

**AUFGABENSAMMLUNG FÜR ARBEITSGEMEINSCHAFTEN - Klasse 8**

**ZAHLENTHEORIE**

Wiederhole aus den Aufgabensammlungen:

Klasse 6, S.30 : Der Euklidische Algorithmus zur Bestimmung des ggT(a;b)

Klasse 7, S.25 : Grundgleichung der Zahlentheorie; Sätze aus der Teilbarkeitslehre

1) Bestimme den ggT von folgenden Zahlenpaaren mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus:

a) (869; 553);    b) (4743; 4132);    c) (1632; 833);    d) (4140; 3666) .

2) Bestimme den ggT(3774; 2886; 1702; 777) !

3) Wahr oder falsch? Begründe!

a)  $-14 \equiv 46 \pmod{5}$  ;

h)  $401276 \equiv 25362 \pmod{99}$  ;

b)  $42 \equiv -21 \pmod{7}$  ;

i)  $1728435 \equiv 1464315 \pmod{6}$  ;

c)  $6538 \equiv 6508 \pmod{6}$  ;

j)  $1728435 \equiv 1464315 \pmod{15}$  ;

d)  $875 \equiv 161 \pmod{9}$  ;

k)  $1728435 \equiv 1464315 \pmod{18}$  ;

e)  $875 \equiv 161 \pmod{3}$  ;

l)  $1728435 \equiv 1464315 \pmod{20}$  ;

f)  $401276 \equiv 25362 \pmod{11}$  ;

m)  $1728435 \equiv 1464315 \pmod{22}$  .

g)  $401276 \equiv 25362 \pmod{9}$  ;

4) Beweise, dass für alle  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  gilt:

a) Wenn  $a \equiv b \pmod{m}$  und  $b \equiv c \pmod{m}$ , dann  $a \equiv c \pmod{m}$  ; (Transitivität von " $\equiv$ ") .

b) Wenn  $a \equiv b \pmod{m}$ , dann  $a + c \equiv b + c \pmod{m}$  .

5) Vereinfache (durch entsprechende Division auf beiden Seiten):

a)  $64 \equiv 40 \pmod{12}$  ;    b)  $21 \equiv 6 \pmod{15}$  ;    c)  $-45 \equiv 60 \pmod{7}$  ;

d)  $65 \equiv 117 \pmod{26}$  ;    e)  $-11 \equiv 121 \pmod{6}$  ;    f)  $56 \equiv -24 \pmod{16}$  ;

g)  $32 \equiv -16 \pmod{12}$  ;    h)  $135 \equiv 15 \pmod{8}$  ;    i)  $906 \equiv 663 \pmod{243}$  ;

j)  $196 \equiv 378 \pmod{91}$  ;    k)  $306 \equiv 663 \pmod{357}$  .

6) a) Gegeben seien zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $b$ , die bei Division durch 7 die Reste 5 bzw. 3 lassen.

Welchen Rest lässt dann die Summe der Quadrate dieser Zahlen bei Division durch 7 ?

b) Gegeben seien zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $b$ , die bei Division durch 7 die Reste 5 bzw. 3 lassen.

Durch welche Zahlen ist die Differenz der Quadrate dieser Zahlen dann stets teilbar?

7) Berechne die Reste, die  $a^n$  für  $n = 1, 2, 3, \dots, 9$  bei Division durch 10 lässt!

8) Untersuche, welche (absolut kleinsten) Reste eine beliebige Quadratzahl bei Division durch  $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  lassen kann!

