 $\;$ b) 6 2 **:** **8** = 7

6 5 4 $\qquad$ Rest **6**

15.2) Verwenden von *Variablen; Vorwärtsarbeiten; Fallunterscheidung:*

a) Aus $y = 0$ und $x - y \cdot z = 9$ folgt $x - 0 = \mathbf{x = 9}$.
Hieraus folgt dann $x - y = 9$ und wegen $(x - y) \cdot z = 0$ folgt hieraus $\mathbf{z = 0}$.

b) Aus $x = 2$ und $y = 1$ folgt $x - y \cdot z = 2 - 1 \cdot z = 2 - z \geq 0$.
Folglich kann nur einer der folgenden drei Fälle eintreten:
1. $\mathbf{z = 0}$, also $\mathbf{x - y \cdot z} = 2 - 1 \cdot 0 = \mathbf{2}$ und $\mathbf{(x - y) \cdot z} = (2 - 1) \cdot 0 = \mathbf{0}$.
2. $\mathbf{z = 1}$, also $\mathbf{x - y \cdot z} = 2 - 1 \cdot 1 = \mathbf{1}$ und $\mathbf{(x - y) \cdot z} = (2 - 1) \cdot 1 = \mathbf{1}$.
3. $\mathbf{z = 2}$, also $\mathbf{x - y \cdot z} = 2 - 1 \cdot 2 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{(x - y) \cdot z} = (2 - 1) \cdot 2 = \mathbf{2}$.

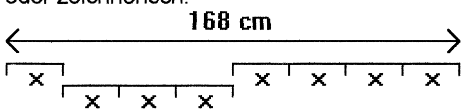
Jeder der drei Fälle liefert eine Lösung.
Also besitzt unsere Aufgabe **3 Lösungen**.

c) Aus $y = 2$ und $z = 2$ und $x - y \cdot z = 0$ folgt $x - y \cdot z = x - 4 = 0$, also $x = 4$.
Hieraus würde $(x - y) \cdot z = (4 - 2) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$ folgen, im Widerspruch zu dem gegebenen $(x - y) \cdot z = 1$.
Also besitzt unsere Aufgabe **keine Lösung**.

15.3) *Vorwärtsarbeiten:*
Länge des Tennisschlägers: 23 cm · 3 = 69 cm.
Netzhöhe: 23 cm + 69 cm = 92 cm oder 23 cm + 3·23 cm = 4·23 cm = 92 cm.
Das **Netz** ist **92 cm hoch**.

15.4) "Findigkeit":
1 h 20 min = 80 min .

15.5) Verwenden von *Variablen* und *Vorwärtsarbeiten; Skizze.*
Bezeichnet man die Läge der ersten Teilstrecke mit x und übersetzt die Aufgabe in die *Sprache der Gleichungen*, dann erhält man
$x + 3 \cdot x + 4 \cdot x = 168$
oder zeichnerisch:



Die **erste Teilstrecke** hat eine Länge von 168 cm : 8 = **21 cm**.
Die **zweite Teilstrecke** ist 3 · 21 cm = **63 cm** lang.
Die **dritte Teilstrecke** ist 4 · 21 cm = **84 cm** lang.
Probe: 21 cm + 63 cm + 84 cm = 168 cm.

82

15.1) a) 2 **1** **8** · 3 $\;$ b) 6 2 **:** **8** = 7

6 5 4 $\qquad$ Rest **6**

15.2) Verwenden von *Variablen; Vorwärtsarbeiten; Fallunterscheidung:*

a) Aus $y = 0$ und $x - y \cdot z = 9$ folgt $x - 0 = \mathbf{x = 9}$.
Hieraus folgt dann $x - y = 9$ und wegen $(x - y) \cdot z = 0$ folgt hieraus $\mathbf{z = 0}$.

b) Aus $x = 2$ und $y = 1$ folgt $x - y \cdot z = 2 - 1 \cdot z = 2 - z \geq 0$.
Folglich kann nur einer der folgenden drei Fälle eintreten:
1. $\mathbf{z = 0}$, also $\mathbf{x - y \cdot z} = 2 - 1 \cdot 0 = \mathbf{2}$ und $\mathbf{(x - y) \cdot z} = (2 - 1) \cdot 0 = \mathbf{0}$.
2. $\mathbf{z = 1}$, also $\mathbf{x - y \cdot z} = 2 - 1 \cdot 1 = \mathbf{1}$ und $\mathbf{(x - y) \cdot z} = (2 - 1) \cdot 1 = \mathbf{1}$.
3. $\mathbf{z = 2}$, also $\mathbf{x - y \cdot z} = 2 - 1 \cdot 2 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{(x - y) \cdot z} = (2 - 1) \cdot 2 = \mathbf{2}$.

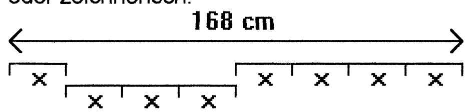
Jeder der drei Fälle liefert eine Lösung.
Also besitzt unsere Aufgabe **3 Lösungen**.

c) Aus $y = 2$ und $z = 2$ und $x - y \cdot z = 0$ folgt $x - y \cdot z = x - 4 = 0$, also $x = 4$.
Hieraus würde $(x - y) \cdot z = (4 - 2) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$ folgen, im Widerspruch zu dem gegebenen $(x - y) \cdot z = 1$.
Also besitzt unsere Aufgabe **keine Lösung**.

15.3) *Vorwärtsarbeiten:*
Länge des Tennisschlägers: 23 cm · 3 = 69 cm.
Netzhöhe: 23 cm + 69 cm = 92 cm oder 23 cm + 3·23 cm = 4·23 cm = 92 cm.
Das **Netz** ist **92 cm hoch**.

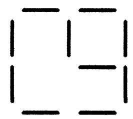
15.4) "Findigkeit":
1 h 20 min = 80 min .

15.5) Verwenden von *Variablen* und *Vorwärtsarbeiten; Skizze.*
Bezeichnet man die Läge der ersten Teilstrecke mit x und übersetzt die Aufgabe in die *Sprache der Gleichungen*, dann erhält man
$x + 3 \cdot x + 4 \cdot x = 168$
oder zeichnerisch:



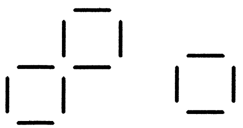
Die **erste Teilstrecke** hat eine Länge von 168 cm : 8 = **21 cm**.
Die **zweite Teilstrecke** ist 3 · 21 cm = **63 cm** lang.
Die **dritte Teilstrecke** ist 4 · 21 cm = **84 cm** lang.
Probe: 21 cm + 63 cm + 84 cm = 168 cm.

15.6) *"Findigkeit":*

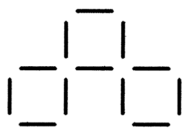


a) Genau eine Lösung:

b) Beliebig viele Lösungen:



c) Genau eine Lösung:



15.7) Einführen von zweckmäßigen *Bezeichnungen* und Übersetzen in die *Sprache der Gleichungen; "Findigkeit"*:

a) **3** leere Flaschen.

b) Die **linke** Waagschale neigt sich nach unten.

c) Die **linke** Waagschale neigt sich nach unten.

Siehe Abschnitt 5.1., S. 33 und Abschnitt 5.5., S. 54

16.1) a)
$$\begin{array}{rrrr} & 1 & \mathbf{3} & 2 \\ + & 3 & 1 & \mathbf{6} \\ + & \mathbf{1} & 4 & 1 \\ \hline & 5 & 8 & 9 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrr} & \mathbf{2} & 4 & 3 \\ + & 4 & \mathbf{0} & 4 \\ + & 2 & 6 & \mathbf{7} \\ \hline & 9 & 1 & 4 \end{array}$$

16.2) Verwenden von *Variablen*; *Vorwärtsarbeiten:*

a) Aus $x = 4$, $y = 7$ und $z = 2$ folgt
$\mathbf{x + y - z} = 4 + 7 - 2 \mathbf{= 9}$, $\mathbf{3 \cdot x + (y + z)} = 12 + 9 \mathbf{= 21}$, $\mathbf{3 \cdot x - (y + z)} = 12 - 9 \mathbf{= 3}$.

b) Aus $y = 8$ und $z = 3$ folgt $y + z = 11$ (Hilfsspalte anlegen!).
Aus $3 \cdot x - (y + z) = 19$ folgt dann $3 \cdot x = 30$ und somit $\mathbf{x = 10}$.
Hieraus folgt dann $\mathbf{x + y - z} = 10 + 8 - 3 \mathbf{= 15}$ und $\mathbf{3 \cdot x + (y + z)} = 30 - 11 \mathbf{= 41}$.

c) Aus $x = 9$ und $z = 3$ und $x + y - z = 7$ folgt $9 + y - 3 = 7$, also $y + 6 = 7$ und somit $\mathbf{y = 1}$.
Hieraus folgt dann $\mathbf{3 \cdot x + (y + z)} = 27 + 4 \mathbf{= 31}$ und $\mathbf{3 \cdot x - (y + z)} = 27 - 4 \mathbf{= 23}$.

16.3) *Vorwärtsarbeiten:*

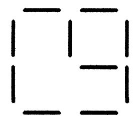
Das Doppelte der größten zweistelligen Zahl: $2 \cdot 99 = 198$

$198 - 160 = 38$

Helmut hat **38 Marken**.

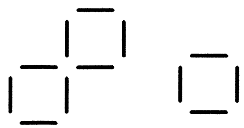
83

15.6) *"Findigkeit":*

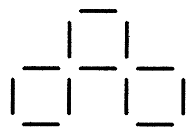


a) Genau eine Lösung:

b) Beliebig viele Lösungen:



c) Genau eine Lösung:



15.7) Einführen von zweckmäßigen *Bezeichnungen* und Übersetzen in die *Sprache der Gleichungen; "Findigkeit"*:

a) **3** leere Flaschen.

b) Die **linke** Waagschale neigt sich nach unten.

c) Die **linke** Waagschale neigt sich nach unten.

Siehe Abschnitt 5.1., S. 33 und Abschnitt 5.5., S. 54

16.1) a)
$$\begin{array}{rrrr} & 1 & \mathbf{3} & 2 \\ + & 3 & 1 & \mathbf{6} \\ + & \mathbf{1} & 4 & 1 \\ \hline & 5 & 8 & 9 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrr} & \mathbf{2} & 4 & 3 \\ + & 4 & \mathbf{0} & 4 \\ + & 2 & 6 & \mathbf{7} \\ \hline & 9 & 1 & 4 \end{array}$$

16.2) Verwenden von *Variablen*; *Vorwärtsarbeiten:*

a) Aus $x = 4$, $y = 7$ und $z = 2$ folgt
$\mathbf{x + y - z} = 4 + 7 - 2 \mathbf{= 9}$, $\mathbf{3 \cdot x + (y + z)} = 12 + 9 \mathbf{= 21}$, $\mathbf{3 \cdot x - (y + z)} = 12 - 9 \mathbf{= 3}$.

b) Aus $y = 8$ und $z = 3$ folgt $y + z = 11$ (Hilfsspalte anlegen!).
Aus $3 \cdot x - (y + z) = 19$ folgt dann $3 \cdot x = 30$ und somit $\mathbf{x = 10}$.
Hieraus folgt dann $\mathbf{x + y - z} = 10 + 8 - 3 \mathbf{= 15}$ und $\mathbf{3 \cdot x + (y + z)} = 30 - 11 \mathbf{= 41}$.

c) Aus $x = 9$ und $z = 3$ und $x + y - z = 7$ folgt $9 + y - 3 = 7$, also $y + 6 = 7$ und somit $\mathbf{y = 1}$.
Hieraus folgt dann $\mathbf{3 \cdot x + (y + z)} = 27 + 4 \mathbf{= 31}$ und $\mathbf{3 \cdot x - (y + z)} = 27 - 4 \mathbf{= 23}$.

16.3) *Vorwärtsarbeiten:*

Das Doppelte der größten zweistelligen Zahl: $2 \cdot 99 = 198$

$198 - 160 = 38$

Helmut hat **38 Marken**.

16.4) *Systematisches Probieren:*

Auf den Tellern liegen 1, 3, 5, 7, 9, 11 Pralinen.
Zusammenstellen von je zwei Tellern wie folgt: 1 und 11; 3 und 9; 5 und 7 .

16.5) *Analogie;* Verwenden eines *Mengendiagramms:*

Die Schüler sollen die *Analogie* zu den Aufgaben 11.5) und 13.5) erkennen.
Im Unterschied zu diesen Aufgaben ist die Anzahl 120 der Schüler gegeben und die Anzahl der Schüler, die keine der beiden Fremdsprachen beherrschen, gesucht,
Es sind **21 Schüler**.

Siehe Abschnitt 5.3., S. 40

16.6) *Vorwärtsarbeiten:*

Der Buchstabe O bezeichnet die Zahl **17** .

Siehe Abschnitt 5.4., S. 50

16.7) *Vorwärtsarbeiten; systematisches Ermitteln aller möglichen Fälle:*

Es gibt insgesamt (16·7 =) **112 vierstellige Zahlen**, die die gestellten Bedingungen erfüllen.

Siehe Abschnitt 5.5., S. 52

84

16.4) *Systematisches Probieren:*

Auf den Tellern liegen 1, 3, 5, 7, 9, 11 Pralinen.
Zusammenstellen von je zwei Tellern wie folgt: 1 und 11; 3 und 9; 5 und 7 .

16.5) *Analogie;* Verwenden eines *Mengendiagramms:*

Die Schüler sollen die *Analogie* zu den Aufgaben 11.5) und 13.5) erkennen.
Im Unterschied zu diesen Aufgaben ist die Anzahl 120 der Schüler gegeben und die Anzahl der Schüler, die keine der beiden Fremdsprachen beherrschen, gesucht,
Es sind **21 Schüler**.

Siehe Abschnitt 5.3., S. 40

16.6) *Vorwärtsarbeiten:*

Der Buchstabe O bezeichnet die Zahl **17** .

Siehe Abschnitt 5.4., S. 50

16.7) *Vorwärtsarbeiten; systematisches Ermitteln aller möglichen Fälle:*

Es gibt insgesamt (16·7 =) **112 vierstellige Zahlen**, die die gestellten Bedingungen erfüllen.

Siehe Abschnitt 5.5., S. 52

6.2. Lösungen zu den Aufgaben der "Aufgabensammlung"

1)
Die größte zweistellige Zahl ist 99. Der dritte Teil von 99 ist 33. 33 - 27 = **6.**

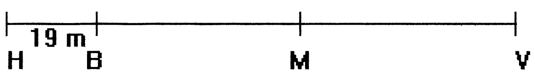
2) *Systematisches Probieren:*
Da die Malfolge der 13 kein Lehrplanstoff ist, sind die Schüler auf *systematisches Probieren* angewiesen.
Vielfache von 13 sind 13, 26, ..., 78, 91, 104,...; wobei nur die Zahl 91 = **7** · 13 zwischen 79 und 97 liegt.
Die gesuchte Zahl ist **7**.

3) *Vorwärtsarbeiten:*
Die Schwierigkeit der Aufgabe besteht eigentlich nur darin, die kleinste dreistellige Zahl, die aus drei verschiedenen Ziffern besteht, zu ermitteln. Es ist (nicht 123, sondern) 102.
Der Rest ist einfach. 102 **:** 3 = 34, 34 - 18 = 16, 16 · 7 = 112, 112 - 98 = **14**.

4) *Findigkeit:*
Hier hilft (nur notfalls!) der Impuls " Ist die neue Summe kleiner oder größer als die alte?"
Da der neue Summand um 459 - 326 = 133 größer ist als der ersetzte (und alle anderen Summanden unverändert bleiben), muss auch die neue Summe um 133 größer sein.
Die neue Summe ist 797 + 133 = **930**.

5) *Inhaltliches Schließen, systematisches Probieren:*
1. Lösungsweg: Inhaltliches Schließen
Die Summe der Zahlen von 1 bis 5 ergibt 15. Wenn die Summe der 4 Sternenden 10 ergibt, dann muss der **Mittelstern eine 5** enthalten. Nun müssen die Sternenden nur noch so belegt werden, dass die Summe der Zahlen in den gegenüberliegenden Sternen ebenfalls 5 beträgt (**2**+**3** bzw **1**+**4**).
2. Lösungsweg: Systematisches Probieren
In das Mittelfeld werden nacheinander verschiedene Zahlen eingesetzt. Nun kann man entweder versuchen, auf der Senkrechten (oder Waagerechten) 10 zu erhalten und auf der andere Linie einzusetzen, was übrigbleibt (in der Hoffnung, dass sich auch 10 ergibt), oder man setzt die verbleibenden Zahlen so ein, dass die Senkrechte und die Waagerechte die gleiche Summe (hoffentlich 10) ergeben.
Mit einigem Arbeitsaufwand wird man zu der Feststellung kommen, dass nur mit der 5 im Mittelfeld eine Lösung zu erzielen ist.

6) *Skizzen,* Verwenden von *zweckmäßigen Bezeichnungen:*
Für eine rationelle Lösungsdarstellung *"übersetzen"* wir die Aufgabenstellung aus der Alltagssprache *in die "Sprache der Geometrie"*.
Einige Kinder verschwenden viel Zeit bei dem Versuch, Haus, Baum usw. zeichnerisch ansprechend zu gestalten. Für die Lösung wesentlich sind nur Streckenlängen. Eine Tafelskizze sollte deshalb nur Strecken enthalten.



In Auswertung der gegebenen Bedingungen erhält man der Reihe nach
$\overline{BM}$ = 3·19 m = 57 m

85

6.2. Lösungen zu den Aufgaben der "Aufgabensammlung"

1)
Die größte zweistellige Zahl ist 99. Der dritte Teil von 99 ist 33. 33 - 27 = 6.

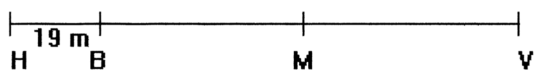
2) Systematisches Probieren:
Da die Malfolge der 13 kein Lehrplanstoff ist, sind die Schüler auf systematisches Probieren angewiesen.
Vielfache von 13 sind 13, 26, ..., 78, 91, 104,...; wobei nur die Zahl 91 = 7 · 13 zwischen 79 und 97 liegt.
Die gesuchte Zahl ist 7.

3) Vorwärtsarbeiten:
Die Schwierigkeit der Aufgabe besteht eigentlich nur darin, die kleinste dreistellige Zahl, die aus drei verschiedenen Ziffern besteht, zu ermitteln. Es ist (nicht 123, sondern) 102.
Der Rest ist einfach. 102 : 3 = 34, 34 - 18 = 16, 16 · 7 = 112, 112 - 98 = 14.

4) Findigkeit:
Hier hilft (nur notfalls!) der Impuls " Ist die neue Summe kleiner oder größer als die alte?"
Da der neue Summand um 459 - 326 = 133 größer ist als der ersetzte (und alle anderen Summanden unverändert bleiben), muss auch die neue Summe um 133 größer sein.
Die neue Summe ist 797 + 133 = 930.

5) Inhaltliches Schließen, systematisches Probieren:
1. Lösungsweg: Inhaltliches Schließen
Die Summe der Zahlen von 1 bis 5 ergibt 15. Wenn die Summe der 4 Sternenden 10 ergibt, dann muss der Mittelstern eine 5 enthalten. Nun müssen die Sternenden nur noch so belegt werden, dass die Summe der Zahlen in den gegenüberliegenden Sternen ebenfalls 5 beträgt (2+3 bzw 1+4).
2. Lösungsweg: Systematisches Probieren
In das Mittelfeld werden nacheinander verschiedene Zahlen eingesetzt. Nun kann man entweder versuchen, auf der Senkrechten (oder Waagerechten) 10 zu erhalten und auf der andere Linie einzusetzen, was übrigbleibt (in der Hoffnung, dass sich auch 10 ergibt), oder man setzt die verbleibenden Zahlen so ein, dass die Senkrechte und die Waagerechte die gleiche Summe (hoffentlich 10) ergeben.
Mit einigem Arbeitsaufwand wird man zu der Feststellung kommen, dass nur mit der 5 im Mittelfeld eine Lösung zu erzielen ist.

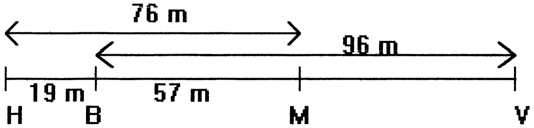
6) Skizzen, Verwenden von zweckmäßigen Bezeichnungen:
Für eine rationelle Lösungsdarstellung "übersetzen" wir die Aufgabenstellung aus der Alltagssprache in die "Sprache der Geometrie".
Einige Kinder verschwenden viel Zeit bei dem Versuch, Haus, Baum usw. zeichnerisch ansprechend zu gestalten. Für die Lösung wesentlich sind nur Streckenlängen. Eine Tafelskizze sollte deshalb nur Strecken enthalten.



In Auswertung der gegebenen Bedingungen erhält man der Reihe nach
BM = 3·19 m = 57 m

$\overline{HM} = 19\text{ m} + 57\text{ m} = 76\text{ m}$

$\overline{BV} = 76\text{ m} + 20\text{ m} = 96\text{ m}$.