- 9) a) Formuliere und beweise die aus dem Unterricht bekannten Teilbarkeitsregeln für 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10!  
 b) Suche nach Teilbarkeitsregeln für 7, 11, 12, 13, 14, 15!
- 10) Berechne die (absolut kleinsten) Reste von  $10^k$  für  $k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$  bei Division durch  $m = 2, 3, 4, \dots, 11, 12, 13$ !  
 Halte die Ergebnisse übersichtlich in einer Tabelle fest!
- 11) Sei  $z = \overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + 10^3 a_3 + 10^4 a_4 + 10^5 a_5$  mit  $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  eine beliebige sechsstellige Zahl.  
 Vereinfache jeweils diese Summe nach dem Modul  $m$ , und zwar für  $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13$ .  
 Welcher Zusammenhang besteht zwischen den erhaltenen Resultaten und den Teilbarkeitsregeln?
- 12) a) Beweise, dass für alle natürlichen Zahlen  $a, b, c, d, e$  gilt:  
 $a + 10^3 b + 10^6 c + 10^9 d + 10^{12} e \equiv a - b + c - d + e \pmod{13}$ .  
 b) Verwende diese Gesetzmäßigkeit, um auf möglichst einfache Weise die Reste zu berechnen, die folgende Zahlen bei Division durch 13 lassen:  
 $z = 129272273593594$ ;  $z = 627754382511$ ;  $z = 35837292$ .
- 13) a) Untersuche, welche Primzahlen gemeinsame Teiler der Zahlen 183183, 225225, 312312, und 412412 sind!  
 b) Beweise, dass (im dekadischen Positionssystem) alle Zahlen der Form  $\overline{abcabc}$  diese Primzahlen als Teiler haben!
- 14) Überprüfe die Richtigkeit folgender Rechnungen mit Hilfe der Neunerprobe und der Elferprobe!  
 a)  $56903 \cdot 48721 = 2772371063$ ;      b)  $47773 \cdot 535353 = 25577708869$ ;  
 c)  $91453 \cdot 60817 = 5561890171$  (bzw.  $5561897101$ );  
 d)  $1683^2 + 79^4 + 17^9 + 23^8 = 196940644348$ ;  
 e)  $138^2 \cdot 21 + 46^3 \cdot 19 + 37^4 \cdot 23 + 54^7 = 1338945355011$ ;  
 f)  $24^4 \cdot 12 + 17^3 \cdot 21 + 32^5 \cdot 4 = 138302213$ .
- 15) Auf welche Ziffern enden folgende Produkte:  
 a)  $z = 3826^{12} \cdot 417^5 \cdot 1992^6 \cdot 2439^5$ ;      b)  $z = 3826^{12} \cdot 574^8 \cdot 2964^9 \cdot 39^{26}$ ;  
 c)  $z = 742^7 \cdot 543 \cdot 39726^{13}$ .
- 16) Beweise folgende Sätze:  
 a) Wenn  $z = 43^7 - 87^{13}$ , dann  $44|z$ .      b) Wenn  $z = 171^n - 33^{2n}$ , dann  $51|z$ .  
 c) Wenn  $z = 5324^{2n+1} + 396^{2n}$ , dann  $55|z$ .      d) Wenn  $z = 154^{2n} + 98^{2n+1}$ , dann  $63|z$ .
- 17) Ermittle die Erfüllungsmengen folgender linearer Kongruenzen:  
 a)  $2x \equiv 4 \pmod{5}$ ;      b)  $3x \equiv 4 \pmod{5}$ ;      c)  $5x \equiv 6 \pmod{5}$ ;      d)  $23x \equiv 42 \pmod{5}$ ;  
 e)  $56x \equiv 10 \pmod{84}$ ;      f)  $19x \equiv 18 \pmod{7}$ ;      g)  $123x \equiv 87 \pmod{10}$ ;      h)  $24x \equiv 13 \pmod{4}$ ;  
 i)  $121x \equiv 88 \pmod{22}$ ;      j)  $25x \equiv 12 \pmod{5}$ ;      k)  $39x \equiv 30 \pmod{51}$ ;      l)  $10x \equiv 16 \pmod{28}$ .