Für den Teil a) gibt es nun *zwei Lösungswege*:
$\overline{MV}$ erhält man als Differenz von $\overline{HV}$ und $\overline{HM}$, wobei vorher $\overline{HV}$ noch als Summe von $\overline{HB}$ und $\overline{BV}$ zu ermitteln wäre. Wenn Schüler diesen Lösungsweg vorschlagen, wird man sie gewähren lassen und nur nachträglich fragen, ob eine einfachere Lösung möglich ist.
Im *zweiten Lösungsweg* erhält man $\overline{MV}$ sofort als Differenz von $\overline{BV}$ und $\overline{BM}$, es gilt
$\overline{MV} = 96\text{ m} - 57\text{ m} =$ **39 m.**
Der erste Lösungsweg ist zur Ermittlung von $\overline{MV}$ zwar umständlicher, liefert aber als Zwischenergebnis gleich die bei b) geforderte Länge von $\overline{HV}$ mit
$\overline{HV} = \overline{HB} + \overline{BV} =$ **115 m .**
Um möglichst viele Schüler bei der Lösung der Aufgabe aktiv einzubeziehen, lasse man solche Schüler aus den vorliegenden Ergebnissen die *Antwortsätze* formulieren, die bei der Aufgabenbesprechung nur passiv waren. Wichtig ist, dass die Lösung *aus der Sprache der Geometrie in die Alltagssprache zurückübersetzt* wird. "Die Strecke $\overline{MV}$ ist 39 m lang" ist also als Antwortsatz nicht zu akzeptieren. Wird ein solcher Antwortsatz angeboten, lasse man einen anderen Schüler die Fragestellung noch einmal vorlesen.

7)
Es ist $7 \cdot 13 = 91$, und das Ergebnis der Subtraktion soll $27 + 3 \cdot 18 = 81$ sein. Also ist der Subtrahend **10**, denn $91 - 10 = 81$.

8) *Fallunterscheidung:*
Die Aussage ist **falsch**. Die natürlichen Zahlen ab 700 sind nicht kleiner als 700, und die natürlichen Zahlen von 0 bis 699 sind nicht größer als 699.

9)
Lösungen sind das Zahlenpaar **(0,0)** und das Zahlenpaar **(2,2)**.
Probe: $0 \cdot 0 = 0$ und $0 + 0 = 0$
$2 \cdot 2 = 4$ und $2 + 2 = 4$

10)
Die gesuchte Zahl ist **0**, denn $z + 0 = z$

11)

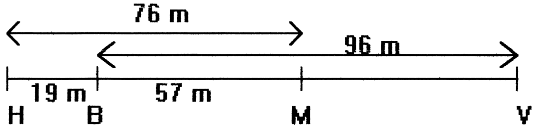
a) Die Zahl, die um 1 größer ist als 364:	**365**
b) Zahlen, die größer sind als 364:	**365, 366, 367,...**
c) Der Nachfolger von 364 :	**365**
d) Zahlen, die auf 364 folgen:	**365, 366, 367**
e) Der Vorgänger vom Nachfolger von 364:	**364**

12) 79 + 78 + 77 + 76 = **310**

86

$\overline{HM} = 19\text{ m} + 57\text{ m} = 76\text{ m}$

$\overline{BV} = 76\text{ m} + 20\text{ m} = 96\text{ m}$.



Für den Teil a) gibt es nun *zwei Lösungswege*:
$\overline{MV}$ erhält man als Differenz von $\overline{HV}$ und $\overline{HM}$, wobei vorher $\overline{HV}$ noch als Summe von $\overline{HB}$ und $\overline{BV}$ zu ermitteln wäre. Wenn Schüler diesen Lösungsweg vorschlagen, wird man sie gewähren lassen und nur nachträglich fragen, ob eine einfachere Lösung möglich ist.
Im *zweiten Lösungsweg* erhält man $\overline{MV}$ sofort als Differenz von $\overline{BV}$ und $\overline{BM}$, es gilt
$\overline{MV} = 96\text{ m} - 57\text{ m} =$ **39 m.**
Der erste Lösungsweg ist zur Ermittlung von $\overline{MV}$ zwar umständlicher, liefert aber als Zwischenergebnis gleich die bei b) geforderte Länge von $\overline{HV}$ mit
$\overline{HV} = \overline{HB} + \overline{BV} =$ **115 m .**
Um möglichst viele Schüler bei der Lösung der Aufgabe aktiv einzubeziehen, lasse man solche Schüler aus den vorliegenden Ergebnissen die *Antwortsätze* formulieren, die bei der Aufgabenbesprechung nur passiv waren. Wichtig ist, dass die Lösung *aus der Sprache der Geometrie in die Alltagssprache zurückübersetzt* wird. "Die Strecke $\overline{MV}$ ist 39 m lang" ist also als Antwortsatz nicht zu akzeptieren. Wird ein solcher Antwortsatz angeboten, lasse man einen anderen Schüler die Fragestellung noch einmal vorlesen.

7)
Es ist $7 \cdot 13 = 91$, und das Ergebnis der Subtraktion soll $27 + 3 \cdot 18 = 81$ sein. Also ist der Subtrahend **10**, denn $91 - 10 = 81$.

8) *Fallunterscheidung:*
Die Aussage ist **falsch**. Die natürlichen Zahlen ab 700 sind nicht kleiner als 700, und die natürlichen Zahlen von 0 bis 699 sind nicht größer als 699.

9)
Lösungen sind das Zahlenpaar **(0,0)** und das Zahlenpaar **(2,2)**.
Probe: $0 \cdot 0 = 0$ und $0 + 0 = 0$
$2 \cdot 2 = 4$ und $2 + 2 = 4$

10)
Die gesuchte Zahl ist **0**, denn $z + 0 = z$

11)
a) Die Zahl, die um 1 größer ist als 364: **365**
b) Zahlen, die größer sind als 364: **365, 366, 367,...**
c) Der Nachfolger von 364 : **365**
d) Zahlen, die auf 364 folgen: **365, 366, 367**
e) Der Vorgänger vom Nachfolger von 364: **364**

12) 79 + 78 + 77 + 76 = **310**

13) *Vorwärtsarbeiten (Reihenfolge der Schritte bedeutsam):*

80	180	40
60	**100**	**140**
160	**20**	**120**

Die gemeinsame Summe beträgt (80 + 180 + 40 =) 300.
Von den fehlenden Zahlen muss man zunächst die 60, dann die 100 berechnen.

14) *Tabellen*

Auch wenn der geringe Schwierigkeitsgrad der Aufgabe es nicht zwingend erfordert, sollte man auf das Festhalten von gegebenen und gesuchten Angaben in einer Tabelle nicht verzichten:

1. Jahr	21	21
2. Jahr	das Doppelte von 21	42
3. Jahr	?	?
gesamt	97	97

Nun ist leicht zu erkennen, dass $97 - 42 - 21 = \mathbf{34}$ die gesuchte Lösung sein muss. Nicht vergessen: *Probe* und einen der Fragestellung entsprechenden *Antwortsatz* fordern!

15) *Vorwärtsarbeiten:*

$63 \cdot 4 = 252$, also fahren 252 Schüler zum Wettkampf.
Wenn 252 Schüler auf 6 Busse verteilt werden, sitzen in jedem Bus $252 : 6 =$ **42 Schüler**.
Die Angabe, dass die Schüler aus 4 verschiedenen Schulen kommen, ist für die Lösung überflüssig.

16) *Vorwärtsarbeiten:*

$6 \cdot 4 = 24$ (24 Zweige)
$24 \cdot 4 = 96$ (96 Zweiglein)
$96 \cdot 3 = 288$

288 Birnen trug der Baum.

17) *Vorwärtsarbeiten:*

Größte dreistellige Zahl:	999
Summe der größten ein- und zweistelligen Zahl:	99 + 9 = 108
kleinste dreistellige Zahl mit 3 verschiedenen Ziffern (siehe Aufg. 3):	102
$999 - 7 \cdot 108 = 999 - 756 = 243$, $243 - 102 = 141$,	$141 : 3 = \mathbf{47}$

Das Foto ist **47** Jahre alt.

18) *Rechenfertigkeiten, Findigkeit:*

$3 \cdot 17 + 73 - 38 = 86$, $7 \cdot 13 + 37 - 83 = 45$, also gilt
$3 \cdot 17 + 73 - 38 > 7 \cdot 13 + 37 - 83$

Wegen der Vertauschbarkeit von Faktoren bzw. Summanden kann man feststellen, dass
$13 \cdot 7 - 14 \cdot 3 + 6 \cdot 21 - 71 = 21 \cdot 6 - 71 + 7 \cdot 13 - 3 \cdot 14$
gilt, ohne beide Terme konkret zu berechnen.
(Der gemeinsame Wert der Terme beträgt 104.)
Da 118 - 27 größer ist als 197 - 18 (und in beiden Termen jeweils der gleiche Wert $7 \cdot 13$ subtrahiert wird), gilt

$118 - 7 \cdot 13 - 27 < 197 - 7 \cdot 13 - 18$. (Durch Ausrechnen erhält man $0 < 88$.)

87

13) *Vorwärtsarbeiten (Reihenfolge der Schritte bedeutsam):*

80	180	40
60	**100**	**140**
160	**20**	**120**

Die gemeinsame Summe beträgt (80 + 180 + 40 =) 300.
Von den fehlenden Zahlen muss man zunächst die 60, dann die 100 berechnen.

14) *Tabellen*

Auch wenn der geringe Schwierigkeitsgrad der Aufgabe es nicht zwingend erfordert, sollte man auf das Festhalten von gegebenen und gesuchten Angaben in einer Tabelle nicht verzichten:

1. Jahr	21	21
2. Jahr	das Doppelte von 21	42
3. Jahr	?	?
gesamt	97	97

Nun ist leicht zu erkennen, dass $97 - 42 - 21 = \mathbf{34}$ die gesuchte Lösung sein muss. Nicht vergessen: *Probe* und einen der Fragestellung entsprechenden *Antwortsatz* fordern!

15) *Vorwärtsarbeiten:*

$63 \cdot 4 = 252$, also fahren 252 Schüler zum Wettkampf.
Wenn 252 Schüler auf 6 Busse verteilt werden, sitzen in jedem Bus $252 : 6 =$ **42 Schüler**.
Die Angabe, dass die Schüler aus 4 verschiedenen Schulen kommen, ist für die Lösung überflüssig.

16) *Vorwärtsarbeiten:*

$6 \cdot 4 = 24$ (24 Zweige)
$24 \cdot 4 = 96$ (96 Zweiglein)
$96 \cdot 3 = 288$

288 Birnen trug der Baum.

17) *Vorwärtsarbeiten:*

Größte dreistellige Zahl:	999
Summe der größten ein- und zweistelligen Zahl:	99 + 9 = 108
kleinste dreistellige Zahl mit 3 verschiedenen Ziffern (siehe Aufg. 3):	102
$999 - 7 \cdot 108 = 999 - 756 = 243$, $243 - 102 = 141$,	$141 : 3 = \mathbf{47}$

Das Foto ist **47** Jahre alt.

18) *Rechenfertigkeiten, Findigkeit:*

$3 \cdot 17 + 73 - 38 = 86$, $7 \cdot 13 + 37 - 83 = 45$, also gilt
$3 \cdot 17 + 73 - 38 > 7 \cdot 13 + 37 - 83$

Wegen der Vertauschbarkeit von Faktoren bzw. Summanden kann man feststellen, dass
$13 \cdot 7 - 14 \cdot 3 + 6 \cdot 21 - 71 = 21 \cdot 6 - 71 + 7 \cdot 13 - 3 \cdot 14$
gilt, ohne beide Terme konkret zu berechnen.
(Der gemeinsame Wert der Terme beträgt 104.)
Da 118 - 27 größer ist als 197 - 18 (und in beiden Termen jeweils der gleiche Wert $7 \cdot 13$ subtrahiert wird), gilt

$118 - 7 \cdot 13 - 27 < 197 - 7 \cdot 13 - 18$. (Durch Ausrechnen erhält man $0 < 88$.)

In der letzten Teilaufgabe lassen sich mit etwas Aufwand beide Terme berechnen:
$42 \cdot 9 + 3 \cdot 77 - 18 \cdot 7 = 378 + 231 - 126 = 483$ und
$6 \cdot 63 + 7 \cdot 33 - 14 \cdot 9 = 378 + 231 - 126 = 483$,
also gilt auch hier das **Gleichheitszeichen** zwischen beiden Termen:
$42 \cdot 9 + 3 \cdot 77 - 18 \cdot 7 \mathbf{=} 6 \cdot 63 + 7 \cdot 33 - 14 \cdot 9$
Aufmerksame Schüler werden nachträglich bemerken, dass $42 \cdot 9 = 6 \cdot 63$, $3 \cdot 77 = 7 \cdot 33$ und $18 \cdot 7 = 14 \cdot 9$ gilt. Sehr findige Schüler werden dies vielleicht schon vorher bei $3 \cdot 77$ und $7 \cdot 33$ erkennen und dann zielgerichtet unter den restlichen Produkten nach Gleichheiten suchen.

19)

100 - **99** = 1

20) *Systematisches Probieren:*

a) 42 + **9** = 51

b) Hier ist es zweckmäßig, durch systematisches Probieren die Möglichkeiten zuerst für $17 \cdot \square$ zu bestimmen (0, 1 und 2) und danach den davorstehenden Summanden zu ergänzen.
Im umgekehrten Fall sollten die Kinder bemerken, dass das beim fehlenden Summanden beginnende systematische Probieren (0, 1, 2, 3 ... einsetzen) meist keine Lösung liefert, weil sich selten als fehlender Rest ein Vielfaches von 17 ergibt. Das ist auch der Grund dafür, dass durch unsystematisches Probieren kaum ein Schüler alle drei Lösungen finden wird.

25 + 19 + **34** + 17 · **0** + 2 = 80
25 + 19 + **17** + 17 · **1** + 2 = 80
25 + 19 + **0** + 17 · **2** + 2 = 80

21) *Vorwärtsarbeiten:*
Das Prinzip ist einfach. In jeder Teilaufgabe, wo zwei Zahlen bekannt sind, lässt sich die fehlende dritte Zahl durch eine entsprechende Addition oder Subtraktion finden. Dabei hat man bei a) zu Beginn zwei Startmöglichkeiten, bei b) sogar drei.

a)

40	+	**57**	=	97
-		-		-
9	+	29	=	**38**
=		=		=
31	+	**28**	=	59

b)

139	+	**208**	=	347
-		-		-
91	+	**87**	=	178
=		=		=
48	+	**121**	=	**169**

22) *Vorwärtsarbeiten (Reihenfolge der Schritte bedeutsam:*
Die Aufgabe kann nur "von unten nach oben" gelöst werden. Als erstes ergibt sich die Aufgabe $6 = (5 + \square) : 2$, daraus ergibt sich für das untere Leerfeld eine **7**. Mit dieser 7 folgt $\square = (7 + 9) : 2$, in das mittlere Leerfeld muss also die **8**. Oben gilt dann $\square = (6 + 8) : 2$, man erhält **7**.

7
6 **8**
5 **7** 9

88

In der letzten Teilaufgabe lassen sich mit etwas Aufwand beide Terme berechnen:
$42 \cdot 9 + 3 \cdot 77 - 18 \cdot 7 = 378 + 231 - 126 = 483$ und
$6 \cdot 63 + 7 \cdot 33 - 14 \cdot 9 = 378 + 231 - 126 = 483$,
also gilt auch hier das **Gleichheitszeichen** zwischen beiden Termen:
$42 \cdot 9 + 3 \cdot 77 - 18 \cdot 7 \mathbf{=} 6 \cdot 63 + 7 \cdot 33 - 14 \cdot 9$
Aufmerksame Schüler werden nachträglich bemerken, dass $42 \cdot 9 = 6 \cdot 63$, $3 \cdot 77 = 7 \cdot 33$ und $18 \cdot 7 = 14 \cdot 9$ gilt. Sehr findige Schüler werden dies vielleicht schon vorher bei $3 \cdot 77$ und $7 \cdot 33$ erkennen und dann zielgerichtet unter den restlichen Produkten nach Gleichheiten suchen.

19)

100 - **99** = 1

20) *Systematisches Probieren:*

a) 42 + **9** = 51

b) Hier ist es zweckmäßig, durch systematisches Probieren die Möglichkeiten zuerst für $17 \cdot \square$ zu bestimmen (0, 1 und 2) und danach den davorstehenden Summanden zu ergänzen.
Im umgekehrten Fall sollten die Kinder bemerken, dass das beim fehlenden Summanden beginnende systematische Probieren (0, 1, 2, 3 ... einsetzen) meist keine Lösung liefert, weil sich selten als fehlender Rest ein Vielfaches von 17 ergibt. Das ist auch der Grund dafür, dass durch unsystematisches Probieren kaum ein Schüler alle drei Lösungen finden wird.

25 + 19 + **34** + 17 · **0** + 2 = 80
25 + 19 + **17** + 17 · **1** + 2 = 80
25 + 19 + **0** + 17 · **2** + 2 = 80

21) *Vorwärtsarbeiten:*
Das Prinzip ist einfach. In jeder Teilaufgabe, wo zwei Zahlen bekannt sind, lässt sich die fehlende dritte Zahl durch eine entsprechende Addition oder Subtraktion finden. Dabei hat man bei a) zu Beginn zwei Startmöglichkeiten, bei b) sogar drei.

a)

40	+	**57**	=	97
-		-		-
9	+	29	=	**38**
=		=		=
31	+	**28**	=	59

b)

139	+	**208**	=	347
-		-		-
91	+	**87**	=	178
=		=		=
48	+	**121**	=	**169**

22) *Vorwärtsarbeiten (Reihenfolge der Schritte bedeutsam:*
Die Aufgabe kann nur "von unten nach oben" gelöst werden. Als erstes ergibt sich die Aufgabe $6 = (5 + \square) : 2$, daraus ergibt sich für das untere Leerfeld eine **7**. Mit dieser 7 folgt $\square = (7 + 9) : 2$, in das mittlere Leerfeld muss also die **8**. Oben gilt dann $\square = (6 + 8) : 2$, man erhält **7**.

7
6 **8**
5 **7** 9

23) *Vorwärtsarbeiten:*
Für die Schüler naheliegend ist, den Preis eines Umschlags zu ermitteln und dann zu berechnen, wie oft dieser Preis im Gesamtpreis enthalten ist.

2,50 € : 5 = 0,50 €. Ein Umschlag kostet 0,50 €.

Zwei Umschläge kosten dann 1 €, also erhält man für 12 € 24 Umschläge und für 12,50 € **25 Umschläge.**
Wer erkennt, dass 12,50 € das Fünffache von 2,50 € ist, kommt noch schneller zum Ziel: Für 5 Schutzumschläge bezahlt man 2,50 €, also erhält man für fünfmal 2,50 € auch fünfmal 5 Umschläge.

24) *Tabellen*
In der Auswertung dieser Aufgabe kann folgendes Tafelbild entstehen:

November: **30** Tage

· 10

Zeit	3 Tage	30 Tage
Bartlänge	1 mm	**?**

In der zehnfachen Zeit ist zu erwarten, dass auch der Bart zehnmal so lang wird.
Der Bart wächst um durchschnittlich **10 mm**.

25) *Systematisches Probieren:*

Der Blumentopf kostet **1 €** und die Pflanze kostet **11€**.
Anderslautende Lösungen sollen die Schüler selbst durch eine *Probe* widerlegen.
Eine ausführlichere Beschreibung zum Lösen dieses Aufgabentyps findet man im vorherigen Abschnitt 6.1 bei der Besprechung des Aufgabenblattes 10 (Aufgaben 10.2 und 10.3).

26) *Tabellen:*
Als Hilfsmittel bietet sich eine Tabelle vor allem deshalb an, weil damit beide möglichen Lösungswege verdeutlicht werden können (2,34 € als Summe von 0,78 € und 1,56 € oder 2,34 € als 6-facher Einzelpreis). Je nachdem, welchen der beiden Wege man für das Zwischenergebnis 2,34 € verwendet hat, wird man den anderen Weg als Probe für das Zwischenergebnis verwenden.

Inge	2 · 0,39 €	0,78 €
Anja	4 · 0,39 €	1,56 €
Summe	6 · 0,39 €	2,34 €
gegeben		5,00 €
Rückgeld	5,00 € - 2,34 €	**2,66 €**

Auch hier muss darauf geachtet werden, dass die Schüler in der Lage sind, aus den vielen Angaben in der Tabelle am Ende die für den Antwortsatz entscheidende auszuwählen.

27) *Vorwärtsarbeiten, Tabellen:*

2·15 € + 15 € : 2 + 9 € = 46,50 €, 50 € - 46,50 € = **3,50 €**
Herr Wagner bekommt 3,50 € zurück.
Wie in Aufgabe 26) gezeigt, ist auch hier eine *analoge Darstellung* der Aufgabe in Tabellenform möglich.

89

23) *Vorwärtsarbeiten:*
Für die Schüler naheliegend ist, den Preis eines Umschlags zu ermitteln und dann zu berechnen, wie oft dieser Preis im Gesamtpreis enthalten ist.

2,50 € : 5 = 0,50 €. Ein Umschlag kostet 0,50 €.

Zwei Umschläge kosten dann 1 €, also erhält man für 12 € 24 Umschläge und für 12,50 € **25 Umschläge.**
Wer erkennt, dass 12,50 € das Fünffache von 2,50 € ist, kommt noch schneller zum Ziel: Für 5 Schutzumschläge bezahlt man 2,50 €, also erhält man für fünfmal 2,50 € auch fünfmal 5 Umschläge.

24) *Tabellen*
In der Auswertung dieser Aufgabe kann folgendes Tafelbild entstehen:

November: **30** Tage

· 10

Zeit	3 Tage	30 Tage
Bartlänge	1 mm	**?**

In der zehnfachen Zeit ist zu erwarten, dass auch der Bart zehnmal so lang wird.
Der Bart wächst um durchschnittlich **10 mm**.

25) *Systematisches Probieren:*

Der Blumentopf kostet **1 €** und die Pflanze kostet **11€**.
Anderslautende Lösungen sollen die Schüler selbst durch eine *Probe* widerlegen.
Eine ausführlichere Beschreibung zum Lösen dieses Aufgabentyps findet man im vorherigen Abschnitt 6.1 bei der Besprechung des Aufgabenblattes 10 (Aufgaben 10.2 und 10.3).

26) *Tabellen:*
Als Hilfsmittel bietet sich eine Tabelle vor allem deshalb an, weil damit beide möglichen Lösungswege verdeutlicht werden können (2,34 € als Summe von 0,78 € und 1,56 € oder 2,34 € als 6-facher Einzelpreis). Je nachdem, welchen der beiden Wege man für das Zwischenergebnis 2,34 € verwendet hat, wird man den anderen Weg als Probe für das Zwischenergebnis verwenden.

Inge	2 · 0,39 €	0,78 €
Anja	4 · 0,39 €	1,56 €
Summe	6 · 0,39 €	2,34 €
gegeben		5,00 €
Rückgeld	5,00 € - 2,34 €	**2,66 €**

Auch hier muss darauf geachtet werden, dass die Schüler in der Lage sind, aus den vielen Angaben in der Tabelle am Ende die für den Antwortsatz entscheidende auszuwählen.

27) *Vorwärtsarbeiten, Tabellen:*

2·15 € + 15 € : 2 + 9 € = 46,50 €, 50 € - 46,50 € = **3,50 €**
Herr Wagner bekommt 3,50 € zurück.
Wie in Aufgabe 26) gezeigt, ist auch hier eine *analoge Darstellung* der Aufgabe in Tabellenform möglich.

28) *Vorwärtsarbeiten, Tabellen:*
Wegen der Mischung von Einzel- und Gesamtpreisen sollte aus Gründen der Übersichtlichkeit hier keinesfalls auf eine Tabelle verzichtet werden.

	Einzelpreis	Gesamtpreis
3 Cola	2,40€	7,20 €
1 Bier	3,25 €	3,25 €
2 Vorspeisen	4,80 €	9,60 €
4 Hauptgerichte	XXXXXXX	52,56 €
Summe		**72,61 €**

Ihre Rechnung betrug **72,61 €**.

29) *Rechenfertigkeiten:*

6·200 € + 11·100 € + 5·50 € + 3·2 € = 2556 €.
2556 € hat sie gewonnen.

30)

98 Cent sind nicht durch 3 teilbar.

31) *Folgern aus den Bedingungen:*

2255 m - 1415 m = **840 m**
Das Ziel lag 840 m höher als der Start. (Die Angabe der Streckenlänge ist eine überflüssige Bedingung.)

32) *Tabellen, systematisches Probieren:*
Nach der 1. Bedingung muss die Anzahl der Vögel um 1 größer sein als die Anzahl der Bäume.
Nun kann man systematisch probieren.
Vereinfacht wird dies noch, wenn man erkennt, dass die Anzahl der Vögel eine gerade Zahl sein muss, da sie sich paarweise (ohne Rest) setzen können.

Bäume	Vögel	Vogelpaare	Auswertung (Bäume und Paare)
1	2	1	alle Bäume belegt
3	4	2	**1 Baum frei**
5	6	3	2 Bäume frei
7	8	4	3 Bäume frei

Es sind **3 Bäume und 4 Vögel**, weil nur in diesem Fall 1 Baum ohne Vogelpaar ist.

33) *Zweckmäßige Bezeichnungen:*

Beteiligt: F, P, R und K

Angaben zur Reihenfolge:
Sieger < P < F,
F= P + 10 s
K = P + 4 s

Sieger < P < K < F

Der Sieger muss Ralf sein. Er war 5 s schneller als Petra.

Die Zeiten sind in Reihenfolge:

Ralf: 0:58, Petra:1:03, Karin: 1:07, Frank: 1:13.

90

28) *Vorwärtsarbeiten, Tabellen:*
Wegen der Mischung von Einzel- und Gesamtpreisen sollte aus Gründen der Übersichtlichkeit hier keinesfalls auf eine Tabelle verzichtet werden.

	Einzelpreis	Gesamtpreis
3 Cola	2,40€	7,20 €
1 Bier	3,25 €	3,25 €
2 Vorspeisen	4,80 €	9,60 €
4 Hauptgerichte	XXXXXXX	52,56 €
Summe		**72,61 €**

Ihre Rechnung betrug **72,61 €**.

29) *Rechenfertigkeiten:*

6·200 € + 11·100 € + 5·50 € + 3·2 € = 2556 €.
2556 € hat sie gewonnen.

30)

98 Cent sind nicht durch 3 teilbar.

31) *Folgern aus den Bedingungen:*

2255 m - 1415 m = **840 m**
Das Ziel lag 840 m höher als der Start. (Die Angabe der Streckenlänge ist eine überflüssige Bedingung.)

32) *Tabellen, systematisches Probieren:*
Nach der 1. Bedingung muss die Anzahl der Vögel um 1 größer sein als die Anzahl der Bäume.
Nun kann man systematisch probieren.
Vereinfacht wird dies noch, wenn man erkennt, dass die Anzahl der Vögel eine gerade Zahl sein muss, da sie sich paarweise (ohne Rest) setzen können.

Bäume	Vögel	Vogelpaare	Auswertung (Bäume und Paare)
1	2	1	alle Bäume belegt
3	4	2	**1 Baum frei**
5	6	3	2 Bäume frei
7	8	4	3 Bäume frei

Es sind **3 Bäume und 4 Vögel**, weil nur in diesem Fall 1 Baum ohne Vogelpaar ist.

33) *Zweckmäßige Bezeichnungen:*

Beteiligt: F, P, R und K

Angaben zur Reihenfolge:
Sieger < P < F,
F= P + 10 s
K = P + 4 s

Sieger < P < K < F

Der Sieger muss Ralf sein. Er war 5 s schneller als Petra.

Die Zeiten sind in Reihenfolge:

Ralf: 0:58, Petra:1:03, Karin: 1:07, Frank: 1:13.

34) *Folgern aus den Bedingungen:*

Ein Spiel dauert mit Halbzeitpause 20 min + 10 min + 20 min = 50 min.
Drei Spiele dauern 150 min.
Dazwischen liegen 2 Pausen mit je 15 min, also ingesamt 30 min Pause.
Das letzte Spiel ist 150 min + 30 min = 180 min (bzw 3 h) nach Turnierbeginn zu Ende
3 Stunden nach 14 Uhr ist es 17 Uhr.
Das letzte Spiel endet **17 Uhr**.

35) *Folgern aus den Bedingungen:*

1 Arbeiter schafft in 1 Stunde 10 Säcke, dann schafft er in 2 Stunden 20 Säcke.
In dieser Zeit schafft die Maschine 400 Säcke, also das Zwanzigfache.
Sie verrichtet die Arbeit von **20 Arbeitern.**

36) *Folgern aus den Bedingungen:*

Er muss jede der Anzahlen 1, 2, 3, 4, 5 genau einmal verwenden, also hat er
1 + 2 + 3 + 4 + 5 = **15 Patronen** bei sich.

37) *Verwenden zweckmäßiger Bezeichnungen, Analogie:*

Mein Vater ist 42 Jahre alt.
Er ist zwei Jahre älter als meine Mutter. Also: **M = 40**
Meine Mutter ist doppelt so alt wie mein
Bruder und ich zusammen. Also: U + B = 40:2 = 20
Ich bin zwei Jahre jünger als mein Bruder. Also: U = B - 2
U + B =20 und U = B - 2 wird nur erfüllt, wenn **U = 9** und **B = 11** gilt.
[Vergleiche Aufgabe 25) und die Aufgaben 10.2) und 10.3) der Aufgabenblätter]

38) *Problemtransformation:*

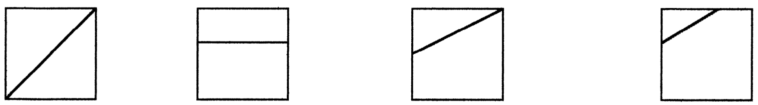
Die Aufgabe kann umgewandelt werden:
Auf wie viele Arten lassen sich 12, 13 und 14 als Produkt zweier Faktoren darstellen ?

a) 3 Möglichkeiten (12·1, 6·2, 4·3)
Vertauschen der Faktoren bringt keine neue Form !

b) 1 Möglichkeit (13·1)

c) 2 Möglichkeiten (14·1, 7·2)

39) *Findigkei:*



zwei Dreiecke | zwei Rechtecke | ein Dreieck und ein Viereck | ein Dreieck und ein Fünfeck

40)

36 cm : 4 = 9 cm. Eine Quadratseite ist **9 cm** lang.

41) *Vorwärtsarbeiten:*

2·75 mm + 2·45 mm = 150 mm + 90 mm = 240 mm
240 mm = 24 cm
Die Summe aller Seiten beträgt **24 cm**.

91

34) *Folgern aus den Bedingungen:*

Ein Spiel dauert mit Halbzeitpause 20 min + 10 min + 20 min = 50 min.
Drei Spiele dauern 150 min.
Dazwischen liegen 2 Pausen mit je 15 min, also ingesamt 30 min Pause.
Das letzte Spiel ist 150 min + 30 min = 180 min (bzw 3 h) nach Turnierbeginn zu Ende
3 Stunden nach 14 Uhr ist es 17 Uhr.
Das letzte Spiel endet **17 Uhr**.

35) *Folgern aus den Bedingungen:*

1 Arbeiter schafft in 1 Stunde 10 Säcke, dann schafft er in 2 Stunden 20 Säcke.
In dieser Zeit schafft die Maschine 400 Säcke, also das Zwanzigfache.
Sie verrichtet die Arbeit von **20 Arbeitern.**

36) *Folgern aus den Bedingungen:*

Er muss jede der Anzahlen 1, 2, 3, 4, 5 genau einmal verwenden, also hat er
1 + 2 + 3 + 4 + 5 = **15 Patronen** bei sich.

37) *Verwenden zweckmäßiger Bezeichnungen, Analogie:*

Mein Vater ist 42 Jahre alt.
Er ist zwei Jahre älter als meine Mutter. Also: **M = 40**
Meine Mutter ist doppelt so alt wie mein
Bruder und ich zusammen. Also: U + B = 40:2 = 20
Ich bin zwei Jahre jünger als mein Bruder. Also: U = B - 2
U + B =20 und U = B - 2 wird nur erfüllt, wenn **U = 9** und **B = 11** gilt.
[Vergleiche Aufgabe 25) und die Aufgaben 10.2) und 10.3) der Aufgabenblätter]

38) *Problemtransformation:*

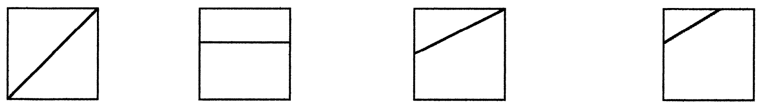
Die Aufgabe kann umgewandelt werden:
Auf wie viele Arten lassen sich 12, 13 und 14 als Produkt zweier Faktoren darstellen ?

a) 3 Möglichkeiten (12·1, 6·2, 4·3)
Vertauschen der Faktoren bringt keine neue Form !

b) 1 Möglichkeit (13·1)

c) 2 Möglichkeiten (14·1, 7·2)

39) *Findigkei:*



zwei Dreiecke | zwei Rechtecke | ein Dreieck und ein Viereck | ein Dreieck und ein Fünfeck

40)

36 cm : 4 = 9 cm. Eine Quadratseite ist **9 cm** lang.

41) *Vorwärtsarbeiten:*

2·75 mm + 2·45 mm = 150 mm + 90 mm = 240 mm
240 mm = 24 cm
Die Summe aller Seiten beträgt **24 cm**.

42)

a) **Rechteck**

b) **4 Dreiecke**

43) *Rückwärtsarbeiten:*
Es ist zwar in dieser Aufgabe nicht unbedingt notwendig, die Strategie des *Rückwärtsarbeitens* anzuwenden, aber es ist möglich. Da es in Klasse 3 wenig Aufgaben gibt, mit denen man diese Strategie den Schülern vermitteln kann, sollte man jede sich bietende Chance nutzen. Unser Impuls lautet:

- Woraus ließe sich die Anzahl der fehlenden Würfel ermitteln?
  [Aus den Anzahlen in dem großen Würfel und in der Restfigur]
- Wie lassen sich diese Anzahlen leicht bestimmen?
  [schichtenweises Abzählen]

Der große Würfel hat 3 Schichten mit je 9 kleinen Würfeln, also 27 Würfel.
Die Restfigur besteht aus 9 + 1 + 1 = 11 Würfeln.
27 - 11 = 16.
16 Würfel fehlen zum großen Würfel.

44) *Findigkeit:*

Unmöglich. Das Netz hat nur 5 Flächen.

45) *Systematisches Probieren, Rückführung auf Hilfsaufgabe:*

Es gibt eine große Anzahl möglicher Eintragungen.
Wenn man die ersten 4 Kreuze "im Block" in eine Ecke setzt, sind auf einen Schlag 2 Zeilen und 2 Spalten mit der erlaubten Kästchenzahl belegt. (Abb. 1)

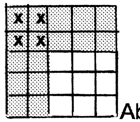


Abb. 1

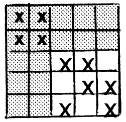


Abb. 2

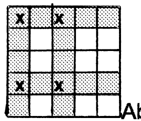


Abb. 3

Das Problem reduziert sich damit auf die *Hilfsaufgabe:*
"Trage 6 Kreuze in ein 3x3-Quadrat so ein, dass in jeder Zeile und Spalte zwei Kästchen angekreuzt sind!"
Zu dieser Hilfsaufgabe gibt es eine noch einfachere *Hilfsaufgabe*:
Wenn 2 von 3 Kästchen einer Zeile/Spalte angekreuzt sein sollen, muss genau ein Feld der Zeile/Spalte frei bleiben.
Eine mögliche Lösung dieser Hilfsaufgabe zeigt Abb. 2.
Das Prinzip funktioniert auch dann noch, wenn die ersten vier Kreuze nicht im Block, sondern in einem größeren Rechteck gesetzt werden (Abb. 3).

46) *Fallunterscheidung:*

An der Zehnerstelle steht die 5 bei den Zahlen 50, 51, ..., 59, also 10 mal.
An der Einerstelle steht die 5 bei den Zahlen 5, 15, ..., 95, also 10 mal.
Die 5 wird **20** mal geschrieben.

47) *Systematisches Probieren:*

11, 12, 13; 21, 22, 23; 31, 32, 33
Es sind 9 Zahlen

92

42)

a) **Rechteck**

b) **4 Dreiecke**

43) *Rückwärtsarbeiten:*
Es ist zwar in dieser Aufgabe nicht unbedingt notwendig, die Strategie des *Rückwärtsarbeitens* anzuwenden, aber es ist möglich. Da es in Klasse 3 wenig Aufgaben gibt, mit denen man diese Strategie den Schülern vermitteln kann, sollte man jede sich bietende Chance nutzen. Unser Impuls lautet:

- Woraus ließe sich die Anzahl der fehlenden Würfel ermitteln?
  [Aus den Anzahlen in dem großen Würfel und in der Restfigur]
- Wie lassen sich diese Anzahlen leicht bestimmen?
  [schichtenweises Abzählen]

Der große Würfel hat 3 Schichten mit je 9 kleinen Würfeln, also 27 Würfel.
Die Restfigur besteht aus 9 + 1 + 1 = 11 Würfeln.
27 - 11 = 16.
16 Würfel fehlen zum großen Würfel.

44) *Findigkeit:*

Unmöglich. Das Netz hat nur 5 Flächen.

45) *Systematisches Probieren, Rückführung auf Hilfsaufgabe:*

Es gibt eine große Anzahl möglicher Eintragungen.
Wenn man die ersten 4 Kreuze "im Block" in eine Ecke setzt, sind auf einen Schlag 2 Zeilen und 2 Spalten mit der erlaubten Kästchenzahl belegt. (Abb. 1)

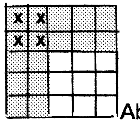


Abb. 1

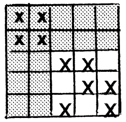


Abb. 2

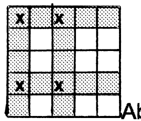


Abb. 3

Das Problem reduziert sich damit auf die *Hilfsaufgabe:*
"Trage 6 Kreuze in ein 3x3-Quadrat so ein, dass in jeder Zeile und Spalte zwei Kästchen angekreuzt sind!"
Zu dieser Hilfsaufgabe gibt es eine noch einfachere *Hilfsaufgabe*:
Wenn 2 von 3 Kästchen einer Zeile/Spalte angekreuzt sein sollen, muss genau ein Feld der Zeile/Spalte frei bleiben.
Eine mögliche Lösung dieser Hilfsaufgabe zeigt Abb. 2.
Das Prinzip funktioniert auch dann noch, wenn die ersten vier Kreuze nicht im Block, sondern in einem größeren Rechteck gesetzt werden (Abb. 3).

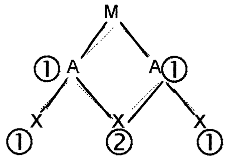
46) *Fallunterscheidung:*

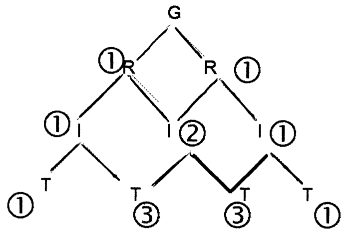
An der Zehnerstelle steht die 5 bei den Zahlen 50, 51, ..., 59, also 10 mal.
An der Einerstelle steht die 5 bei den Zahlen 5, 15, ..., 95, also 10 mal.
Die 5 wird **20** mal geschrieben.

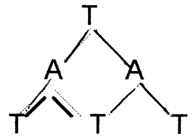
47) *Systematisches Probieren:*

11, 12, 13; 21, 22, 23; 31, 32, 33
Es sind 9 Zahlen

48) *Systematisches Probieren, Erkennen einer Gesetzmäßigkeit, Findigkeit:*







Von M ausgehend erreicht man irgendein X auf insgesamt 1 + 2 + 1 = 4 Wegen. Um dies zu verdeutlichen, wurde an jedem Knotenpunkt notiert, auf wie vielen Wegen er zu erreichen ist.
Bei dem Wort GRIT erreicht man von G aus auf (1 + 3 + 3 + 1 =) 8 Wegen ein T.
Begabte Schüler erkennen vielleicht, dass die Anzahl der an einem beliebigen Knotenpunkt ankommenden Wege gleich der Summe der Anzahlen von dort ist, wo diese Wege herkommen (bei GRIT fett markiertes Beispiel: 2 + 1 = 3)
Besondere *Findigkeit* beweisen die Schüler, die bei dem Wort TAT erkennen, dass es außer den 4 Wegen wie bei **MAX** auch die gleichen 4 Wege in der entgegengesetzten Richtung gibt, und dass das Wort TAT auch in der unteren Reihe (Beispiel fett hervorgehoben) an zwei Stellen entsteht (und ebenfalls jeweils vorwärts und rückwärts gelesen werden kann). Man kann lesen:

MAX: 4 mal GRIT: 8 mal TAT: 12 mal

49) *Findigkeit:*
Die Aufgabe ist rechnerisch anspruchslos, führt aber durch oberflächliche Betrachtung sehr häufig zu falschen Antworten.
Wenn Marie drei Brüder und zwei Schwestern hat, gibt es in der Familie mit ihr 3 Mädchen und 3 Jungen. Ihr Bruder hat dann also noch **zwei** Brüder und **drei** Schwestern.

50) *Systematisches Probieren, Tabellen:*
Wenn der Junge so viel Schwestern wie Brüder hat, sind es mit ihm 1 Junge mehr als Mädchen.
Nun werden in einer *Tabelle* der Reihe nach die Möglichkeiten dafür erfasst.

		1 Mädchen hat dann:		
Jungen	Mädchen	Schwestern	Brüder	S = B : 2 ?
2	1	0	2	nein
3	2	1	3	nein
4	3	2	4	**ja**
5	4	3	5	nein

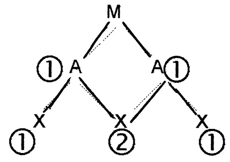
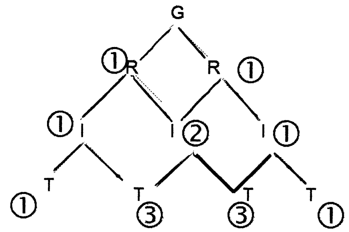
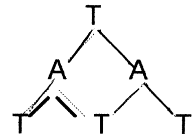
a) Die Familie hat **7 Kinder**.

b) Es sind **4 Jungen und 3 Mädchen**.