- 18) Sei  $z = n^3 + 2n$ . Durch welche natürliche Zahl (größer 1) ist  $z$  dann stets teilbar?  
Beweise deine Vermutung!
- 19) Beweise: Wenn die Summe dreier Kubikzahlen  $a^3, b^3, c^3$  durch 7 teilbar ist, dann ist wenigstens eine der drei Zahlen  $a, b, c$  durch 7 teilbar.
- 20) Sei  $z = n^{12} - n^8 - n^4 + 1$  und  $n$  nicht durch 3 teilbar.  
a) Beweise, dass dann stets  $3|z$  gilt!  
b) Beweise, dass dann sogar stets  $9|z$  gilt!
- 21) Beweise: Wenn  $100a + b \equiv (7)$ , dann  $a + 4b \equiv 0 (7)$ .
- 22) a) Formuliere folgende Aussage mit Hilfe von Kongruenzen:  
Für alle ungeraden Zahlen  $n$  ist  $n^2 - 1$  durch 8 teilbar.  
b) Beweise diese Aussage!
- 23) Weise nach, dass  $z(n) = 2^1 + 2^9 + 2^9 + 2^2 + 2^n$  für keine natürliche Zahl  $n$  eine Quadratzahl ist!
- 24) Untersuche, ob folgende Zahlen Quadratzahlen sind!  
a)  $z = 38276519$ ; b)  $z = 32239684$ ; c)  $z = 72635401302$ ; d)  $72635401320$ ;  
e)  $z = 19^{66} + 66^{19}$ ; f)  $z = 66^{19} - 99^{16}$ ; g)  $z = 2 \cdot 71^{17} + 3 \cdot 34^{43} + 126^{13}$ ;  
h)  $z = 5^{24} + 2^{13} \cdot 15^{12} + 6^{24}$ ; zu  $i, j, k$ :  $z$  sei siebenstellig und für  $z$  gelte  
i)  $QS(z) = 9$ ; j)  $QS(z) = 33$ ; k)  $QS(z) = 63$ .
- 25) Die Zahlen  $4 (= 2^2)$  und  $2226064 (= 1492^2)$  sind Quadratzahlen mit lauter geraden Ziffern.  
Ermittle alle Quadratzahlen, die nur aus ungeraden Ziffern bestehen!
- 26) Zeige, dass die Gleichung  $x^2 + 2 = 4y$  keine ganzzahligen Lösungen haben kann!
- 27) Eine Zahlenfolge sei durch  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$  für  $n = 3, 4, 5, \dots$  gegeben.  
Welchen Rest lässt  $a_{192}$  bei Division durch 7?
- 28) Zeige, dass im dekadischen Positionssystem jede vierstellige natürliche Zahl, die zwei Paare gleicher Ziffern enthält, keine Primzahl sein kann!
- 29) Wir betrachten die Zahlen  $z_1 = 7^7, z_2 = 49^7, z_3 = 7^{49}, z_4 = 7^{7^7}$ .  
a) Wie lautet jeweils die letzte Ziffer dieser Zahlen?  
b) Wie lauten jeweils die beiden letzten Ziffern dieser Zahlen?
- 30) Die Zahlen  $2^{2^n} + 1$  heißen "Fermat-Zahlen".  
a) Berechne  $F(0), F(1), F(2), F(3), F(4)$  und weise nach, dass diese Zahlen Primzahlen sind!  
b) Euler hat gezeigt, dass  $641|F(5)$  gilt. Führe diesen Nachweis! (Ob es unter den Fermat-Zahlen außer den fünf genannten noch weitere gibt, ist bisher noch unbekannt.)  
c) Was lässt sich über die letzte Ziffer von  $F(n)$  für  $n > 1$  aussagen?  
Beweise deine Vermutung!  
d) Berechne die Produkte  $p_1 = F(0) \cdot F(1), p_2 = p_1 \cdot F(2), p_3 = p_2 \cdot F(3) \dots, p_n = p_{n-1} \cdot F(n)$ .  
Äußere eine Vermutung!

## ARITHMETIK

### Funktionen und ihre Graphen

- 1) Zeichne (in einem rechtwinkligen Koordinatensystem) die zu folgenden Funktionsgleichungen gehörenden Graphen:

$$y = \frac{1}{2}x ; \quad y = \frac{1}{2}x + 2 ; \quad y = 2x ; \quad y = 2x - 1 ; \quad (x, y \in \mathbb{R}) .$$

- 2) Zeichne die Geraden, die durch folgende Gleichungen dargestellt werden, in einem Koordinatensystem! Vergleiche!

$$f_1 : 3x + 2y = 6 ; \quad f_2 : -3x + 2y = 6 ; \quad f_3 : 3x - 2y = 6 ;$$

$$f_4 : 0 \cdot x + 2y = 6, \text{ d.h. } y = 3 ; \quad f_5 : 3x + 0 \cdot y = 6, \text{ d.h. } x = 2 .$$

Wie kann man die Schnittpunkte solcher Geraden mit den Achsen des Koordinatensystems aus den Gleichungen ermitteln?

- 3) Gegeben seien die Punkte  $P(1;3)$  und  $Q(2;5)$ .

Bestimme die Gleichung der linearen Funktion  $f$ , die die Gerade  $PQ$  als Graph besitzt!

- 4) Zeichne die Graphen der Funktionen, die durch folgende Funktionsgleichungen und Definitionsbereiche gegeben sind:

a)  $f_1 : y = -\frac{1}{2}x + 3 ; 1 \leq x \leq 4 ; \quad f_2 : y = -\frac{1}{2}x + 3 ; x \in \mathbb{Z} ; \quad f_3 : y = -\frac{1}{2}x + 3 ; x \in \{1,2,3,4\} .$

b)  $f_1 : y = |x| ; -1 \leq x \leq 2 ; \quad f_2 : y = |x| + 2 ; -1 \leq x \leq 2 ;$   
 $f_3 : y = |x - 2| ; 1 \leq x \leq 4 ; \quad f_4 : y = |x - 2| + 2 ; 1 \leq x \leq 4 .$