51) *Fallunterscheidung, zweckmäßige Bezeichnung:*
Zur Veranschaulichung der möglichen Sitzordnungen verwenden wir günstigerweise die Anfangsbuchstaben. Da B direkt neben G sitzt, sind (bis auf das Vertauschen der Reihenfolge) folgende *Fälle* möglich:

93

48) *Systematisches Probieren, Erkennen einer Gesetzmäßigkeit, Findigkeit:*

Von M ausgehend erreicht man irgendein X auf insgesamt 1 + 2 + 1 = 4 Wegen. Um dies zu verdeutlichen, wurde an jedem Knotenpunkt notiert, auf wie vielen Wegen er zu erreichen ist.
Bei dem Wort GRIT erreicht man von G aus auf (1 + 3 + 3 + 1 =) 8 Wegen ein T.
Begabte Schüler erkennen vielleicht, dass die Anzahl der an einem beliebigen Knotenpunkt ankommenden Wege gleich der Summe der Anzahlen von dort ist, wo diese Wege herkommen (bei GRIT fett markiertes Beispiel: 2 + 1 = 3)
Besondere *Findigkeit* beweisen die Schüler, die bei dem Wort TAT erkennen, dass es außer den 4 Wegen wie bei **MAX** auch die gleichen 4 Wege in der entgegengesetzten Richtung gibt, und dass das Wort TAT auch in der unteren Reihe (Beispiel fett hervorgehoben) an zwei Stellen entsteht (und ebenfalls jeweils vorwärts und rückwärts gelesen werden kann). Man kann lesen:

MAX: 4 mal GRIT: 8 mal TAT: 12 mal

49) *Findigkeit:*
Die Aufgabe ist rechnerisch anspruchslos, führt aber durch oberflächliche Betrachtung sehr häufig zu falschen Antworten.
Wenn Marie drei Brüder und zwei Schwestern hat, gibt es in der Familie mit ihr 3 Mädchen und 3 Jungen. Ihr Bruder hat dann also noch **zwei** Brüder und **drei** Schwestern.

50) *Systematisches Probieren, Tabellen:*
Wenn der Junge so viel Schwestern wie Brüder hat, sind es mit ihm 1 Junge mehr als Mädchen.
Nun werden in einer *Tabelle* der Reihe nach die Möglichkeiten dafür erfasst.

		1 Mädchen hat dann:		
Jungen	Mädchen	Schwestern	Brüder	S = B : 2 ?
2	1	0	2	nein
3	2	1	3	nein
4	3	2	4	**ja**
5	4	3	5	nein

a) Die Familie hat **7 Kinder**.

b) Es sind **4 Jungen und 3 Mädchen**.

51) *Fallunterscheidung, zweckmäßige Bezeichnung:*
Zur Veranschaulichung der möglichen Sitzordnungen verwenden wir günstigerweise die Anfangsbuchstaben. Da B direkt neben G sitzt, sind (bis auf das Vertauschen der Reihenfolge) folgende *Fälle* möglich:

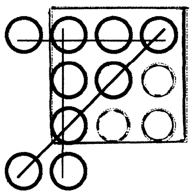
Fall 1: B G __ __
Fall 2: __ B G __
Fall 3: __ __ B G

Fall 1 und Fall 3 entfallen, weil **M** und T jeweils Sitznachbarn wären.
Übrig bleibt Fall 2: **__ B G __**

Weil T nicht neben G sitzt, muss T neben B sitzen: **T B G __**

Die Mutter kann nur auf dem freien Platz neben dem **Großvater** sitzen.

52) *Findigkeit:*

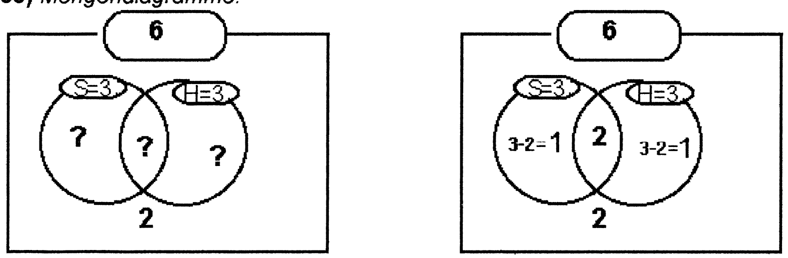


53) *Entdecken von Gesetzmäßigkeiten:*
Die Summe der Zahlen in jeder Zeile, jeder Spalte und sogar in jeder Diagonalen ist gleich.
Alle Zahlen von 1 bis 9 wurden genau einmal verwendet.

54) *Folgern aus den Bedingungen:*
Da der Bauer zu jeder Tierart die gleiche Angabe macht, liegt die Vermutung nahe, dass alle drei Anzahlen gleich sind.
"Alle bis auf vier " bedeutet also, dass die vier Tiere aus den beiden gerade nicht genannten Tierarten sind und deshalb jede Tierart zweimal vertreten ist.

Er hat insgesamt **6 Tiere** (2 Pferde, 2 Rinder, 2 Schafe).

55) *Mengendiagramme:*



Nach den Bedingungen dürfen es nur 6 - 2 = 4 Mädchen sein, die häkeln oder stricken können. Das ist nur möglich, wenn **2 Mädchen beides beherrschen**.

56) *Vorwärtsarbeiten (Reihenfolge der Schritte bedeutsam:)*
Der angegebenen Rechenvorschrift folgend, erreicht man nur ein Ergebnis (33 als Mittelwert von 29 und 37) auf direktem Wege.
Für die folgenden Ergebnisse sind jeweils umgekehrte Überlegungen erforderlich, wie z.. B. : 37 ist der Mittelwert von 41 und ???.

94

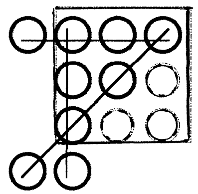
Fall 1: B G __ __
Fall 2: __ B G __
Fall 3: __ __ B G

Fall 1 und Fall 3 entfallen, weil **M** und T jeweils Sitznachbarn wären.
Übrig bleibt Fall 2: **__ B G __**

Weil T nicht neben G sitzt, muss T neben B sitzen: **T B G __**

Die Mutter kann nur auf dem freien Platz neben dem **Großvater** sitzen.

52) *Findigkeit:*

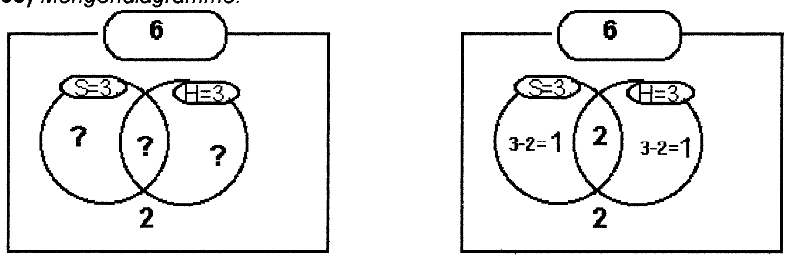


53) *Entdecken von Gesetzmäßigkeiten:*
Die Summe der Zahlen in jeder Zeile, jeder Spalte und sogar in jeder Diagonalen ist gleich.
Alle Zahlen von 1 bis 9 wurden genau einmal verwendet.

54) *Folgern aus den Bedingungen:*
Da der Bauer zu jeder Tierart die gleiche Angabe macht, liegt die Vermutung nahe, dass alle drei Anzahlen gleich sind.
"Alle bis auf vier " bedeutet also, dass die vier Tiere aus den beiden gerade nicht genannten Tierarten sind und deshalb jede Tierart zweimal vertreten ist.

Er hat insgesamt **6 Tiere** (2 Pferde, 2 Rinder, 2 Schafe).

55) *Mengendiagramme:*



Nach den Bedingungen dürfen es nur 6 - 2 = 4 Mädchen sein, die häkeln oder stricken können. Das ist nur möglich, wenn **2 Mädchen beides beherrschen**.

56) *Vorwärtsarbeiten (Reihenfolge der Schritte bedeutsam:)*
Der angegebenen Rechenvorschrift folgend, erreicht man nur ein Ergebnis (33 als Mittelwert von 29 und 37) auf direktem Wege.
Für die folgenden Ergebnisse sind jeweils umgekehrte Überlegungen erforderlich, wie z.. B. : 37 ist der Mittelwert von 41 und ???.

37

33 41

29 37 45

25 33 41 49

57) *Systematisches Probieren, Hilfsaufgabe*:
Man kommt sicher in Klasse 3 beim Lösen dieser Aufgabe an systematischem Probieren nicht vorbei, kann aber durch geeignete Impulse den Aufwand verringern:

- Wie läßt sich diese Aufgabe vereinfachen?

  ° Was passiert, wenn man einen Summanden BBB weglässt?
  [Die Summe ändert sich in A 000]

$$\begin{array}{rr} & A \\ + & BBB \\ + & BBB \\ + & \underline{BBB} \\ = & A000 \end{array}$$

In dieser einfacheren Hilfsaufgabe erkennt man schnell, dass A000 höchstens 3000 sein kann, weil BBB höchstens 999 ist.
Also kommen für A nur 1, 2 oder 3 in Frage.
Tatsächlich liefern alle drei Fälle eine Lösung.
Für **A = 1** muss 3 · B = 999 gelten, also ist die Ziffer **B = 3**.
Für **A = 2** ergibt sich **B = 6** und für **A = 3** entsprechend **B = 9**
Die gesuchten Rechenaufgaben lauten damit:

$$\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 3 \\ +333 & +666 & +999 \\ +333 & +666 & +999 \\ +333 & +666 & +999 \\ \underline{+333} & \underline{+666} & \underline{+999} \\ 1333 & 2666 & 3999 \end{array}$$

Die Vermutung liegt nahe, die Lösungen unmittelbar auf den Aufgabenteil b) zu übertragen. Tatsächlich ergeben sich dabei die gleichen Paare (A;B) wie im Teil A. (*Probe !*)

58) *Vorwärtsarbeiten (Reihenfolge der Schritte bedeutsam):*

Für den Einstieg in die Aufgabe sind zwei Hürden aufgebaut.
Man muss mit der 4. Gleichung beginnen und zunächst E = 2 berechnen.
Mit diesem Wissen lässt sich aber keine weitere Zahl ermitteln.

- In welcher Gleichung kommen möglichst wenige verschiedene Buchstaben vor?
  [In Gleichung 2 treten nur K und N auf.]

Aus K · N = K ergeben sich zunächst 2 Möglichkeiten: N = 1 oder K = 0 (und N beliebig). Wenn die Schüler nicht auf diese zweite Möglichkeit kommen, sollte man sie darauf aufmerksam machen und fragen, ob K = 0 nach den übrigen Bedingungen möglich sein kann. (K darf nicht 0 sein, weil die 6. Gleichung dann 0 statt 540 liefern würde.)
Jetzt sind die schwierigsten Hürden genommen. Mit E = 2 und N = 1 liefert die erste Gleichung K = 5, damit die 3. Gleichung B = 9, jetzt die fünfte Gleichung L = 6.
Das Produkt K · N · B · E · L · N ist bereits 540, so dass für den noch fehlenden Faktor **O = 1** gelten muss.

95

37

33 41

29 37 45

25 33 41 49

57) *Systematisches Probieren, Hilfsaufgabe*:
Man kommt sicher in Klasse 3 beim Lösen dieser Aufgabe an systematischem Probieren nicht vorbei, kann aber durch geeignete Impulse den Aufwand verringern:

- Wie läßt sich diese Aufgabe vereinfachen?

  ° Was passiert, wenn man einen Summanden BBB weglässt?
  [Die Summe ändert sich in A 000]

$$\begin{array}{rr} & A \\ + & BBB \\ + & BBB \\ + & \underline{BBB} \\ = & A000 \end{array}$$

In dieser einfacheren Hilfsaufgabe erkennt man schnell, dass A000 höchstens 3000 sein kann, weil BBB höchstens 999 ist.
Also kommen für A nur 1, 2 oder 3 in Frage.
Tatsächlich liefern alle drei Fälle eine Lösung.
Für **A = 1** muss 3 · B = 999 gelten, also ist die Ziffer **B = 3**.
Für **A = 2** ergibt sich **B = 6** und für **A = 3** entsprechend **B = 9**
Die gesuchten Rechenaufgaben lauten damit:

$$\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 3 \\ +333 & +666 & +999 \\ +333 & +666 & +999 \\ +333 & +666 & +999 \\ \underline{+333} & \underline{+666} & \underline{+999} \\ 1333 & 2666 & 3999 \end{array}$$

Die Vermutung liegt nahe, die Lösungen unmittelbar auf den Aufgabenteil b) zu übertragen. Tatsächlich ergeben sich dabei die gleichen Paare (A;B) wie im Teil A. (*Probe !*)

58) *Vorwärtsarbeiten (Reihenfolge der Schritte bedeutsam):*

Für den Einstieg in die Aufgabe sind zwei Hürden aufgebaut.
Man muss mit der 4. Gleichung beginnen und zunächst E = 2 berechnen.
Mit diesem Wissen lässt sich aber keine weitere Zahl ermitteln.

- In welcher Gleichung kommen möglichst wenige verschiedene Buchstaben vor?
  [In Gleichung 2 treten nur K und N auf.]

Aus K · N = K ergeben sich zunächst 2 Möglichkeiten: N = 1 oder K = 0 (und N beliebig). Wenn die Schüler nicht auf diese zweite Möglichkeit kommen, sollte man sie darauf aufmerksam machen und fragen, ob K = 0 nach den übrigen Bedingungen möglich sein kann. (K darf nicht 0 sein, weil die 6. Gleichung dann 0 statt 540 liefern würde.)
Jetzt sind die schwierigsten Hürden genommen. Mit E = 2 und N = 1 liefert die erste Gleichung K = 5, damit die 3. Gleichung B = 9, jetzt die fünfte Gleichung L = 6.
Das Produkt K · N · B · E · L · N ist bereits 540, so dass für den noch fehlenden Faktor **O = 1** gelten muss.

59) *Vorwärtsarbeiten (Reihenfolge der Schritte bedeutsam):*

$L + L = K$ (2.) K=6
$N - L = K$ (3.) N=9
$E + E + E = B$ (5.) B=54
$E : K = L$ (4.) E=18
$L + L + L = 9$ (1.) L=3
$K + N + O + B + E + L + N = 850$

Die Variablen L, K, N, E und B lassen sich in dieser Reihenfolge ermitteln.
Es gilt 6 + 9 + 54 + 18 + 3 + 9 = 99, der fehlende Summand O ist also 850 - 99 = 751.

O = 751.

60) *Systematisches Probieren:*

a	b	c	a·b·c	a+b+c	
0	0	0	0	0	**a·b·c = a+b+c**
0	0	c>0	0	c	a·b·c = 0 und a+b+c >0
...	...	...			
1	1	1	1	3	a·b·c ist um 2 kleiner als a+b+c
1	1	2	2	4	a·b·c ist um 2 kleiner als a+b+c
1	1	3	3	5	a·b·c ist um 2 kleiner als a+b+c
...	...	...			
1	2	2	4	5	a·b·c ist um 1 kleiner als a+b+c
1	**2**	**3**	**6**	**6**	**a·b·c = a+b+c**
1	2	4	8	7	a·b·c wird um 1 größer als a+b+c
...	...	...			
2	2	2	8	6	a·b·c > a+b+c
2	2	3	12	7	a·b·c > a+b+c

Es ist zu erkennen, dass mit wachsendem a das Produkt deutlich größer wird als die Summe.
Die gefundenen Möglichkeiten sind:

0·0·0 = 0+0+0 und **1·2·3 = 1+2+3**

61) *Systematisches Probieren:*

a) Es ist **möglich**, z.B., wenn ein Faktor Null ist.

b) **6 Möglichkeiten**: (0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3)

c)

Zahlenpaar	Produkt	Summe	Produkt kleiner als Summe ? (j/n)
(0, 1)	0	1	ja
(0, 2)	0	2	ja
(0, 3)	0	3	ja
(1, 2)	2	3	ja
(1, 3)	3	4	ja
(2, 3)	6	5	nein

62) *Systematisches Probieren, Vorwärtsarbeiten:*
Zum Ermitteln aller Möglichkeiten werden die Zahlen 4, 8, 12, 28, 32, 36 der Reihe nach an ein und der selben Stelle eingesetzt (unten fett gekennzeichnet) und die sich daraus

96

59) *Vorwärtsarbeiten (Reihenfolge der Schritte bedeutsam):*

$L + L = K$ (2.) K=6
$N - L = K$ (3.) N=9
$E + E + E = B$ (5.) B=54
$E : K = L$ (4.) E=18
$L + L + L = 9$ (1.) L=3
$K + N + O + B + E + L + N = 850$

Die Variablen L, K, N, E und B lassen sich in dieser Reihenfolge ermitteln.
Es gilt 6 + 9 + 54 + 18 + 3 + 9 = 99, der fehlende Summand O ist also 850 - 99 = 751.

O = 751.

60) *Systematisches Probieren:*

a	b	c	a·b·c	a+b+c	
0	0	0	0	0	**a·b·c = a+b+c**
0	0	c>0	0	c	a·b·c = 0 und a+b+c >0
...	...	...			
1	1	1	1	3	a·b·c ist um 2 kleiner als a+b+c
1	1	2	2	4	a·b·c ist um 2 kleiner als a+b+c
1	1	3	3	5	a·b·c ist um 2 kleiner als a+b+c
...	...	...			
1	2	2	4	5	a·b·c ist um 1 kleiner als a+b+c
1	**2**	**3**	**6**	**6**	**a·b·c = a+b+c**
1	2	4	8	7	a·b·c wird um 1 größer als a+b+c
...	...	...			
2	2	2	8	6	a·b·c > a+b+c
2	2	3	12	7	a·b·c > a+b+c

Es ist zu erkennen, dass mit wachsendem a das Produkt deutlich größer wird als die Summe.
Die gefundenen Möglichkeiten sind:

0·0·0 = 0+0+0 und **1·2·3 = 1+2+3**

61) *Systematisches Probieren:*

a) Es ist **möglich**, z.B., wenn ein Faktor Null ist.

b) **6 Möglichkeiten**: (0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3)

c)

Zahlenpaar	Produkt	Summe	Produkt kleiner als Summe ? (j/n)
(0, 1)	0	1	ja
(0, 2)	0	2	ja
(0, 3)	0	3	ja
(1, 2)	2	3	ja
(1, 3)	3	4	ja
(2, 3)	6	5	nein

62) *Systematisches Probieren, Vorwärtsarbeiten:*
Zum Ermitteln aller Möglichkeiten werden die Zahlen 4, 8, 12, 28, 32, 36 der Reihe nach an ein und der selben Stelle eingesetzt (unten fett gekennzeichnet) und die sich daraus

ergebenden übrigen Eintragungen ergänzt. Der Vorgang wird bei einer ungültigen Eintragung (doppelte Verwendung einer Zahl oder eine nicht erlaubte Zahl) abgebrochen und der Abbruch mit Ausrufungszeichen markiert.

16	12	32
36	20	**4**
8	28	24

16		28
	20	**8**
12	24!!	24

16		24!!
	20	**12**
		24

16	36	8
12	20	**28**
32	4	24

16		4
	20	**32**
36	!!!(0)	24

16		!!!(0)
	20	**36**
		24

Man findet 2 mögliche Eintragungen, die allerdings zueinander symmetrisch sind bezüglich der vorgegebenen Diagonalen:

16	12	32
36	20	**4**
8	28	24

16	36	8
12	20	**28**
32	4	24

63) *Hilfsaufgabe:*

Die Summe der 4 Zahlen beträgt 104.
Um 0 zu erhalten, sind als *Hilfsaufgabe* die Zahlen so zu ordnen, dass man zwei Paare mit der Summe 52 erhält.
Dies sind die Paare (40, 12) und (29, 23).
Es gilt **40 + 12 - 29 - 23** (= 52 - 52) **= 0**
Eine Anordnung in anderer Reihenfolge ist möglich. Man muss in Klasse 3 jedoch darauf achten, dass dabei keine negativen Zwischenergebnisse entstehen, wie dies bei
40 - 29 - 23 + 12 der Fall wäre.
Es ist deshalb günstig, mit der Addition zu beginnen und erst am Ende zu subtrahieren.

64) *Hilfsaufgabe:*

Die Summe der Zahlen 9, 7, 6, 5, 3, 2, 1, 0 beträgt 33.
Um 24 zu erhalten, müssen drei Summanden gestrichen werden, deren Summe 9 beträgt.
Das sind :
7 + 2 + 0, **6 + 3 + 0**, **6 + 2 + 1**, **5 + 3 + 1**.

Es gibt also **4 Möglichkeiten** zum geforderten Streichen dreier Summanden.

65) *Findigkeit:*

a) 575 ⇨ **585**; b) 999 ⇨ **1001**; c) 10001 ⇨ **10101**; d) 12921⇨ **13031**.

66) *Folgern aus der Bedingungen, systematisches Probieren:*

Aus den Bedingungen folgt, dass die Zahl an der Zehnerstelle gerade und kleiner als 4 ist. Damit steht dort eine **2**.
Durch 3 teilbare Zahlen zwischen 20 und 29 sind: 21, 24 und 27. Von diesen besteht nur die **24** aus zwei geraden Zahlen

Probe: 2 und 4 sind gerade. 24 ist durch 3 teilbar.

Katrins Hausnummer ist **24.**.

67) *Folgern aus der Bedingungen, Fallunterscheidung:*
In zwei Quartetten fehlen mindestens je eine und höchstens je drei Karten.
Es können also 2 bis 6 Karten fehlen.
Damit sind noch **30, 29, 28, 27 oder 26 Karten** vorhanden.

97

ergebenden übrigen Eintragungen ergänzt. Der Vorgang wird bei einer ungültigen Eintragung (doppelte Verwendung einer Zahl oder eine nicht erlaubte Zahl) abgebrochen und der Abbruch mit Ausrufungszeichen markiert.