- 5) Zeichne die Graphen der Funktionen, die durch folgende Funktionsgleichungen und Definitionsbereiche gegeben sind:

a)  $f_1 : y = \operatorname{sgn}(x) ; -3 \leq x \leq 3 ; \quad f_2 : y = \operatorname{sgn}(2x + 1) ; -3 \leq x \leq 3 ;$

$f_3 : y = \operatorname{sgn}(4x + 2) ; -3 \leq x \leq 3 ; \quad f_4 : y = 2\operatorname{sgn}(-5x + 10) ; -3 \leq x \leq 3 .$

b)  $f_1 : y = [x] ; -2 \leq x \leq 2 ; \quad f_2 : y = 2[x] ; -2 \leq x \leq 2 ;$

$f_3 : y = [2x] ; -1 \leq x \leq 1 ; \quad f_4 : y = [x - 1] + 2 ; -1 \leq x \leq 3 .$

Bilde weitere analoge Aufgaben!

- 6) Gegeben sei der Graph einer Funktion  $y = f(x)$ .

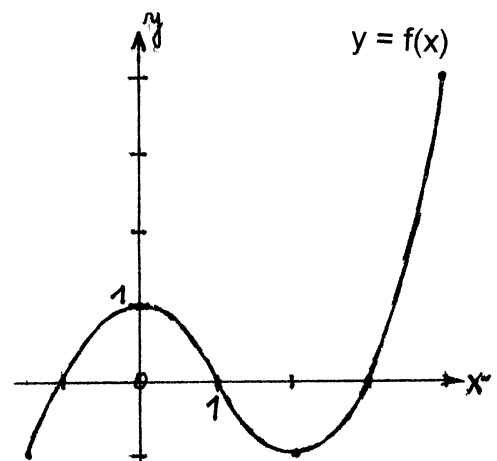
Beschreibe, wie man aus diesem Graphen die Graphen folgender Funktionen erhalten kann:

$$y = f(-x) ; \quad y = -f(x) ; \quad y = f(x - 2) ;$$

$$y = f(x) + 2 ; \quad y = f(2x) ; \quad y = 2f(x) ;$$

$$y = f\left(\frac{1}{2}x\right) ; \quad y = \frac{1}{2}f(x) ; \quad y = |f(x)| ;$$

$$y = \operatorname{sgn}(f(x)) ; \quad y = [f(x)] .$$



- 7) Gegeben sei das durch  $y = mx + 2$  dargestellte Geradenbüschel sowie der Punkt  $P(2;1)$ . Bestimme auf graphischem und auf rechnerischem Weg denjenigen Wert des Parameters  $m$ , für den  $P$  auf der zugehörigen Geraden des Büschels liegt.

Löse analog folgende Aufgaben:

	$y = f(x;p)$	$P(x;y)$	bestimme p so, dass $P(x;y) \in f$
a)	$y = 2x + p$	$P_1(-1;3)$	.....
b)	$y = 2x + p$	$P_2(1;-1)$	.....
c)	$y = px - 2$	$P_1(4;1)$	.....
d)	$y = px - 2$	$P_2(1;-2)$	.....
e)	$y = px - 2$	$P_3(0;1)$	.....
f)	$y = px - 2$	$P_4(0;-2)$	.....

- 8) Zeichne den Graphen von  $y = m(x - 1) + 2$  .
- 9) Gibt es auf den Geraden des Büschels  $y = mx + 2$  Punkte, für die  $y = x + 1$  gilt?  
Wenn ja, wie lauten deren Koordinaten?  
(Graphische Veranschaulichung!)
- 10) Bestimme die Gleichung der Geraden, die den beiden durch  $y = p(x + 2) + 2$  sowie  $y = p(x - 2) + 4$  dargestellten Geradenbüscheln gemeinsam ist!
- 11) Für jede reelle Zahl  $m$  und jede reelle Zahl  $n$  wird durch  $y = f(x) = mx + n$  eine Funktion  $f$  definiert, deren Graph eine Gerade  $g$  ist.  
Ermittle die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf  $g$ , deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse!  
Stelle insbesondere fest, für welche  $m$  und  $n$  überhaupt ein solcher Punkt auf  $g$  existiert!