16	12	32
36	20	**4**
8	28	24

16		28
	20	**8**
12	24!!	24

16		24!!
	20	**12**
		24

16	36	8
12	20	**28**
32	4	24

16		4
	20	**32**
36	!!!(0)	24

16		!!!(0)
	20	**36**
		24

Man findet 2 mögliche Eintragungen, die allerdings zueinander symmetrisch sind bezüglich der vorgegebenen Diagonalen:

16	12	32
36	20	**4**
8	28	24

16	36	8
12	20	**28**
32	4	24

63) *Hilfsaufgabe:*

Die Summe der 4 Zahlen beträgt 104.
Um 0 zu erhalten, sind als *Hilfsaufgabe* die Zahlen so zu ordnen, dass man zwei Paare mit der Summe 52 erhält.
Dies sind die Paare (40, 12) und (29, 23).
Es gilt **40 + 12 - 29 - 23** (= 52 - 52) **= 0**
Eine Anordnung in anderer Reihenfolge ist möglich. Man muss in Klasse 3 jedoch darauf achten, dass dabei keine negativen Zwischenergebnisse entstehen, wie dies bei
40 - 29 - 23 + 12 der Fall wäre.
Es ist deshalb günstig, mit der Addition zu beginnen und erst am Ende zu subtrahieren.

64) *Hilfsaufgabe:*

Die Summe der Zahlen 9, 7, 6, 5, 3, 2, 1, 0 beträgt 33.
Um 24 zu erhalten, müssen drei Summanden gestrichen werden, deren Summe 9 beträgt.
Das sind :
7 + 2 + 0, **6 + 3 + 0**, **6 + 2 + 1**, **5 + 3 + 1**.

Es gibt also **4 Möglichkeiten** zum geforderten Streichen dreier Summanden.

65) *Findigkeit:*

a) 575 ⇨ **585**; b) 999 ⇨ **1001**; c) 10001 ⇨ **10101**; d) 12921⇨ **13031**.

66) *Folgern aus der Bedingungen, systematisches Probieren:*

Aus den Bedingungen folgt, dass die Zahl an der Zehnerstelle gerade und kleiner als 4 ist. Damit steht dort eine **2**.
Durch 3 teilbare Zahlen zwischen 20 und 29 sind: 21, 24 und 27. Von diesen besteht nur die **24** aus zwei geraden Zahlen

Probe: 2 und 4 sind gerade. 24 ist durch 3 teilbar.

Katrins Hausnummer ist **24.**.

67) *Folgern aus der Bedingungen, Fallunterscheidung:*
In zwei Quartetten fehlen mindestens je eine und höchstens je drei Karten.
Es können also 2 bis 6 Karten fehlen.
Damit sind noch **30, 29, 28, 27 oder 26 Karten** vorhanden.

68) *Systematisches Probieren , Tabelle:*

jetzt		nächstes Jahr:		
Sabine	Jan	Sabine	Jan	3-faches Alter?
1	11	2	12	n
2	12	3	13	n
3	13	4	14	n
4	**14**	**5**	**15**	**j**
5	15	6	16	n

In einem Jahr ist Sabine 5 und Jan 15 Jahre alt.
Also muss der Antwortsatz lauten:
Jetzt sind sie 4 bzw. 14 Jahre alt.

69) *Vorwärtsarbeiten:*

Der dritte Teil von 360 ist 120.
Es sind noch 120 Bücher da, also wurden 360 - 120 = 240 Bücher ausgeliehen. Wenn man jeweils einen der Leser mit einem Buch und einen der Leser mit 2 Büchern zusammen betrachtet, haben jeweils 2 Leser 3 Bücher ausgeliehen.
Wegen 240 **:** 3 = 80 ist dies 80 mal geschehen.
Es haben also je 80 Leser ein Buch geliehen, und weitere 80 Leser haben je zwei Bücher ausgeliehen.
Probe: $80 + 2 \cdot 80 = 240$
$360 - 240 = 120$,
120 ist der dritte Teil von 360.
160 Personen haben Bücher ausgeliehen.

70) *Vorwärtsarbeiten:*
Wenn aus jedem Vorlauf zwei Läufer in den Endlauf kommen, stammen die 8 Endlaufteilnehmer aus vier Vorläufen.
Dort starteten also $8 \cdot 4$ = **32 Sportler**.

71) *Vorwärtsarbeiten:*
Wenn von 28 Spielen 4 Spiele unentschieden endeten, dann wurden die restlichen 24 Spiele gewonnen oder verloren.
Ein Viertel der 24 Spiele (also 6 Spiele) wurde verloren und drei Viertel (dreimal so viel) gewonnen.
Die Mannschaft gewann ($3 \cdot 6$ =) **18** Spiele.

72) *Systematisches Probieren; Tabelle:*

r	w	s	Summe
1	7	7	15
2	14	?	> 15

Rote und weiße Bälle zusammen gibt es 1+ 7 oder 2 + 14 oder 3 + 21 ... , aber bereits 2 + 14 = 16 Bälle sind zuviel.
Also waren es 1 + 7 = 8 Bälle mit den Farben rot oder weiß.
Die **Anzahl der** restlichen **schwarzen Bälle ist** (15 - 8 =) **7** .

73) *Vorwärtsarbeiten:*

$22 \cdot 45 = 9000$

$9000 \cdot 3$ = **27000**

In der Stadt wohnen rund **27000 Einwohner.**

98

68) *Systematisches Probieren , Tabelle:*

jetzt		nächstes Jahr:		
Sabine	Jan	Sabine	Jan	3-faches Alter?
1	11	2	12	n
2	12	3	13	n
3	13	4	14	n
4	**14**	**5**	**15**	**j**
5	15	6	16	n

In einem Jahr ist Sabine 5 und Jan 15 Jahre alt.
Also muss der Antwortsatz lauten:
Jetzt sind sie 4 bzw. 14 Jahre alt.

69) *Vorwärtsarbeiten:*

Der dritte Teil von 360 ist 120.
Es sind noch 120 Bücher da, also wurden 360 - 120 = 240 Bücher ausgeliehen. Wenn man jeweils einen der Leser mit einem Buch und einen der Leser mit 2 Büchern zusammen betrachtet, haben jeweils 2 Leser 3 Bücher ausgeliehen.
Wegen 240 **:** 3 = 80 ist dies 80 mal geschehen.
Es haben also je 80 Leser ein Buch geliehen, und weitere 80 Leser haben je zwei Bücher ausgeliehen.
Probe: $80 + 2 \cdot 80 = 240$
$360 - 240 = 120$,
120 ist der dritte Teil von 360.
160 Personen haben Bücher ausgeliehen.

70) *Vorwärtsarbeiten:*
Wenn aus jedem Vorlauf zwei Läufer in den Endlauf kommen, stammen die 8 Endlaufteilnehmer aus vier Vorläufen.
Dort starteten also $8 \cdot 4$ = **32 Sportler**.

71) *Vorwärtsarbeiten:*
Wenn von 28 Spielen 4 Spiele unentschieden endeten, dann wurden die restlichen 24 Spiele gewonnen oder verloren.
Ein Viertel der 24 Spiele (also 6 Spiele) wurde verloren und drei Viertel (dreimal so viel) gewonnen.
Die Mannschaft gewann ($3 \cdot 6$ =) **18** Spiele.

72) *Systematisches Probieren; Tabelle:*

r	w	s	Summe
1	7	7	15
2	14	?	> 15

Rote und weiße Bälle zusammen gibt es 1+ 7 oder 2 + 14 oder 3 + 21 ... , aber bereits 2 + 14 = 16 Bälle sind zuviel.
Also waren es 1 + 7 = 8 Bälle mit den Farben rot oder weiß.
Die **Anzahl der** restlichen **schwarzen Bälle ist** (15 - 8 =) **7** .

73) *Vorwärtsarbeiten:*

$22 \cdot 45 = 9000$

$9000 \cdot 3$ = **27000**

In der Stadt wohnen rund **27000 Einwohner.**

74) *Vorwärtsarbeiten:*
Hätte Paul die fehlenden 80 Cent noch bekommen, dann würde das Geld (mit den 30 Cent) gereicht haben.
Also kostet eine Kugel 30 Cent + 80 Cent = **1,10 €**.
Paul hatte 3·1,10 € + 0,30 € = **3,60 €.**

75) *Systematisches Probieren, Folgern aus den Bedingungen:*

Die einzige Möglichkeit, die Zahl 7 als Summe mehrerer Zahlen 2 und/oder 3 zu erhalten, ist 2 + 2 + 3. Dies erkennt man durch systematisches Probieren oder durch inhaltliche Überlegungen (weil 7 ungerade ist, muss der Summand 3 enthalten sein, und zwar in einer ungeraden Anzahl).
Dreimal oder mehr kann die 3 nicht vorhanden sein, also gibt es genau einen Summanden 3.
Herr Müller hat **drei Kinder**, davon sind **zwei jünger als 14 Jahre**.

76) *Analogie zu den Aufgaben 10.3) und 11.3):*

Peter bekommt **60 €** und Paul bekommt **80 €.**

77) *Vorwärtsarbeiten:*

1. Rückgabe:
30 · 0,30 € = 9 € Pfandgeld. Das reicht für 10 Flaschen (8,50 €).
Laut Aufgabentext wird das Restgeld (hier 0,50 DM) beim nächsten Kauf nicht wieder eingesetzt.

2. Rückgabe:
10 · 0,30 € = 3,00 € Pfandgeld. Das reicht für 3 Flaschen (2,55 €).

3. Rückgabe:
3 · 0,30 € = 0,90 € Pfandgeld. Das reicht für 1 Flaschen (0,85 €).
Vom Pfand der letzten Flasche kann er keine neue Flasche mehr kaufen.

Da er stets ohne Geld kam, bleiben ihm beim letzten Mal genau diese **0,30 €** als **Rest**.
Er kaufte vom Pfandgeld insgesamt 10 + 3 + 1 = **14 Flaschen**.

78) Verwenden von *Skizzen:*

Mit drei Schnitten erhält man vier Stücke (Skizze !).
Also war der Balken (4 · 30 cm =) **120 cm** lang.

79) *Vorwärtsarbeiten:*
Es ist mühselig, die Zahl der Ein- und Aussteiger ständig im Wechsel zu addieren bzw. zu subtrahieren. Besser ist es, Ein- und Aussteiger getrennt zu erfassen:

Einsteiger:	Aussteiger: (ohne Ottenheim)	
3 7 5		
+ 2 4 7		
+ 3 3 9	1 4 4	
+ 1 4 2	+ 2 5 5	
+ 4 2 2	+ 1 2 6	
1 5 2 5	5 2 5	Differenz: 1525 - 525 = 1000

Wenn in Ottenheim niemand ausgestiegen wäre, dann wären in Linz 1000 Personen angekommen.
Da nur 820 ankamen, müssen in Ottenheim **180 Personen ausgestiegen** sein.

99

74) *Vorwärtsarbeiten:*
Hätte Paul die fehlenden 80 Cent noch bekommen, dann würde das Geld (mit den 30 Cent) gereicht haben.
Also kostet eine Kugel 30 Cent + 80 Cent = **1,10 €**.
Paul hatte 3·1,10 € + 0,30 € = **3,60 €.**

75) *Systematisches Probieren, Folgern aus den Bedingungen:*

Die einzige Möglichkeit, die Zahl 7 als Summe mehrerer Zahlen 2 und/oder 3 zu erhalten, ist 2 + 2 + 3. Dies erkennt man durch systematisches Probieren oder durch inhaltliche Überlegungen (weil 7 ungerade ist, muss der Summand 3 enthalten sein, und zwar in einer ungeraden Anzahl).
Dreimal oder mehr kann die 3 nicht vorhanden sein, also gibt es genau einen Summanden 3.
Herr Müller hat **drei Kinder**, davon sind **zwei jünger als 14 Jahre**.

76) *Analogie zu den Aufgaben 10.3) und 11.3):*

Peter bekommt **60 €** und Paul bekommt **80 €.**

77) *Vorwärtsarbeiten:*

1. Rückgabe:
30 · 0,30 € = 9 € Pfandgeld. Das reicht für 10 Flaschen (8,50 €).
Laut Aufgabentext wird das Restgeld (hier 0,50 DM) beim nächsten Kauf nicht wieder eingesetzt.

2. Rückgabe:
10 · 0,30 € = 3,00 € Pfandgeld. Das reicht für 3 Flaschen (2,55 €).

3. Rückgabe:
3 · 0,30 € = 0,90 € Pfandgeld. Das reicht für 1 Flaschen (0,85 €).
Vom Pfand der letzten Flasche kann er keine neue Flasche mehr kaufen.

Da er stets ohne Geld kam, bleiben ihm beim letzten Mal genau diese **0,30 €** als **Rest**.
Er kaufte vom Pfandgeld insgesamt 10 + 3 + 1 = **14 Flaschen**.

78) Verwenden von *Skizzen:*

Mit drei Schnitten erhält man vier Stücke (Skizze !).
Also war der Balken (4 · 30 cm =) **120 cm** lang.

79) *Vorwärtsarbeiten:*
Es ist mühselig, die Zahl der Ein- und Aussteiger ständig im Wechsel zu addieren bzw. zu subtrahieren. Besser ist es, Ein- und Aussteiger getrennt zu erfassen:

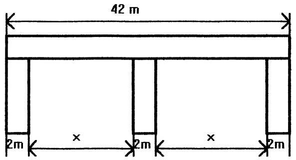
Einsteiger:	Aussteiger: (ohne Ottenheim)	
3 7 5		
+ 2 4 7		
+ 3 3 9	1 4 4	
+ 1 4 2	+ 2 5 5	
+ 4 2 2	+ 1 2 6	
1 5 2 5	5 2 5	Differenz: 1525 - 525 = 1000

Wenn in Ottenheim niemand ausgestiegen wäre, dann wären in Linz 1000 Personen angekommen.
Da nur 820 ankamen, müssen in Ottenheim **180 Personen ausgestiegen** sein.

80)

Beginn: 7.15 Uhr
Arbeiten: 13 min Beladen, 38 min Hinfahrt, 16 min Entladen, 38 min Rückfahrt, 13 min Beladen, 38 min Hinfahrt
Dauer aller Arbeiten bis dahin: 156 min = 2 h 36 min
2 h 36 min nach 7.15 Uhr ist es 9. 51 Uhr.
9.51 Uhr trifft der LKW mit der zweiten Ladung auf der Baustelle ein.

81) Verwenden von *Skizzen:*



42 m - 2 m - 2 m - 2 m = 36 m .
Zwischen 3 Pfeilern sind 2 Zwischenräume.
36 m : 2 = 18 m .
Die Abstände zwischen 2 Pfeilern betragen je 18 m.

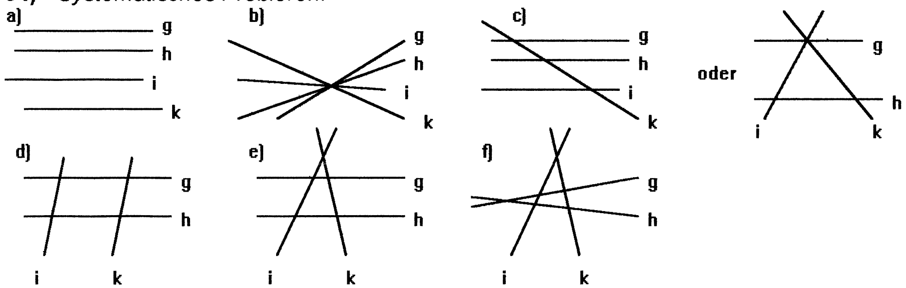
82)

a) **6 cm** b) **Rechteck**

83)

Trapez

84) *Systematisches Probieren:*



85)

Grit ist im Unrecht.
Es kann kein Quadrat gewesen sein, denn dann hätten alle vier Schüler recht (jedes Quadrat ist auch ein Rechteck, jedes Rechteck auch ein Parallelogramm und jedes Parallelogramm auch ein Trapez.)
An der Tafel muss ein Rechteck (welches kein Quadrat ist) stehen. Nur dann können die übrigen drei Aussagen wahr sein.

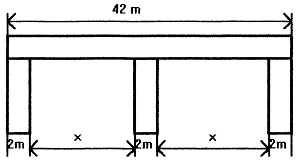
86) *Systematisches Probieren:*
Um systematisch alle Möglicheiten einer Zerlegung des Rechtecks in Quadrate zu finden, verwenden wir folgendes *Ordnungsprinzip*, das aus drei Teilprinzipien besteht, die in einer festgelegten Reihenfolge anzuwenden sind:
"Größeres Quadrat vor kleinerem Quadrat"; "links vor rechts"; "unten vor oben".
Das größte Quadrat, das in das Rechteck hineinpasst, hat die Seitenlänge 5 cm. Wir legen es "links (unten)" in das Rechteck.

100

80)

Beginn: 7.15 Uhr
Arbeiten: 13 min Beladen, 38 min Hinfahrt, 16 min Entladen, 38 min Rückfahrt, 13 min Beladen, 38 min Hinfahrt
Dauer aller Arbeiten bis dahin: 156 min = 2 h 36 min
2 h 36 min nach 7.15 Uhr ist es 9. 51 Uhr.
9.51 Uhr trifft der LKW mit der zweiten Ladung auf der Baustelle ein.

81) Verwenden von *Skizzen:*



42 m - 2 m - 2 m - 2 m = 36 m .
Zwischen 3 Pfeilern sind 2 Zwischenräume.
36 m : 2 = 18 m .
Die Abstände zwischen 2 Pfeilern betragen je 18 m.

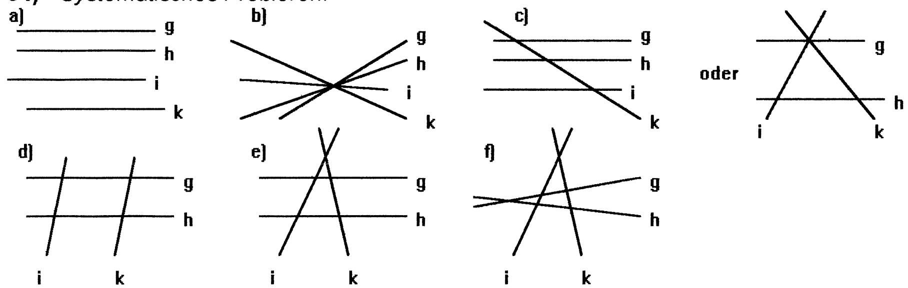
82)

a) **6 cm** b) **Rechteck**

83)

Trapez

84) *Systematisches Probieren:*



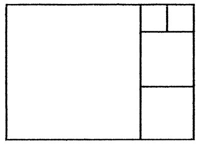
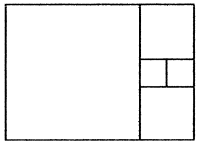
85)

Grit ist im Unrecht.
Es kann kein Quadrat gewesen sein, denn dann hätten alle vier Schüler recht (jedes Quadrat ist auch ein Rechteck, jedes Rechteck auch ein Parallelogramm und jedes Parallelogramm auch ein Trapez.)
An der Tafel muss ein Rechteck (welches kein Quadrat ist) stehen. Nur dann können die übrigen drei Aussagen wahr sein.

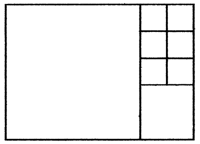
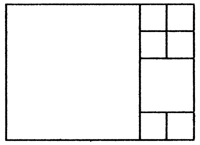
86) *Systematisches Probieren:*
Um systematisch alle Möglicheiten einer Zerlegung des Rechtecks in Quadrate zu finden, verwenden wir folgendes *Ordnungsprinzip*, das aus drei Teilprinzipien besteht, die in einer festgelegten Reihenfolge anzuwenden sind:
"Größeres Quadrat vor kleinerem Quadrat"; "links vor rechts"; "unten vor oben".
Das größte Quadrat, das in das Rechteck hineinpasst, hat die Seitenlänge 5 cm. Wir legen es "links (unten)" in das Rechteck.

Das größte Quadrat, das nun noch in den restlichen Teil des Rechteck hineinpasst, hat die Seitenlänge 2 cm . (Dieser restliche Teil ist selbst ein Rechteck, das 5 cm lang und 2 cm breit ist.) Man kann genau 2 derartige Quadrate unterbringen.
Der nun noch verbliebene Teil lässt sich nur mit zwei Quadraten mit der Seitenlänge 1 cm füllen.
Auf diese Weise haben wir eine Zerlegung des Rechtecks in (1 + 2 + 2 =) **5 Quadrate** gefunden.
Unser Ordnungsprinzip liefert uns **2 verschiedene Möglichkeiten** für diese Zerlegung.

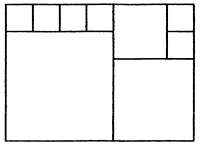
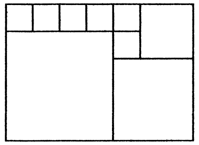
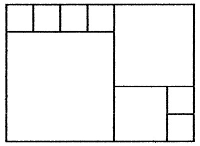
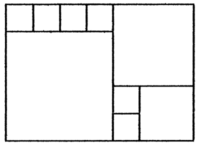
Alle weiteren Zerlegungen in 5 Quadrate sind zu einer der nebenstehend angegebenen Zerlegungen symmetrisch.

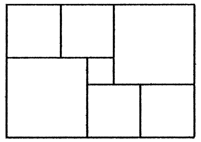
Unserem Ordnungsprinzip folgend füllen wir nun das verbliebene Restrechteck mit nur einem Quadrat mit der Seitenlänge 2 cm und mit 6 Quadraten mit der Seitenlänge 1 cm.
So erhalten wir die nebenstehend angegebenen **2 verschiedenen Möglichkeiten**, das Rechteck in **8 Quadrate** zu zerlegen.

Nun füllen wir das Rechteck zunächst mit einem "links unten" liegenden Quadrat mit der Seitenlänge 4 cm. Wir erkennen, dass sich in dem verbliebenen Teil des Rechtecks nur genau ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm unterbringen lässt, das wir "(links) unten" postieren.
Unser Ordnungsprinzip liefert uns dann folgende **4 verschiedenen Möglichkeiten**, das Rechteck in **9 Quadrate** zu zerlegen:

Nun legen wir ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm "links unten" in das Rechteck und erkennen, dass sich noch genau ein weiteres derartiges Quadrat in dem Rechteck unterbringen lässt, und zwar in 6 unterschiedlichen Positionen, von denen nur die nebenstehend angegebene weniger als 10 Quadrate liefert. In diesem Fall lassen sich in den restlichen Teil des Rechtecks dann noch genau 4 Quadrate mit der Seitenlänge 2 cm auf genau eine Weise unterbringen, und es bleibt dann noch Platz für genau ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 cm.



So haben wir herausgefunden, dass es genau **1 Möglichkeit** gibt, das Rechteck in **7 Quadrate** zu zerlegen.
Da wir systematisch vorgegangen sind, haben wir auch gezeigt, dass es **keine Möglichkeit** gibt, das Rechteck in **6 Quadrate** zu zerlegen.

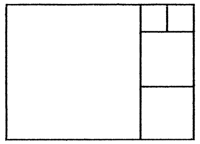
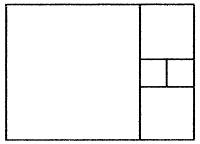
87)

a) Es sind 6 Flächen mit je 9 kleinen Quadraten, also besteht die Oberfläche des großen Würfels aus **54 kleinen Quadraten**.

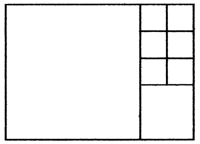
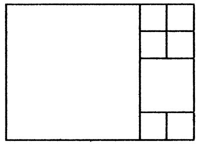
101

Das größte Quadrat, das nun noch in den restlichen Teil des Rechteck hineinpasst, hat die Seitenlänge 2 cm . (Dieser restliche Teil ist selbst ein Rechteck, das 5 cm lang und 2 cm breit ist.) Man kann genau 2 derartige Quadrate unterbringen.
Der nun noch verbliebene Teil lässt sich nur mit zwei Quadraten mit der Seitenlänge 1 cm füllen.
Auf diese Weise haben wir eine Zerlegung des Rechtecks in (1 + 2 + 2 =) **5 Quadrate** gefunden.
Unser Ordnungsprinzip liefert uns **2 verschiedene Möglichkeiten** für diese Zerlegung.

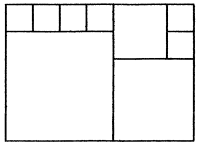
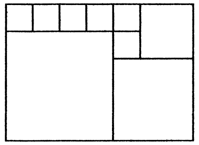
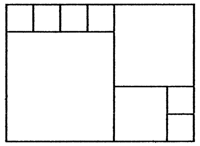
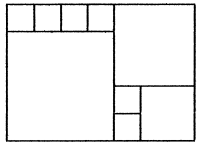
Alle weiteren Zerlegungen in 5 Quadrate sind zu einer der nebenstehend angegebenen Zerlegungen symmetrisch.

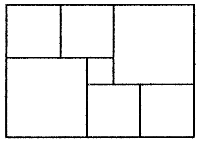
Unserem Ordnungsprinzip folgend füllen wir nun das verbliebene Restrechteck mit nur einem Quadrat mit der Seitenlänge 2 cm und mit 6 Quadraten mit der Seitenlänge 1 cm.
So erhalten wir die nebenstehend angegebenen **2 verschiedenen Möglichkeiten**, das Rechteck in **8 Quadrate** zu zerlegen.

Nun füllen wir das Rechteck zunächst mit einem "links unten" liegenden Quadrat mit der Seitenlänge 4 cm. Wir erkennen, dass sich in dem verbliebenen Teil des Rechtecks nur genau ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm unterbringen lässt, das wir "(links) unten" postieren.
Unser Ordnungsprinzip liefert uns dann folgende **4 verschiedenen Möglichkeiten**, das Rechteck in **9 Quadrate** zu zerlegen:

Nun legen wir ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm "links unten" in das Rechteck und erkennen, dass sich noch genau ein weiteres derartiges Quadrat in dem Rechteck unterbringen lässt, und zwar in 6 unterschiedlichen Positionen, von denen nur die nebenstehend angegebene weniger als 10 Quadrate liefert. In diesem Fall lassen sich in den restlichen Teil des Rechtecks dann noch genau 4 Quadrate mit der Seitenlänge 2 cm auf genau eine Weise unterbringen, und es bleibt dann noch Platz für genau ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 cm.



So haben wir herausgefunden, dass es genau **1 Möglichkeit** gibt, das Rechteck in **7 Quadrate** zu zerlegen.
Da wir systematisch vorgegangen sind, haben wir auch gezeigt, dass es **keine Möglichkeit** gibt, das Rechteck in **6 Quadrate** zu zerlegen.

87)

a) Es sind 6 Flächen mit je 9 kleinen Quadraten, also besteht die Oberfläche des großen Würfels aus **54 kleinen Quadraten**.

b) Da der Würfel 8 Ecken hat, werden 8 von 27 kleinen Würfeln entfernt.
Der Restkörper besteht aus**19 kleinen Würfeln**.
Die Oberfläche bleibt bei **54 kleinen Quadraten**, weil jeweils statt dreier weggenommener sichtbarer Flächen drei bisher im Inneren liegende Flächen zur Oberfläche dazukommen.

88) *Skizzen:*

Ohne die obere Deckfläche sind noch 24 Quadrate an 4 Seitenflächen zu sehen.
Also stehen (24 **:** 4 =) **6 Würfel** übereinander.
(Räumliche Skizze oder Modell zur Auswertung zeigen!)

89) *Systematisches Probieren*

Es gibt (außer Vertauschen der Reihenfolge) nur **2 Möglichkeiten**:

8 + 8 + 8 + 8 + 10 = 42

8 + 8 + 8 + 9 + 9 = 42

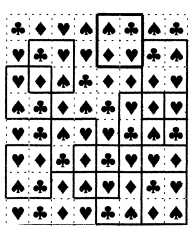
90) *Systematisches Probieren:*

Wir verwenden das folgende *Ordnungsprinzip*:
"Größerer Summand vor kleinerem Summanden".

24 = 10 + 10 + 4 = 10 + 9 + 5 = 10 + 8 + 6 = 10 + 7 + 7
= 9 + 9 + 6 = 9 + 8 + 7
= 8 + 8 + 8

Es gibt **7 Möglichkeiten**.

91)



Man untersuche systematisch alle 7 "Doppelzeilen", welche der in ihnen jeweils vorkommenden 7 Quadrate die geforderte Bedingung erfüllen.
Es gibt (1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 =) 12 Lösungen.

92) *Systematisches Probieren; zweckmäßige Bezeichnungen; Problemtransformation:*

Kürzt man die 6 Eissorten durch die Anfangsbuchstaben A, B, E, H, S, V ab, dann gibt es die folgenden *lexikographisch geordneten* Zusammenstellungen von 4 Eissorten:
ABEH, ABES, ABEV, ABHS, ABHV, ABSV, AEHS, ..., BHSV, EHSV .

Die Lösung lässt sich durch folgende *Problemtransformation* wesentlich vereinfachen:
"Wenn man 4 von 6 Sorten auswählt, muss man 2 von 6 Sorten weglassen. Wieviel Möglichkeiten gibt es dafür ?"
Aus den Eissorten A, B, E, H, S, V kann man jeweils folgende Paare weglassen:
AB, AE, AH, AS, AV; BE, BH, BS, BV; EH, ES, EV; HS, HV; SV.
Es gibt also (5 + 4 + 3 + 2 + 1 =) **15 Möglichkeiten**, 2 von 6 Sorten wegzulassen und damit auch 15 Möglichkeiten, 4 von 6 Sorten auszuwählen.

Petra muss daher **15 Tage** in die Eisdiele gehen.

102

b) Da der Würfel 8 Ecken hat, werden 8 von 27 kleinen Würfeln entfernt.
Der Restkörper besteht aus**19 kleinen Würfeln**.
Die Oberfläche bleibt bei **54 kleinen Quadraten**, weil jeweils statt dreier weggenommener sichtbarer Flächen drei bisher im Inneren liegende Flächen zur Oberfläche dazukommen.

88) *Skizzen:*

Ohne die obere Deckfläche sind noch 24 Quadrate an 4 Seitenflächen zu sehen.
Also stehen (24 **:** 4 =) **6 Würfel** übereinander.
(Räumliche Skizze oder Modell zur Auswertung zeigen!)

89) *Systematisches Probieren*

Es gibt (außer Vertauschen der Reihenfolge) nur **2 Möglichkeiten**:

8 + 8 + 8 + 8 + 10 = 42

8 + 8 + 8 + 9 + 9 = 42

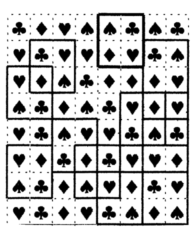
90) *Systematisches Probieren:*

Wir verwenden das folgende *Ordnungsprinzip*:
"Größerer Summand vor kleinerem Summanden".

24 = 10 + 10 + 4 = 10 + 9 + 5 = 10 + 8 + 6 = 10 + 7 + 7
= 9 + 9 + 6 = 9 + 8 + 7
= 8 + 8 + 8

Es gibt **7 Möglichkeiten**.

91)



Man untersuche systematisch alle 7 "Doppelzeilen", welche der in ihnen jeweils vorkommenden 7 Quadrate die geforderte Bedingung erfüllen.
Es gibt (1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 =) 12 Lösungen.

92) *Systematisches Probieren; zweckmäßige Bezeichnungen; Problemtransformation:*

Kürzt man die 6 Eissorten durch die Anfangsbuchstaben A, B, E, H, S, V ab, dann gibt es die folgenden *lexikographisch geordneten* Zusammenstellungen von 4 Eissorten:
ABEH, ABES, ABEV, ABHS, ABHV, ABSV, AEHS, ..., BHSV, EHSV .

Die Lösung lässt sich durch folgende *Problemtransformation* wesentlich vereinfachen:
"Wenn man 4 von 6 Sorten auswählt, muss man 2 von 6 Sorten weglassen. Wieviel Möglichkeiten gibt es dafür ?"
Aus den Eissorten A, B, E, H, S, V kann man jeweils folgende Paare weglassen:
AB, AE, AH, AS, AV; BE, BH, BS, BV; EH, ES, EV; HS, HV; SV.
Es gibt also (5 + 4 + 3 + 2 + 1 =) **15 Möglichkeiten**, 2 von 6 Sorten wegzulassen und damit auch 15 Möglichkeiten, 4 von 6 Sorten auszuwählen.

Petra muss daher **15 Tage** in die Eisdiele gehen.

93) *Systematisches Probieren; lexikographisches Ordnen:*

ABRT	ABTR	ARBT	ARTB	ATBR	ATRB
BART	BATR	BRAT	BRTA	BTAR	BTRA
RABT	RATB	RBAT	RBTA	RTAB	RTBA
TABR	TARB	TBAR	TBRA	**TRAB**	TRBA

Es entstehen **24 "Wörter"**.

"BART" steht an **7. Stelle**, und "TRAB" an **23. Stelle**.

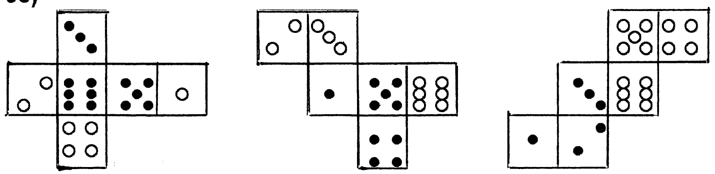
94) *Systematisches Probieren, Verwenden von Hilfsaufgaben:*

Die Lösung der *analogen* Aufgabe 6.4) dient als Hilfe.
Wir erhalten 4 + 3 + 2 + 1 = 10 Paare.
10 mal klingen die Gläser.

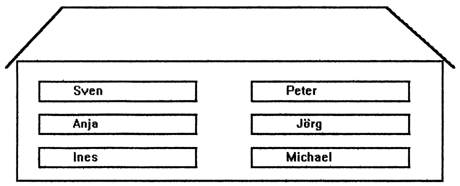
95) *Folgern aus gegebenen Bedingungen; systematisches Probieren:*
Da die vierstellige Zahl gerade sein soll, kann am Ende nur die 4 oder die 6 stehen.
In beiden Fällen können die drei Ziffern davor in 6 verschiedenen Reihenfolgen angeordnet werden.
Es gibt also **12 Zahlen**, die die gestellten Bedingungen erfüllen:

(356**4**, 365**4**, 536**4**, 563**4**, 635**4**, 653**4**, 345**6**, 354**6**, 435**6**, 453**6**, 534**6**, 543**6**)

96)



97) *Folgern aus gegebenen Bedingungen:*
Anja und Jörg (auf gleicher Etage) wohnen höher als Michael, aber tiefer als Peter, und damit in der mittleren Etage.
Ines und Michael wohnen also in der unteren Etage.
Dann können Sven und Peter nur oben wohnen.
Anja hat in ihrer Etage die linke Seite, Michael in seiner Etage die rechte Seite.
Da Anja und Peter nicht auf einer Seite wohnen, wohnt Peter oben rechts und damit Sven oben links.



Probe am Text nicht vergessen!

98) *Findigkeit:*

Die neu gelegten Rechenaufgaben lauten:

3 + 9 = 12 ; 7 - 1 = 6 ; 8 - 6 = 2 ; 4 - 2 = 2 .

103

93) *Systematisches Probieren; lexikographisches Ordnen:*

ABRT ABTR ARBT ARTB ATBR ATRB
BART BATR BRAT BRTA BTAR BTRA
RABT RATB RBAT RBTA RTAB RTBA
TABR TARB TBAR TBRA **TRAB** TRBA

Es entstehen **24 "Wörter"**.

"BART" steht an **7. Stelle**, und "TRAB" an **23. Stelle**.

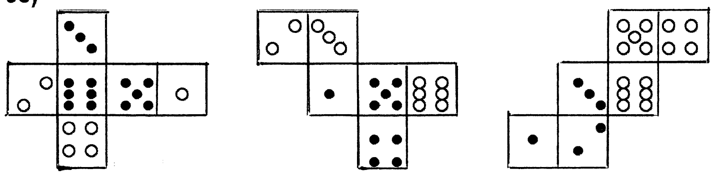
94) *Systematisches Probieren, Verwenden von Hilfsaufgaben:*

Die Lösung der *analogen* Aufgabe 6.4) dient als Hilfe.
Wir erhalten 4 + 3 + 2 + 1 = 10 Paare.
10 mal klingen die Gläser.

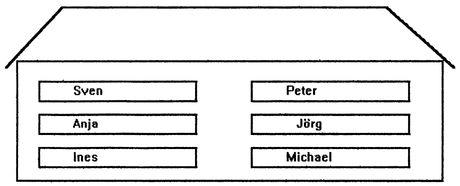
95) *Folgern aus gegebenen Bedingungen; systematisches Probieren:*
Da die vierstellige Zahl gerade sein soll, kann am Ende nur die 4 oder die 6 stehen.
In beiden Fällen können die drei Ziffern davor in 6 verschiedenen Reihenfolgen angeordnet werden.
Es gibt also **12 Zahlen**, die die gestellten Bedingungen erfüllen:

(356**4**, 365**4**, 536**4**, 563**4**, 635**4**, 653**4**, 345**6**, 354**6**, 435**6**, 453**6**, 534**6**, 543**6**)

96)



97) *Folgern aus gegebenen Bedingungen:*
Anja und Jörg (auf gleicher Etage) wohnen höher als Michael, aber tiefer als Peter, und damit in der mittleren Etage.
Ines und Michael wohnen also in der unteren Etage.
Dann können Sven und Peter nur oben wohnen.
Anja hat in ihrer Etage die linke Seite, Michael in seiner Etage die rechte Seite.
Da Anja und Peter nicht auf einer Seite wohnen, wohnt Peter oben rechts und damit Sven oben links.



Probe am Text nicht vergessen!

98) *Findigkeit:*

Die neu gelegten Rechenaufgaben lauten:

3 + 9 = 12 ; 7 - 1 = 6 ; 8 - 6 = 2 ; 4 - 2 = 2 .

99) *Entdecken von Gesetzmäßigkeiten:*
Vgl. die Lösung in Abschnitt 5.7.

a) 594 , 495 , 495 .

b) 768 , 198 , 792 , 693 , 594 , 495 .

c) Jede solche Zahlenfolge führt spätestens nach dem 5. Glied zur Zahl 495, die sich dann stets wiederholt.

100) *Fallunterscheidung, Findigkeit:*

Es werden links und rechts je 2 Würfel aufgelegt.

Fall 1: Es herrscht Gleichgewicht. Der schwerere Würfel ist der nicht gewogene 5. Würfel.

Fall 2: Eine Seite ist schwerer. Diese beiden Würfel werden in der 2. Wägung verglichen.

101) *Vorwärtsarbeiten; Fallunterscheidung; systematisches Probieren:*

Wegen $15 = 15 \cdot 1 = 5 \cdot 3 = 3 \cdot 5 = 1 \cdot 15$ folgt aus $(x - y) \cdot z = 15$, dass $(x - y)$ bzw. z nur die vier angegebenen Werte annehmen kann.
In jedem dieser möglichen Fälle setzt man nun für y der Reihe nach 0, 1, 2, ... ein.
Dann berechnet man zunächst das zugehörige x, dann das zugehörige $y \cdot z$ und schließlich $(x - y \cdot z)$.
Dabei ist es günstig, die Tabelle um die *Hilfsspalten* $(x - y)$ und $y \cdot z$ zu ergänzen.

x	y	z	x - y·z	(x - y)·z	x - y	y·z
15 (3)	0 (2)	**1** (1)	15	15 (5)	**15** (1)	0 (4)
16	1	**"**	15	"	**"**	1
17	2	**"**	15	"	**"**	2
...	...	**"**	15	.15	**...**	...
15+n	n	**1**	15	"	**15**	n
...	...	"	15	"	**...**	...
5	0	**3**	5	15	**5**	0
6	1	**"**	3	"	**"**	3
7	2	**"**	1	"	**"**	6
8	3	**3**	n.l.	15	**5**	9
3	0	**5**	3	15	**3**	0
4	1	**5**	n.l.	15	**3**	5
1	0	**15**	1	15	**1**	0
2	1	**15**	n.l.	15	**1**	15

Wenn man mit dem Fall $z = 1$ beginnt, findet man sofort die Antwort:
Es gibt **unendlich viele Lösungen**.
Beginnt man jedoch mit $z = 15$, dann kann die falsche Vermutung auftreten, dass es immer nur eine begrenzte Anzahl von Lösungen gibt.
Deshalb ist die Vollständigkeit der Fallunterscheidung für mögliche Werte von x besonders wichtig.

104

99) *Entdecken von Gesetzmäßigkeiten:*
Vgl. die Lösung in Abschnitt 5.7.

a) 594 , 495 , 495 .

b) 768 , 198 , 792 , 693 , 594 , 495 .

c) Jede solche Zahlenfolge führt spätestens nach dem 5. Glied zur Zahl 495, die sich dann stets wiederholt.

100) *Fallunterscheidung, Findigkeit:*

Es werden links und rechts je 2 Würfel aufgelegt.

Fall 1: Es herrscht Gleichgewicht. Der schwerere Würfel ist der nicht gewogene 5. Würfel.

Fall 2: Eine Seite ist schwerer. Diese beiden Würfel werden in der 2. Wägung verglichen.

101) *Vorwärtsarbeiten; Fallunterscheidung; systematisches Probieren:*

Wegen $15 = 15 \cdot 1 = 5 \cdot 3 = 3 \cdot 5 = 1 \cdot 15$ folgt aus $(x - y) \cdot z = 15$, dass $(x - y)$ bzw. z nur die vier angegebenen Werte annehmen kann.
In jedem dieser möglichen Fälle setzt man nun für y der Reihe nach 0, 1, 2, ... ein.
Dann berechnet man zunächst das zugehörige x, dann das zugehörige $y \cdot z$ und schließlich $(x - y \cdot z)$.
Dabei ist es günstig, die Tabelle um die *Hilfsspalten* $(x - y)$ und $y \cdot z$ zu ergänzen.

x	y	z	x - y·z	(x - y)·z	x - y	y·z
15 (3)	0 (2)	**1** (1)	15	15 (5)	**15** (1)	0 (4)
16	1	**"**	15	"	**"**	1
17	2	**"**	15	"	**"**	2
...	...	**"**	15	.15	**...**	...
15+n	n	**1**	15	"	**15**	n
...	...	"	15	"	**...**	...
5	0	**3**	5	15	**5**	0
6	1	**"**	3	"	**"**	3
7	2	**"**	1	"	**"**	6
8	3	**3**	n.l.	15	**5**	9
3	0	**5**	3	15	**3**	0
4	1	**5**	n.l.	15	**3**	5
1	0	**15**	1	15	**1**	0
2	1	**15**	n.l.	15	**1**	15

Wenn man mit dem Fall $z = 1$ beginnt, findet man sofort die Antwort:
Es gibt **unendlich viele Lösungen**.
Beginnt man jedoch mit $z = 15$, dann kann die falsche Vermutung auftreten, dass es immer nur eine begrenzte Anzahl von Lösungen gibt.
Deshalb ist die Vollständigkeit der Fallunterscheidung für mögliche Werte von x besonders wichtig.