### Das Berechnen und Umformen von Termen

12) Berechne die Werte folgender Terme:

- a)  $[1,5] = \dots$  ;  $[\pi] = \dots$  ;  $[1 - \pi] = \dots$  ;  $[-\frac{15}{7}] = \dots$  ;  
 $[2\pi - 7,25] = \dots$  ;  $[\pi^2 - \pi - 5] = \dots$  .
- b)  $\text{sgn}(2\pi - 6) = \dots$  ;  $\text{sgn}(\frac{14}{9} - \pi) = \dots$  ;  $\text{sgn}(\frac{6}{4} - \frac{15}{10}) = \dots$  ;  
 $\text{sgn}(x^2 + 1) = \dots$  .
- c)  $[|\pi - \pi^2|] = \dots$  ;  $[|\pi - \pi^2|] = \dots$  ;  $\text{sgn}(|\pi - \pi^2|) = \dots$  ;  
 $|\text{sgn}(\pi - \pi^2)| = \dots$  ;  $[\text{sgn}(\pi - \pi^2)] = \dots$  ;  $\text{sgn}([\pi - \pi^2]) = \dots$  .
- d)  $\text{sgn}([1 + 2x^2]) = \dots$  ;  $[\text{sgn}(1 + 2x^2)] = \dots$  ;  $\text{sgn}([f(x)]) = \dots$  , wenn  $f(x) < 0$ .

13) Unter welchen Bedingungen für  $f(x)$  gilt

- a)  $[|f(x)|] = [ |f(x)| ]$  ; .....
- b)  $\text{sgn}(|f(x)|) = | \text{sgn}(f(x)) |$  ; .....
- c)  $\text{sgn}([f(x)]) = [ \text{sgn}(f(x)) ]$  ; .....
- d)  $[ \text{sgn}(|f(x)|) ] = 1$  ; .....

14) Es gilt  $(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$

Berechne  $(a + b)^2 = \dots\dots\dots$

$(a + b)^3 = \dots\dots\dots$

$(a + b)^4 = \dots\dots\dots$

$(a + b)^5 = \dots\dots\dots$

Was lässt sich über die Koeffizienten der auftretenden Summanden aussagen?

15) Berechne  $(a + b + c)^2 = \dots\dots\dots$

$(a + b + c + d)^2 = \dots\dots\dots$

Formuliere eine Regel, mit deren Hilfe man  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$  berechnen kann!

16) Berechne und vereinfache! Achte dabei auf Rechenvorteile!

a)  $\left(\frac{x+y}{3x-5y} - \frac{x+y}{3x+5y}\right) : \frac{5x^2-5y^2}{9x^2-25y^2} = \dots\dots\dots$

b)  $\left(\frac{x}{b^2+b} - \frac{x}{b-1} + \frac{bx+1}{b^2-1}\right) : \frac{1}{b^2+b} = \dots\dots\dots$

c)  $\left(\frac{m}{m+n} - \frac{m^2}{m^2+2mn+n^2} + \frac{n^2}{(m-n)^2} + \frac{n}{m-n}\right) \cdot \frac{m^2-n^2}{2mn} = \dots\dots\dots$

d)  $\left(\frac{x+y}{2x} + \frac{x+y}{4y} - \frac{x^2-y^2}{xy}\right) : \frac{-3x^3+3x^2y+6xy^2}{y^2} = \dots\dots\dots$

e)  $\frac{x+y}{3x-3y} - \frac{x^2-y^2}{xy} : \frac{3x^2-6xy+3y^2}{xy} + \frac{x^2}{x^3-xy^2} = \dots\dots\dots$

f)  $\left(1 + \frac{s^2}{r^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{r^2-s^2} - \frac{1}{r^2+s^2}\right) - \frac{2}{r^2-s^2} = \dots\dots\dots$

17) Ermittle jeweils den Quotienten folgender Polynome:

a)  $(2x^2 + 9x + 10):(x + 2)$  ; b)  $(x^2 + 3x - 10):(x - 2)$  ;

c)  $(x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2):(x + 1)$  ; d)  $(x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 6x - 2):(x^2 + 2)$  ;

e)  $(x^4 - 8x^2 + 16):(x - 2)$  ; f)  $(x^6 - 3x^2 + 2):(x^2 + 2)$  ;

g)  $(x^7 - 3x^3 + 2x):(x^4 - 2x^2 + 1)$  ; h)  $(x^8 + 4x^4 + 4):(x^4 + 2)$  ;

i)  $(16x^4 - 72x^2 + 81):(4x^2 + 12x + 9)$  ; j)  $(16x^4 - 72x^2 + 81):(4x^2 - 12x + 9)$  ;

k)  $(x^5 - 1):(x - 1)$  ; l)  $(x^4 - 1):(x + 1)$  ;

m)  $(x^5 + 1):(x + 1)$  ; n)  $(x^n - 1):(x - 1)$  .

Welche der folgenden Divisionen sind ohne Rest ausführbar?