102) *Vorwärtsarbeiten; Reihenfolge der Schritte bedeutsam:*

$$\begin{array}{ccccc} AA & \cdot & BC & = & ADE \\ + & & \cdot & & - \\ FG & + & H & = & BJA \\ \hline = & & = & & = \\ BBF & + & EH & = & BDK \end{array}$$

Folgende *Impulse* können die Lösungsfindung steuern:

- Aus welcher Zeile oder Spalte lässt sich eine der gesuchten Zahlen unmittelbar berechnen?
  - ° Was lässt sich aus der Gleichung FG + H = BJA in der 2. Zeile unmittelbar berechnen?
    - **:** Beachte: Eine dreistellige Zahl soll die Summe aus einer zweistelligen und einer einstelligen Zahl sein!

  [Es muss **B = 1** , **F = 9** , **J = 0** gelten.]
- Aus welcher Zeile oder Spalte lässt sich nun eine weitere der gesuchten Zahlen unmittelbar berechnen?
  - ° Betrachte das Zwischenergebnis! In welcher Zeile oder Spalte sind die meisten Ziffern bekannt?

  [In der 1. Spalte steht AA + 9G = 119 , was nur für AA = 22 , also **A = 2** gelten kann. Aus 22 + 9G = 119 folgt dann **G = 7** .]
- Aus welcher Zeile oder Spalte lässt sich nun eine weitere der gesuchten Zahlen unmittelbar berechnen?

  2. Zeile: 97 + H = 102 , also **H = 5** .
  3. Zeile: 119 + E5 = 1DK , also **K = 4** .
  3. Spalte: 2DE - 102 = 1D4 , also **E = 6** .
  3. Zeile: 119 + 65 = 1D4 , also **D = 8** .
  2. Spalte: 1C · 5 = 65 , also **C = 3** .

Probe in der 1. Zeile: 22 · 13 = 286 stimmt.
Sicherheitshalber führe man noch die *Proben* für die restlichen 5 Gleichungen durch.

103) *Vorwärtsarbeiten; systematisches Probieren:*

Vgl. die Hinweise zur Lösungsfindung in Abschnitt 5.

D = 11 , **A = 12** ,**B = 10** , **C = 2** , **E = 7** .

104) *Vorwärtsarbeiten oder "von rückwärts aus rechnen":*

Nach dreimaligem Halbieren erhält man den 8. Teil des Ausgangsbetrages.

Da Rita am Ende mindestens 1 €, 2 €, 3 € oder 4 € übrig hatte, besaß sie am Anfang achtmal so viel Geld, also 8 €, 16 €, 24 € oder € DM.

Sie hatte **mindestens 8 € und höchstens 32 €** bei sich.

In einem *2. Lösungsweg* geht man von dem am Ende verbleibenden Restbetrag von 1 €, ..., 4 € aus und verdoppelt dreimal.

105

102) *Vorwärtsarbeiten; Reihenfolge der Schritte bedeutsam:*

$$\begin{array}{ccccc} AA & \cdot & BC & = & ADE \\ + & & \cdot & & - \\ FG & + & H & = & BJA \\ \hline = & & = & & = \\ BBF & + & EH & = & BDK \end{array}$$

Folgende *Impulse* können die Lösungsfindung steuern:

- Aus welcher Zeile oder Spalte lässt sich eine der gesuchten Zahlen unmittelbar berechnen?
  - ° Was lässt sich aus der Gleichung FG + H = BJA in der 2. Zeile unmittelbar berechnen?
    - **:** Beachte: Eine dreistellige Zahl soll die Summe aus einer zweistelligen und einer einstelligen Zahl sein!

  [Es muss **B = 1** , **F = 9** , **J = 0** gelten.]
- Aus welcher Zeile oder Spalte lässt sich nun eine weitere der gesuchten Zahlen unmittelbar berechnen?
  - ° Betrachte das Zwischenergebnis! In welcher Zeile oder Spalte sind die meisten Ziffern bekannt?

  [In der 1. Spalte steht AA + 9G = 119 , was nur für AA = 22 , also **A = 2** gelten kann. Aus 22 + 9G = 119 folgt dann **G = 7** .]
- Aus welcher Zeile oder Spalte lässt sich nun eine weitere der gesuchten Zahlen unmittelbar berechnen?

  2. Zeile: 97 + H = 102 , also **H = 5** .
  3. Zeile: 119 + E5 = 1DK , also **K = 4** .
  3. Spalte: 2DE - 102 = 1D4 , also **E = 6** .
  3. Zeile: 119 + 65 = 1D4 , also **D = 8** .
  2. Spalte: 1C · 5 = 65 , also **C = 3** .

Probe in der 1. Zeile: 22 · 13 = 286 stimmt.
Sicherheitshalber führe man noch die *Proben* für die restlichen 5 Gleichungen durch.

103) *Vorwärtsarbeiten; systematisches Probieren:*

Vgl. die Hinweise zur Lösungsfindung in Abschnitt 5.

D = 11 , **A = 12** ,**B = 10** , **C = 2** , **E = 7** .

104) *Vorwärtsarbeiten oder "von rückwärts aus rechnen":*

Nach dreimaligem Halbieren erhält man den 8. Teil des Ausgangsbetrages.

Da Rita am Ende mindestens 1 €, 2 €, 3 € oder 4 € übrig hatte, besaß sie am Anfang achtmal so viel Geld, also 8 €, 16 €, 24 € oder € DM.

Sie hatte **mindestens 8 € und höchstens 32 €** bei sich.

In einem *2. Lösungsweg* geht man von dem am Ende verbleibenden Restbetrag von 1 €, ..., 4 € aus und verdoppelt dreimal.

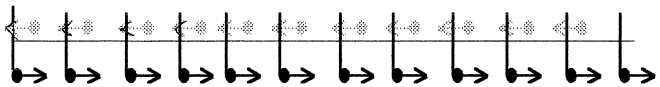
105) *Tabelle:*

Auf einem Geflügelhof gab es 24 Tiere.
Gänse und Hühner zusammen waren es genauso viele wie Enten und Puten zusammen.
Also sind es am Anfang zusammen 12 Gänse und Hühner und auch zusammen 12 Enten und Puten.

vor dem Verkauf		...	
Gänse	Hühner	Puten	Enten
? **12**	**?**	**12**	
nach dem Verkauf **6**			
2	**2·2 = 4**	**4**	**12 - 4 = 8**

Nach dem Verkauf von 6 Hühnern waren es zusammen nur noch 6 Hühner und Gänse.
Weil jetzt doppelt so viele Hühner wie Gänse da sein sollen, sind es 4 Hühner und 2 Gänse.
Dann sind es laut Text auch 4 Puten (soviel, wie noch Hühner da sind).
Um auf 12 zu kommen, müssen es noch 8 Enten sein.
Antwortsatz formulierten lassen!
Häufiger Schülerfehler: Genannt werden die zuletzt erhaltenen Resultate. Gefragt war hier aber, wieviel Tiere jeweils am Anfang vorhanden waren.
Zu Beginn waren **2 Gänse, 10 Hühner, 4 Puten und 8 Enten** auf dem Geflügelhof.
Die *Probe* sollte man von Schülern durchführen lassen, die an der Lösungsfindung nicht oder nur gering beteiligt waren.

106)
23 ist eine ungerade Zahl. Sabine hat also aus einer Fahrtrichtung eine Bahn mehr gesehen als aus der anderen (12 bzw. 11 Bahnen).



Unter den 12 Bahnen der einen Richtung war dann auch die erste und die letzte Bahn, in den 11 Zwischenräumen dazwischen die Bahnen der Gegenrichtung.

Jeder der 11 Zeitzwischenräume war 8 Minuten lang.

Also war das Fenster (8·11 =) **88 Minuten** geöffnet.

107) *Systematisches Ermitteln aller Fälle; Folgern aus Bedingungen:*

a) **6 Spiele**: (A;B), (A;C), (A;D), (B;C), (B;D), (C;D)

b) (4 + 3 + 2 + 1 =) **10 Spiele** [*Analogie* zu Aufgabe 94) und 6.4]

c) Die **2. Tabelle** ist **falsch**.

B hat mit 6 Punkten beide Spiele gewonnen.

Dann hätte C den einen Punkt im Unentschieden gegen A holen müssen.

Mit einer Niederlage und einem Unentschieden kann A nicht auf 3 Punkte kommen.

1. Tabelle richtig: A:B = 3:0 A:C = 1:1 B:C = 1:1

3. Tabelle richtig: A:B = 1:1 A:C = 1:1 B:C = 1:1

106

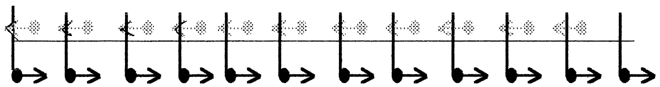
105) *Tabelle:*

Auf einem Geflügelhof gab es 24 Tiere.
Gänse und Hühner zusammen waren es genauso viele wie Enten und Puten zusammen.
Also sind es am Anfang zusammen 12 Gänse und Hühner und auch zusammen 12 Enten und Puten.

vor dem Verkauf		...	
Gänse	Hühner	Puten	Enten
? **12**	**?**	**12**	
nach dem Verkauf **6**			
2	**2·2 = 4**	**4**	**12 - 4 = 8**

Nach dem Verkauf von 6 Hühnern waren es zusammen nur noch 6 Hühner und Gänse.
Weil jetzt doppelt so viele Hühner wie Gänse da sein sollen, sind es 4 Hühner und 2 Gänse.
Dann sind es laut Text auch 4 Puten (soviel, wie noch Hühner da sind).
Um auf 12 zu kommen, müssen es noch 8 Enten sein.
Antwortsatz formulierten lassen!
Häufiger Schülerfehler: Genannt werden die zuletzt erhaltenen Resultate. Gefragt war hier aber, wieviel Tiere jeweils am Anfang vorhanden waren.
Zu Beginn waren **2 Gänse, 10 Hühner, 4 Puten und 8 Enten** auf dem Geflügelhof.
Die *Probe* sollte man von Schülern durchführen lassen, die an der Lösungsfindung nicht oder nur gering beteiligt waren.

106)
23 ist eine ungerade Zahl. Sabine hat also aus einer Fahrtrichtung eine Bahn mehr gesehen als aus der anderen (12 bzw. 11 Bahnen).



Unter den 12 Bahnen der einen Richtung war dann auch die erste und die letzte Bahn, in den 11 Zwischenräumen dazwischen die Bahnen der Gegenrichtung.

Jeder der 11 Zeitzwischenräume war 8 Minuten lang.

Also war das Fenster (8·11 =) **88 Minuten** geöffnet.

107) *Systematisches Ermitteln aller Fälle; Folgern aus Bedingungen:*

a) **6 Spiele**: (A;B), (A;C), (A;D), (B;C), (B;D), (C;D)

b) (4 + 3 + 2 + 1 =) **10 Spiele** [*Analogie* zu Aufgabe 94) und 6.4]

c) Die **2. Tabelle** ist **falsch**.

B hat mit 6 Punkten beide Spiele gewonnen.

Dann hätte C den einen Punkt im Unentschieden gegen A holen müssen.

Mit einer Niederlage und einem Unentschieden kann A nicht auf 3 Punkte kommen.

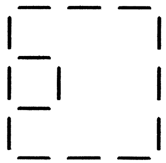
1. Tabelle richtig: A:B = 3:0 A:C = 1:1 B:C = 1:1

3. Tabelle richtig: A:B = 1:1 A:C = 1:1 B:C = 1:1

108) *Findigkeit:*

Es gibt **2** **Lösungen**:

109) *Findigkeit:*



110) *Findigkeit:*

Für die meisten Zahlen gibt es viele Möglichkeiten. Ein Beispiel ist jeweils angegeben:

$33:3 - 3\cdot3 = 2$ $33 - 33 + 3 = 3$ $(3 + 3 + 3 + 3):3 = 4$ $(33 - 3):(3 + 3) = 5$

$3\cdot3\cdot3:3 - 3 = 6$ $3 + 3 + 3 - 3:3 = 8$ $3 + 3 + 3 + 3 - 3 = 9$ $3 + 3 + 3 + 3:3 = 10$

111) *Folgern aus Bedingungen:*

Der Bildhauer Weiß hat keine weißen Haare. Da er dem Schwarzhaarigen antwortet, hat er auch keine schwarzen Haare. Der Bildhauer Weiß hat also braune Haare.

Dann hat der Musiker Schwarz nicht die braunen Haare, und da er keine schwarzen hat, muss er die weißen Haare haben.

Übrig bleibt für den **Maler** nur die **schwarze Haarfarbe**.

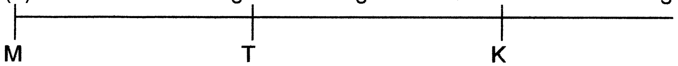
Probe am Text: Da der Maler nicht Schwarz heißt, ist diese Haarfarbe für ihn erlaubt.

112)

Auf einer waagerecht verlaufenden Geraden sollen die Punkte A, B, E, H, K, L, M, T, U so angeordnet werden, dass alle folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Sämtliche Punkte sind voneinander verschieden.

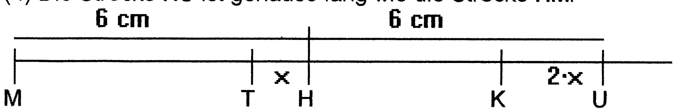
(2) Die Strecke $\overline{MT}$ ist genauso lang wie die Strecke $\overline{KT}$ und K liegt "rechts" von M.



Wegen (1) und (2) ist T der Mittelpunkt von $\overline{MK}$.

(3) Der Punkt H liegt zwischen T und K, die Länge von $\overline{HM}$ beträgt 6 cm.

(4) Die Strecke $\overline{HU}$ ist genauso lang wie die Strecke $\overline{HM}$.



Wenn wir die Differenz der Streckenlängen $\overline{MH}$ und $\overline{MT}$ mit x bezeichnen, so hat die Differenz der doppelt so langen Strecken ($\overline{MU}$ und $\overline{MK}$) die Länge 2·x..

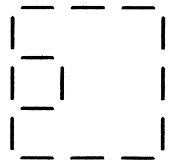
(5) T ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{AH}$, also gilt $\overline{AT} = \overline{TH} = x$.

107

108) *Findigkeit:*

Es gibt **2** **Lösungen**:

109) *Findigkeit:*



110) *Findigkeit:*

Für die meisten Zahlen gibt es viele Möglichkeiten. Ein Beispiel ist jeweils angegeben:

$33:3 - 3\cdot3 = 2$ $33 - 33 + 3 = 3$ $(3 + 3 + 3 + 3):3 = 4$ $(33 - 3):(3 + 3) = 5$

$3\cdot3\cdot3:3 - 3 = 6$ $3 + 3 + 3 - 3:3 = 8$ $3 + 3 + 3 + 3 - 3 = 9$ $3 + 3 + 3 + 3:3 = 10$

111) *Folgern aus Bedingungen:*

Der Bildhauer Weiß hat keine weißen Haare. Da er dem Schwarzhaarigen antwortet, hat er auch keine schwarzen Haare. Der Bildhauer Weiß hat also braune Haare.

Dann hat der Musiker Schwarz nicht die braunen Haare, und da er keine schwarzen hat, muss er die weißen Haare haben.

Übrig bleibt für den **Maler** nur die **schwarze Haarfarbe**.

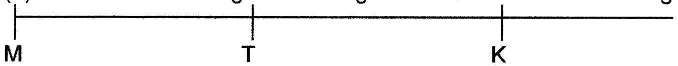
Probe am Text: Da der Maler nicht Schwarz heißt, ist diese Haarfarbe für ihn erlaubt.

112)

Auf einer waagerecht verlaufenden Geraden sollen die Punkte A, B, E, H, K, L, M, T, U so angeordnet werden, dass alle folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Sämtliche Punkte sind voneinander verschieden.

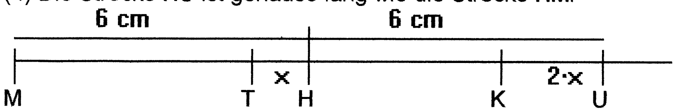
(2) Die Strecke $\overline{MT}$ ist genauso lang wie die Strecke $\overline{KT}$ und K liegt "rechts" von M.



Wegen (1) und (2) ist T der Mittelpunkt von $\overline{MK}$.

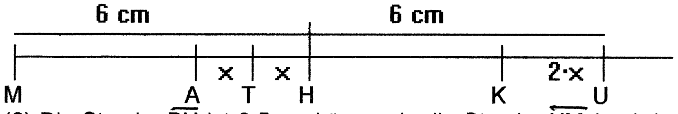
(3) Der Punkt H liegt zwischen T und K, die Länge von $\overline{HM}$ beträgt 6 cm.

(4) Die Strecke $\overline{HU}$ ist genauso lang wie die Strecke $\overline{HM}$.



Wenn wir die Differenz der Streckenlängen $\overline{MH}$ und $\overline{MT}$ mit x bezeichnen, so hat die Differenz der doppelt so langen Strecken ($\overline{MU}$ und $\overline{MK}$) die Länge 2·x..

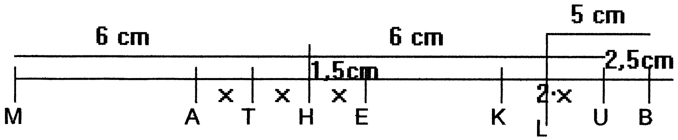
(5) T ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{AH}$, also gilt $\overline{AT} = \overline{TH} = x$.



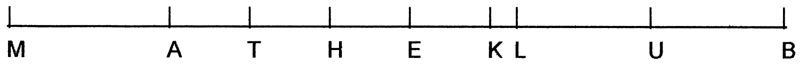
(6) Die Strecke $\overline{BU}$ ist 3,5 cm kürzer als die Strecke $\overline{HM}$ (und damit 2,5 cm lang), sie ist auch kürzer als die Strecke $\overline{BK}$.
Daraus folgt, dass B entweder "rechts von U" oder zwischen K und U und dabei näher an U liegt.

(7) Der Punkt L liegt zwischen den Punkten K und U, die Strecke $\overline{BL}$ hat eine Länge von 5 cm.
Aus (6) und (7) folgt, dass zwischen K und U kein Platz mehr für B ist, also liegt B "rechts von U".

(8) H ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{ET}$, und die Strecke $\overline{EH}$ ist 1,5 cm lang.



Jetzt endlich ist x mit 1,5 cm ermittelt, und wir erhalten für die einzelnen Teilstrecken (bei M beginnend) 3 cm; 1,5 cm; 1,5 cm; 1,5 cm; 1,5 cm; 0,5 cm; 2,5 cm und 2,5 cm
An Stelle der nicht maßstäblichen Skizze muss nun eine Konstruktionszeichnung als Lösung angegeben werden:



Das Lösungswort heißt **MATHEKLUB.**

Der **kleinste Abstand** beträgt **$\overline{KL}$= 0,5 cm,** und die **Gesamtlänge** ist **$\overline{MB}$ = 14,5 cm**.

113) *Einführen von günstigen Bezeichnungen; Übersetzen in die Sprache der Gleichungen; Folgern aus gegebenen Bedingungen; Analogie zu den Aufgaben 88) und 97):*

Folgende *Impulse* können die Lösungsfindung steuern.
Man beachte dabei: Ein "Unterimpuls" wird erst dann gegeben, wenn der nächst höhere "Hauptimpuls" bei einigen Schülern noch nicht zum Erfolg geführt hat. Besonders günstig ist es, wenn die "Unterimpulse" (nicht vom Lehrer sondern) von einem Schüler kommen, der die Lösung bereits gefunden hat.

- Führe für das Fassungsvermögen der drei Topfsorten *günstige Bezeichnungen* ein!
  [Sei g , m bzw. k das in Liter gemessene Fassungsvermögen der großen, der mittleren bzw. der kleinen Topfsorte.]
- Übersetze die gegebenen Bedingungen in die *"Sprache der Gleichungen"*!
  - Übersetze: Im obersten Fach stehen 2 große, 4 mittlere und 2 kleine Töpfe, die zusammen 24 Liter aufnehmen können.
  - Halte die für das mittlere und das untere Fach gegebenen Bedingungen analog in Form von Gleichungen fest!

    (1) $2 \cdot g + 4 \cdot m + 2 \cdot k = 24$;

    (2) $2 \cdot g + 3 \cdot m + 5 \cdot k = 24$;

    (3) $3 \cdot g + 3 \cdot m = 24$.
- Was lässt sich aus den Gleichungen (1) und (2) unmittelbar folgern?

108

(6) Die Strecke $\overline{BU}$ ist 3,5 cm kürzer als die Strecke $\overline{HM}$ (und damit 2,5 cm lang), sie ist auch kürzer als die Strecke $\overline{BK}$.
Daraus folgt, dass B entweder "rechts von U" oder zwischen K und U und dabei näher an U liegt.

(7) Der Punkt L liegt zwischen den Punkten K und U, die Strecke $\overline{BL}$ hat eine Länge von 5 cm.
Aus (6) und (7) folgt, dass zwischen K und U kein Platz mehr für B ist, also liegt B "rechts von U".

(8) H ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{ET}$, und die Strecke $\overline{EH}$ ist 1,5 cm lang.

Jetzt endlich ist x mit 1,5 cm ermittelt, und wir erhalten für die einzelnen Teilstrecken (bei M beginnend) 3 cm; 1,5 cm; 1,5 cm; 1,5 cm; 1,5 cm; 0,5 cm; 2,5 cm und 2,5 cm
An Stelle der nicht maßstäblichen Skizze muss nun eine Konstruktionszeichnung als Lösung angegeben werden:

Das Lösungswort heißt **MATHEKLUB.**

Der **kleinste Abstand** beträgt **$\overline{KL}$= 0,5 cm,** und die **Gesamtlänge** ist **$\overline{MB}$ = 14,5 cm**.

113) *Einführen von günstigen Bezeichnungen; Übersetzen in die Sprache der Gleichungen; Folgern aus gegebenen Bedingungen; Analogie zu den Aufgaben 88) und 97):*

Folgende *Impulse* können die Lösungsfindung steuern.
Man beachte dabei: Ein "Unterimpuls" wird erst dann gegeben, wenn der nächst höhere "Hauptimpuls" bei einigen Schülern noch nicht zum Erfolg geführt hat. Besonders günstig ist es, wenn die "Unterimpulse" (nicht vom Lehrer sondern) von einem Schüler kommen, der die Lösung bereits gefunden hat.

- Führe für das Fassungsvermögen der drei Topfsorten *günstige Bezeichnungen* ein!
  [Sei g , m bzw. k das in Liter gemessene Fassungsvermögen der großen, der mittleren bzw. der kleinen Topfsorte.]
- Übersetze die gegebenen Bedingungen in die *"Sprache der Gleichungen"*!
  - Übersetze: Im obersten Fach stehen 2 große, 4 mittlere und 2 kleine Töpfe, die zusammen 24 Liter aufnehmen können.
  - Halte die für das mittlere und das untere Fach gegebenen Bedingungen analog in Form von Gleichungen fest!

    (1) $2 \cdot g + 4 \cdot m + 2 \cdot k = 24$;

    (2) $2 \cdot g + 3 \cdot m + 5 \cdot k = 24$;

    (3) $3 \cdot g + 3 \cdot m = 24$.
- Was lässt sich aus den Gleichungen (1) und (2) unmittelbar folgern?

° Was würde geschehen, wenn man die Töpfe des obersten Faches bzw. die Töpfe des mittleren Faches auf die Waagschalen einer Balkenwaage stellen würde?
[Die Waage wäre im Gleichgewicht.]

: Wie kann man dies in die "Sprache der Gleichungen" übersetzen?

(4) $2 \cdot g + 4 \cdot m + 2 \cdot k = 2 \cdot g + 3 \cdot m + 5 \cdot k$.

- Was lässt sich aus Gleichung (4) unmittelbar folgern?

° Stelle dir vor, dass man von beiden Waagschalen jeweils 2 große, 3 mittlere und 2 kleine Töpfe entfernt!
Halte das Resultat dieser Schlussfolgerung in Form einer Gleichung fest!

(5) $1 \cdot m = 3 \cdot k$.

- Was lässt sich aus Gleichung (2) und (3) unmittelbar folgern?
Gehe *analog* wie oben vor!

(6) $2 \cdot g + 3 \cdot m + 5 \cdot k = 3 \cdot g + 3 \cdot m$, also

(7) $5 \cdot k = 1 \cdot g$.

- Was lässt sich nun aus den gegebenen und den abgeleiteten Gleichungen folgern?

° Aus *welchen* Gleichungen lässt sich nun eine Folgerung ziehen?

: Was lässt sich aus den Gleichungen (7), (5) und (3) folgern?

· Ersetze das in (3) vorkommende g bzw. m mit Hilfe von (7) bzw. (5) durch k !

(8) $3 \cdot 5 \cdot k + 3 \cdot 3 \cdot k = 24$, also $15 \cdot k + 9 \cdot k = 24 \cdot k = 24$ und somit

(9) $\mathbf{k = 1}$.

- Was lässt sich nun aus den gegebenen und den abgeleiteten Gleichungen folgern?
Aus (9) und (5) folgt $\mathbf{m = 3}$.
Aus (9) und (7) folgt $\mathbf{g = 5}$.

- Übersetze die Resultate aus der "Sprache der Gleichungen" in die "Wortsprache"!

Antwortsatz:
Ein **großer** Topf fasst **5 Liter**; ein **mittlerer** Topf **3 Liter** und ein **kleiner** Topf **1 Liter** .

Probe am Text nicht vergessen!

114) *Einführen von günstigen Bezeichnungen; Übersetzen in die Sprache der Gleichungen und Ungleichungen; Folgern aus gegebenen Bedingungen; Analogie zu den Aufgaben 88), 97) und 113):*

Wir bezeichnen das Gewicht des Bechers, des Kruges, des Schüsselchens bzw. der Tasse mit b, k, s bzw. t und verwenden "=" bzw. "<" zum Festhalten des Resultats eines Gewichtsvergleichs.
Das Ergebnis der drei Wägungen lässt sich dann durch drei *Gleichungen* festhalten, aus denen man unmittelbar Ergebnisse von Gewichtsvergleichen (inhaltlich) folgern kann.
Als Begründung lasse man formulieren: "Wenn zwei Geschirrstücke zusammen das gleiche Gewicht wie ein drittes haben, dann ist jedes dieser beiden Geschirrstücke leichter als das dritte".

(1) $b + t = k$, also $(b < k)$ und $\mathit{t < k}$.

(2) $t = b + s$, also $\mathit{b < t}$ und $s < t$.

(3) $3 \cdot s = 2 \cdot k$, also $(s < k)$ (entsprechende Begründung verlangen!).

Aus den kursiv geschriebenen Ungleichungen folgt $b < t < k$.

109

° Was würde geschehen, wenn man die Töpfe des obersten Faches bzw. die Töpfe des mittleren Faches auf die Waagschalen einer Balkenwaage stellen würde?
[Die Waage wäre im Gleichgewicht.]

: Wie kann man dies in die "Sprache der Gleichungen" übersetzen?

(4) $2 \cdot g + 4 \cdot m + 2 \cdot k = 2 \cdot g + 3 \cdot m + 5 \cdot k$.

- Was lässt sich aus Gleichung (4) unmittelbar folgern?

° Stelle dir vor, dass man von beiden Waagschalen jeweils 2 große, 3 mittlere und 2 kleine Töpfe entfernt!
Halte das Resultat dieser Schlussfolgerung in Form einer Gleichung fest!

(5) $1 \cdot m = 3 \cdot k$.

- Was lässt sich aus Gleichung (2) und (3) unmittelbar folgern?
Gehe *analog* wie oben vor!

(6) $2 \cdot g + 3 \cdot m + 5 \cdot k = 3 \cdot g + 3 \cdot m$, also

(7) $5 \cdot k = 1 \cdot g$.

- Was lässt sich nun aus den gegebenen und den abgeleiteten Gleichungen folgern?

° Aus *welchen* Gleichungen lässt sich nun eine Folgerung ziehen?

: Was lässt sich aus den Gleichungen (7), (5) und (3) folgern?

· Ersetze das in (3) vorkommende g bzw. m mit Hilfe von (7) bzw. (5) durch k !

(8) $3 \cdot 5 \cdot k + 3 \cdot 3 \cdot k = 24$, also $15 \cdot k + 9 \cdot k = 24 \cdot k = 24$ und somit

(9) $\mathbf{k = 1}$.

- Was lässt sich nun aus den gegebenen und den abgeleiteten Gleichungen folgern?
Aus (9) und (5) folgt $\mathbf{m = 3}$.
Aus (9) und (7) folgt $\mathbf{g = 5}$.

- Übersetze die Resultate aus der "Sprache der Gleichungen" in die "Wortsprache"!

Antwortsatz:
Ein **großer** Topf fasst **5 Liter**; ein **mittlerer** Topf **3 Liter** und ein **kleiner** Topf **1 Liter** .

Probe am Text nicht vergessen!

114) *Einführen von günstigen Bezeichnungen; Übersetzen in die Sprache der Gleichungen und Ungleichungen; Folgern aus gegebenen Bedingungen; Analogie zu den Aufgaben 88), 97) und 113):*

Wir bezeichnen das Gewicht des Bechers, des Kruges, des Schüsselchens bzw. der Tasse mit b, k, s bzw. t und verwenden "=" bzw. "<" zum Festhalten des Resultats eines Gewichtsvergleichs.
Das Ergebnis der drei Wägungen lässt sich dann durch drei *Gleichungen* festhalten, aus denen man unmittelbar Ergebnisse von Gewichtsvergleichen (inhaltlich) folgern kann.
Als Begründung lasse man formulieren: "Wenn zwei Geschirrstücke zusammen das gleiche Gewicht wie ein drittes haben, dann ist jedes dieser beiden Geschirrstücke leichter als das dritte".

(1) $b + t = k$, also $(b < k)$ und $\mathit{t < k}$.

(2) $t = b + s$, also $\mathit{b < t}$ und $s < t$.

(3) $3 \cdot s = 2 \cdot k$, also $(s < k)$ (entsprechende Begründung verlangen!).

Aus den kursiv geschriebenen Ungleichungen folgt $b < t < k$.

Die eingeklammerten Ungleichungen erweisen sich als "überflüssig", und aus $s < t$ folgt nur, dass entweder der Becher oder das Schüsselchen das leichteste Geschirrstück ist. Viele Schüler werden glauben, dass das "kleine" Schüsselchen leichter sein wird als der "größere" Becher. Es ist wichtig hervorzuheben, dass dies nur eine *Vermutung* ist (die sich sogar als falsch erweisen wird).

Beim *Folgern aus den Gleichungen* (1), (2), (3) ist wichtig, dass die Schüler stets *inhaltliche Begründungen* bringen:
"Das Gleichgewicht wird nicht gestört, wenn man auf beiden Waagschalen denselben Gegenstand hinzufügt oder wegnimmt."
"Man darf jeden Gegenstand durch Gegenstände ersetzen, die zusammen das gleiche Gewicht wie dieser Gegenstand besitzen."
"Eine Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn man die auf den Waagschalen stehenden Gegenstände verdoppelt, verdreifacht usw."
Die Schüler sollen erkennen, dass bei diesem Folgern oft *Sackgassen* auftreten und dass man keineswegs erwarten kann, sofort eine *günstige Reihenfolge* der Schlussfolgerungen zu finden.
Es ist günstig, mit den Gleichungen (1) und (2) zu beginnen, wobei zwei verschiedene Schlussfolgerungen relativ nahe liegen, die beide zum selben Resultat führen:
Man ersetzt in Wägung (1) die Tasse durch (Becher und Schüsselchen), die in Wägung (2) vorkommen, und gelangt so zu
(4) $2\cdot b + s = k$.
Oder man stellt bei Wägung (2) auf jede Waagschale zusätzlich einen Becher und vergleicht mit Wägung (1), was zum selben Resultat (3) führt.
Durch "seitenweise Addition" folgt aus (1) und (2) die Gleichung $b + 2\cdot t = k + b + s$ und hieraus
(4*) $2\cdot t = k + s$.
Die noch nicht verwendete Gleichung (3) gestattet, $2\cdot k$ durch $3\cdot s$ zu ersetzen oder umgekehrt. Das kann zur Idee führen, durch "Verdoppeln" oder "Verdreifachen" aus (4) bzw. (4*) eine Gleichung herzuleiten, in der $2\cdot k$ oder $3\cdot s$ vorkommt:

(5) $4\cdot b + 2\cdot s = 2\cdot k$ oder (5a) $6\cdot b + 3\cdot s = 3\cdot k$ oder

(5*) $4\cdot t = 2\cdot k + 2\cdot s$ oder (5a*) $6\cdot t = 3\cdot k + 3\cdot s$.

Der einfachste Lösungsweg besteht darin, aus (5) und (3) zu folgern, dass $4\cdot b + 2\cdot s = 3\cdot s$ gilt und folglich auch

(6) $\mathbf{s = 4\cdot b}$, woraus (entgegen der Vermutung) $\mathbf{b < s}$ und damit $\mathbf{b < s < t < k}$ folgt.

Dass die anderen möglichen Schlussfolgerungen auf Umwege oder in Sackgassen führen, ist von vornherein nicht zu erkennen!
Der Rest ist einfach:
Aus (6) und (2) folgt $\mathbf{t = 5\cdot b}$.
Aus (6) und (3) folgt $12\cdot b = 2\cdot k$ und damit $\mathbf{k = 6\cdot b}$.

115) *Verwenden von zweckmäßigen Bezeichnungen, Fallunterscheidung*
a) Romys Aufgabe läßt sich in der Form

$$\begin{array}{r} A\ B\ \mathbf{O} \\ \underline{+\quad A\ B} \\ 6\ 2\ \square \end{array}$$

schreiben. Daraus ergeben sich zwei Fälle:

Fall 1: A = 5 (mit Übertrag von A + B).

Dann muss B = 7 gelten, und die gesuchte Zahl lautet **570**.

Probe: 570 + 57 = 627, und 627 liegt zwischen 620 und 630.

110

Die eingeklammerten Ungleichungen erweisen sich als "überflüssig", und aus $s < t$ folgt nur, dass entweder der Becher oder das Schüsselchen das leichteste Geschirrstück ist. Viele Schüler werden glauben, dass das "kleine" Schüsselchen leichter sein wird als der "größere" Becher. Es ist wichtig hervorzuheben, dass dies nur eine *Vermutung* ist (die sich sogar als falsch erweisen wird).

Beim *Folgern aus den Gleichungen* (1), (2), (3) ist wichtig, dass die Schüler stets *inhaltliche Begründungen* bringen:
"Das Gleichgewicht wird nicht gestört, wenn man auf beiden Waagschalen denselben Gegenstand hinzufügt oder wegnimmt."
"Man darf jeden Gegenstand durch Gegenstände ersetzen, die zusammen das gleiche Gewicht wie dieser Gegenstand besitzen."
"Eine Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn man die auf den Waagschalen stehenden Gegenstände verdoppelt, verdreifacht usw."
Die Schüler sollen erkennen, dass bei diesem Folgern oft *Sackgassen* auftreten und dass man keineswegs erwarten kann, sofort eine *günstige Reihenfolge* der Schlussfolgerungen zu finden.
Es ist günstig, mit den Gleichungen (1) und (2) zu beginnen, wobei zwei verschiedene Schlussfolgerungen relativ nahe liegen, die beide zum selben Resultat führen:
Man ersetzt in Wägung (1) die Tasse durch (Becher und Schüsselchen), die in Wägung (2) vorkommen, und gelangt so zu
(4) $2\cdot b + s = k$.
Oder man stellt bei Wägung (2) auf jede Waagschale zusätzlich einen Becher und vergleicht mit Wägung (1), was zum selben Resultat (3) führt.
Durch "seitenweise Addition" folgt aus (1) und (2) die Gleichung $b + 2\cdot t = k + b + s$ und hieraus
(4*) $2\cdot t = k + s$.
Die noch nicht verwendete Gleichung (3) gestattet, $2\cdot k$ durch $3\cdot s$ zu ersetzen oder umgekehrt. Das kann zur Idee führen, durch "Verdoppeln" oder "Verdreifachen" aus (4) bzw. (4*) eine Gleichung herzuleiten, in der $2\cdot k$ oder $3\cdot s$ vorkommt:

(5) $4\cdot b + 2\cdot s = 2\cdot k$ oder (5a) $6\cdot b + 3\cdot s = 3\cdot k$ oder

(5*) $4\cdot t = 2\cdot k + 2\cdot s$ oder (5a*) $6\cdot t = 3\cdot k + 3\cdot s$.

Der einfachste Lösungsweg besteht darin, aus (5) und (3) zu folgern, dass $4\cdot b + 2\cdot s = 3\cdot s$ gilt und folglich auch

(6) $\mathbf{s = 4\cdot b}$, woraus (entgegen der Vermutung) $\mathbf{b < s}$ und damit $\mathbf{b < s < t < k}$ folgt.

Dass die anderen möglichen Schlussfolgerungen auf Umwege oder in Sackgassen führen, ist von vornherein nicht zu erkennen!
Der Rest ist einfach:
Aus (6) und (2) folgt $\mathbf{t = 5\cdot b}$.
Aus (6) und (3) folgt $12\cdot b = 2\cdot k$ und damit $\mathbf{k = 6\cdot b}$.

115) *Verwenden von zweckmäßigen Bezeichnungen, Fallunterscheidung*
a) Romys Aufgabe läßt sich in der Form

$$\begin{array}{r} A\ B\ \mathbf{O} \\ \underline{+\quad A\ B} \\ 6\ 2\ \square \end{array}$$

schreiben. Daraus ergeben sich zwei Fälle:

Fall 1: A = 5 (mit Übertrag von A + B).

Dann muss B = 7 gelten, und die gesuchte Zahl lautet **570**.

Probe: 570 + 57 = 627, und 627 liegt zwischen 620 und 630.

Fall 2: A = 6 (ohne Übertrag).
In diesem Fall ergibt sich ein Widerspruch, weil die Summe aus drei- und zweistelliger Zahl dann mindestens 660 sein würde.
Es gibt also nur eine Möglichkeit.

b) Analog kann man bei Olaf schreiben:

$$\begin{array}{rccc} & C & \mathbf{0} & D \\ - & & C & D \\ \hline & 7 & 2 & 0 \end{array}$$

Daraus ergibt sich sofort C = 8. D ist beliebig wählbar.
Für Olafs Zahl ergeben sich **10 Möglichkeiten**: **800, 801, 802,** ... **, 809**.
Proben nicht vergessen!

111

Fall 2: A = 6 (ohne Übertrag).
In diesem Fall ergibt sich ein Widerspruch, weil die Summe aus drei- und zweistelliger Zahl dann mindestens 660 sein würde.
Es gibt also nur eine Möglichkeit.

b) Analog kann man bei Olaf schreiben:

$$\begin{array}{rccc} & C & \mathbf{0} & D \\ - & & C & D \\ \hline & 7 & 2 & 0 \end{array}$$

Daraus ergibt sich sofort C = 8. D ist beliebig wählbar.
Für Olafs Zahl ergeben sich **10 Möglichkeiten**: **800, 801, 802,** ... **, 809**.
Proben nicht vergessen!

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

1. Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft (Hrsg.): Begabte Kinder finden und fördern, 1992

2. Gericke,K. / Rautenberg,B. / Sprengel, H.-J.: Mathematische außerunterrichtliche Tätigkeit in der Unterstufe (Klasse 3), Potsdamer Forschungen, Reihe C, Heft 71, 1987

3. Kerber, H.-J.: Klasse 3 oder 4 - 150 Aufgaben in 50 Karten, Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Neubrandenburg, 1984

4. Polya, G.: Schule des Denkens, Bern 1949

5. Polya, G.: Vom Lösen mathematischer Aufgaben , Band 1 und Band 2, Basel/Stuttgart 1966 und 1967

6. Reichelt, H. / Grahnert, U.: Aufgaben für Veranstaltungen der Arbeitsgemeinschaft Mathematik Klasse 3, Institut für Lehrerbildung "Clara Zetkin", Rochlitz 1989

7. Schulze, G. / Sprengel, H.-J.: Mathematische Arbeitsgemeinschaften in den Klassen 3 oder 4, Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Cottbus 1982

Einige Titel aus dem vom Bezirkskomitee Chemnitz angebotenen Material:

8. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 3, Chemnitz 1999

9. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 4, Chemnitz 1996

10. Pörnig, L.: AG Klasse 4 - Eine Anleitung für AG-Leiter, Chemnitz 1996

11. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 5, Chemnitz 1996

12. König, H.: AG Klasse 5 - Eine Anleitung für AG-Leiter, Chemnitz, 1996

13. Aufgaben der Adam-Ries-Wettbewerbe - Klasse 5 (1981 - 1995), Chemnitz 1996

14. Haase,P./ König,H.: 15 Jahre Adam-Ries-Wettbewerb für Schüler der Klasse 5 - ein Beitrag zur Förderung mathematisch begabter Schüler, Chemnitz 1996

15. König, H.: Heuristik beim Lösen mathematischer Aufgaben im außerunterrichtlichen Bereich, Chemnitz 1996

112

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

1. Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft (Hrsg.): Begabte Kinder finden und fördern, 1992

2. Gericke,K. / Rautenberg,B. / Sprengel, H.-J.: Mathematische außerunterrichtliche Tätigkeit in der Unterstufe (Klasse 3), Potsdamer Forschungen, Reihe C, Heft 71, 1987

3. Kerber, H.-J.: Klasse 3 oder 4 - 150 Aufgaben in 50 Karten, Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Neubrandenburg, 1984

4. Polya, G.: Schule des Denkens, Bern 1949

5. Polya, G.: Vom Lösen mathematischer Aufgaben , Band 1 und Band 2, Basel/Stuttgart 1966 und 1967

6. Reichelt, H. / Grahnert, U.: Aufgaben für Veranstaltungen der Arbeitsgemeinschaft Mathematik Klasse 3, Institut für Lehrerbildung "Clara Zetkin", Rochlitz 1989

7. Schulze, G. / Sprengel, H.-J.: Mathematische Arbeitsgemeinschaften in den Klassen 3 oder 4, Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Cottbus 1982

Einige Titel aus dem vom Bezirkskomitee Chemnitz angebotenen Material:

8. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 3, Chemnitz 1999

9. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 4, Chemnitz 1996

10. Pörnig, L.: AG Klasse 4 - Eine Anleitung für AG-Leiter, Chemnitz 1996

11. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 5, Chemnitz 1996

12. König, H.: AG Klasse 5 - Eine Anleitung für AG-Leiter, Chemnitz, 1996

13. Aufgaben der Adam-Ries-Wettbewerbe - Klasse 5 (1981 - 1995), Chemnitz 1996

14. Haase,P./ König,H.: 15 Jahre Adam-Ries-Wettbewerb für Schüler der Klasse 5 - ein Beitrag zur Förderung mathematisch begabter Schüler, Chemnitz 1996

15. König, H.: Heuristik beim Lösen mathematischer Aufgaben im außerunterrichtlichen Bereich, Chemnitz 1996