$(x^n + 1):(x - 1)$  ;  $(x^{2n} + 1):(x + 1)$  ;  $(x^{2n-1} + 1):(x + 1)$  ;  $(x^n - 1):(x + 1)$  .

## Das Ermitteln der Lösungsmenge von Gleichungen und Ungleichungen

18) Ermittle jeweils die Lösungsmenge, ohne äquivalent umzuformen!

a)  $|x - 1| + 1 \geq 0$  L = ..... ; b)  $\sqrt{4-x} > 3 - \sqrt{x-5}$  L = ..... ;

c)  $|x - 3| + 1 = 0$  L = ..... ; d)  $\sqrt{x-2} < 3 - \sqrt{2-x}$  L = ..... ;

e)  $|x - 3| \leq 4$  L = ..... ; f)  $\sqrt{x-3} < \sqrt{x-4} + 1$  L = ..... ;

g)  $\sqrt{x-2} + 2\sqrt{6-x} + 4\sqrt{3x-9} > 0$  ; L = ..... ;

h)  $|17x - 6| + \sqrt{2x - 6} = \sqrt{12 - 4x} + |6 - 17x|$  ; L = ..... .

19) Ermittle jeweils die Lösungsmenge auf graphischem Weg!

- a)  $|x| = \frac{x}{3} + 2$  ; L = ..... ; b)  $|x| = x - 1$  ; L = ..... ;  
 c)  $|x - 1| = 2x + 4$  ; L = ..... ; d)  $|x - 3| < |x - 2|$  ; L = ..... ;  
 e)  $|x| + |x - 1| \geq 2$  ; L = ..... ; f)  $|x| - 2 < -|x - 1|$  ; L = ..... ;  
 g)  $|x + 2| = 1 - |x + 1|$  ; L = ..... ; h)  $|x - 2| = \text{sgn}(x + 1)$  ; L = ..... ;  
 i)  $|x - 2| = [\frac{1}{2}x + 1]$  ; L = ..... ; j)  $|x - 2| = [x - 1]$  ; L = ..... ;  
 k)  $|x - 2| = [x - 2]$  ; L = ..... ; l)  $[\frac{1}{2}x + 4] - |2x| - 1 = 0$  ; L = ..... ;  
 m)  $[|x - 1|] - \text{sgn}(2x - 5) = 0$  ; L = ..... ; n)  $[\frac{3x + 10}{6}] = \frac{5x + 3}{7}$  ; L = .....

Bilde weitere analoge Aufgaben!

20) Ermittle jeweils die Menge aller ganzzahligen Paare (x;y) , die folgendes Ungleichungssystem erfüllen:

a) $\begin{array}{l} x + y - 1 > 0 \\ x - 2y + 2 > 0 \\ 2x - y - 5 < 0 \end{array}$	b) $\begin{array}{l} x - 2y + 4 \leq 0 \\ 3x + 2y - 12 \geq 0 \\ y - 3 \leq 0 \end{array}$	c) $\begin{array}{l} x + y - 1 > 0 \\ x - y - 1 < 0 \\ x - y + 1 > 0 \end{array}$
---	--	---

21) Untersuche, ob es einen Wert für den Parameter a gibt, für den die Gleichung

$$(ax + 1)(x + a) - (ax - 3)(x + 2a) = 2(3 + 2a)$$

folgende Lösungsmenge besitzt:

- a)  $L = \emptyset$  ; b)  $L = \mathbb{R}$  ; c)  $L = \{0\}$  ; d)  $L = \{1\}$  ; e)  $L = \{p\}$  mit  $p \neq 0$  .

22) Untersuche, ob es einen Wert für den Parameter p gibt, für den die Gleichung

$$(px - 2)^2 + (x + 3p)^2 - (px - 3)(px + 3) = 2x + (x + 2p)(x - 2p) + 26$$

folgende Lösungsmenge besitzt:

- a)  $L = \emptyset$  ; b)  $L = \mathbb{R}$  ; c)  $L = \{0\}$  ; d)  $L = \{1\}$  ; e)  $L = \{q\}$  .

23) Ermittle den Erfüllungsgrundbereich (als Durchschnitt der Definitionsbereiche aller vorkommenden Terme) sowie die Lösungsmenge!

Wiederhole die "Regeln zum äquivalenten Umformen von Gleichungen und Ungleichungen" in der Aufgabensammlung für Klasse 7 , Seite 18 !

- a)  $\frac{3x - 7}{4x - 6} + \frac{x + 6}{10x - 15} - \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$  ; b)  $\frac{x + 2}{12x - 16} + \frac{x - 1}{3x - 4} = \frac{1}{4} + \frac{4x - 7}{6x - 8}$  ;  
 c)  $\frac{10}{2x - 1} - \frac{7}{2x - 2} - \frac{3}{x - 1} = 0$  ; d)  $\frac{3x}{x - 2} - 1 + \frac{4}{x - 2} = \frac{3(x + 1)}{x - 2} + \frac{1}{x - 2}$  ;  
 e)  $\frac{x - 1}{x - 2} - \frac{x + 1}{x + 2} = \frac{-4}{x^2 - 4}$  ; f)  $\frac{3}{3x + 4} + \frac{14}{4 - 3x} = \frac{2}{16 - 9x^2}$  ;  
 g)  $\frac{6}{x - 2} - \frac{2}{x + 2} = \frac{4x + 16}{x^2 - 4}$  ; h)  $\frac{4}{3x^2 - 27} - \frac{1}{3} = \frac{5x + 2}{60 - 20x} - \frac{0,5x + 5}{6x + 18}$  ;  
 i)  $\frac{7}{2x^2 - x} - \frac{5}{12x^2 - 3} = \frac{3}{2x^2 + x}$  ; j)  $\frac{3}{y^2 - 9} - \frac{2}{y^2 - 6y + 9} = \frac{y - 5}{(y + 3)(y - 3)^2}$  ;  
 k)  $\frac{x + b}{x - a} - \frac{x - b}{x + a} = \frac{2ab}{x^2 - a^2}$  ; l)  $\frac{a}{bx} + \frac{1}{x - b} - \frac{b}{ax} = \frac{a}{bx - b^2}$  .

24) Löse nach der Variablen  $x$  auf und notiere alle einschränkenden Bedingungen:

a)  $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = 2$  ; b)  $\frac{2x+4q}{3-q} = x$  ; c)  $\frac{a}{x+b} = \frac{3b}{x-a}$  ;  
 d)  $\frac{x+1}{x-a} = 2 + \frac{2-x}{x+a}$  ; e)  $\frac{a}{x-b} - \frac{b}{x-b} = \frac{ab}{x}$  ; f)  $\frac{a}{x} + \frac{1}{x+a} = 0$  .

25) Ermittle die Lösungsmenge in Abhängigkeit vom Parameter  $p$  !

a)  $\frac{px}{x-p} = 3$  ; b)  $\frac{4x}{x-p} = p$  ; c)  $\frac{x-1}{x-3p} = 3p$  .

26) Ermittle jeweils die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen:

a)  $\frac{3x-2}{x+1} > 0$  ; b)  $\frac{2x-5}{2-3x} \leq 0$  ; c)  $\frac{3}{x-1} \geq 4$  ;  
 d)  $\frac{x-2}{x+3} > 2$  ; e)  $\frac{x-3}{x^2+1} > 0$  ; f)  $\frac{x+3}{x-2} > \frac{1}{2}$  ;  
 g)  $\frac{x^2+2}{x^2-1} < 0$  ; h)  $\frac{3}{x^2+2} > 1$  ; i)  $\frac{2x-3}{1+5x} < 2$  ;  
 j)  $\frac{2x}{1+5x} - 2 > \frac{3}{1+5x}$  ; k)  $\frac{1}{(x+1)^2} > \frac{1}{x^2}$  ; l)  $\frac{3}{x+3} > \frac{5}{x-1}$  ;  
 m)  $\frac{4}{2x+1} < \frac{2}{2x-1}$  ; n)  $\frac{4x-1}{x+2} \leq \frac{3x-3}{x+2}$  ; o)  $\frac{2x}{2x+3} \leq \frac{x-1}{x-4}$  ;  
 p)  $\frac{2x+1}{2x+3} < \frac{5-x}{4-x}$  ; q)  $\frac{3x-2}{x-2} + \frac{4x}{x+2} > 7$  ; r)  $\frac{3}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} > 0$  .

## Das Beweisen von Gleichheits- und Ungleichheitsaussagen

27) Aus der unten angegebenen wichtigen Ungleichung (1) lassen sich für  $a > 0$  und  $b > 0$  in der angedeuteten Reihenfolge weitere Ungleichungen ableiten.

Gib an, durch welche Umformungen das geschehen kann!

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad (a-b)^2 \geq 0 \\
 \downarrow \\
 (5) \quad a+b \geq 2\sqrt{ab} \leftarrow (2) \quad a^2+b^2 \geq 2ab \rightarrow (8) \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 (6) \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \leftarrow (3) \quad 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \rightarrow (9) \quad x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ für } x > 0 \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 (7) \quad \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad (4) \quad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \\
 \downarrow \\
 (10) \quad \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}
 \end{array}$$

Präge dir außer (9) vor allem folgenden *Satz über das quadratische, das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel* ein:

Für alle  $a > 0$ ,  $b > 0$  gilt:  $\max(a,b) \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geq \min(a,b)$  .

Das Gleichheitszeichen gilt nur für  $a = b$  .



Dieser Satz gilt auch für  $n$  positive reelle Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  :

$$\sqrt[n]{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Beweise folgende Sätze:

28) Stets gilt  $\sum n = 1 + 2 + 3 + \dots + (k-2) + (k-1) + k = \frac{1}{2}k(k+1)$  .

Präge dir diese Summenformel und deren Herleitung ein!

29) a) Stets gilt  $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$  .      b) Stets gilt  $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$  .

30) Wenn  $a, b > 0$  , dann  $a(a+1) + \frac{b^2}{a} \geq 2b + a^2$  .

31) a) Wenn  $a, b > 0$  und  $ab = 1$  , dann  $a + b \geq 2$  .

b) Wenn  $a, b, c > 0$  und  $abc = 1$  , dann  $a + b + c \geq 3$  .

c) Formuliere eine Verallgemeinerung dieser Sätze!

32) a) Wenn  $a, b > 0$  und  $ab = 1$  , dann  $(1+a)(1+b) \geq 4$  .

b) Wenn  $a, b, c > 0$  und  $abc = 1$  , dann  $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8$  .

c) Formuliere eine Verallgemeinerung dieser Sätze!

33) a) Wenn  $x, y > 0$  und  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$  , dann  $x + y \geq 2$  .

b) Wenn  $x, y > 0$  und  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$  , dann  $x + y \geq 4$  .

c) Wenn  $x + y = 1$  , dann  $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$  .

34) Wenn  $u, v > 0$  und  $uv = 1$  , dann  $u^2 + v^2 + 2u + uv + 2v \geq 7$  .

35) Stets gilt  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$  .

36) a) Wenn  $a, b, c > 0$  , dann  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} > \frac{3}{a+b+c}$  .

b) Wenn  $n \in \mathbb{N}$  und  $n > 1$  , dann  $s(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} < 1$  .

c) Zeichne den Graphen von  $y = s(n)$  für  $n = 2, 3, \dots, 7$  und versuche, die Ungleichung  $s(n) < 1$  zu verschärfen!

## Sach- und Anwendungsaufgaben

37) Der ganzzahlige Nenner eines Bruches sei um 30 größer als sein ganzzahliger Zähler. Addiert man sowohl zum Zähler als auch zum Nenner jeweils die ganze Zahl  $a$ , dann erhält man den Kehrwert des Ausgangsbruches.

Für welche Werte von  $a$  gibt es keinen derartigen Bruch?  
Wie heißen die zu  $a = -32$  bzw.  $a = 8$  gehörigen Brüche?

38) Addiert man zum Kehrwert einer rationalen Zahl den Kehrwert der um die ganze Zahl  $a$  vermehrten Zahl, dann erhält man das Doppelte des Kehrwertes der um  $a$  verminderten Zahl.

Für welche Werte von  $a$  wird die Lösung ganzzahlig?  
Für welche Werte von  $a$  gibt es mehr als eine Lösung?

39) Für das Roden eines 32,5 ha großen Kartoffelschlages benötigt ein Kartoffelroder 14 Arbeitsstunden.

Wie lange dauert die Rodung, wenn gleichzeitig ein zweiter Kartoffelroder eingesetzt wird, dessen Leistung aber um 25% geringer ist als die des anderen?

Enthält diese Aufgabe eine überflüssige Angabe?

40) a)  $x$  Liter einer  $p_1$ -prozentigen Lösung werden mit  $y$  Litern einer  $p_2$ -prozentigen Lösung vermischt.

Berechne die Konzentration der entstandenen Lösung in Prozent!

b)  $x$  Liter einer  $p_1$ -prozentigen Lösung sollen mit einer  $p_2$ -prozentigen Lösung vermischt werden, so dass eine  $p$ -prozentige Lösung entsteht.

Wie viel Liter der  $p_2$ -prozentigen Lösung sind zuzufügen?

41) Von 20 Kilogramm einer 35 %-igen Lösung verdunsten 8 Kilogramm Wasser.

Wie groß ist die Konzentration der entstandenen Lösung?

42) Ein Flugzeug überfliegt eine Fahrzeugkolonne in Fahrtrichtung in 1 min 12 sec und in entgegengesetzter Richtung in 52 sec .

Wie lang ist die Fahrzeugkolonne und welche Geschwindigkeit hat sie, wenn das Flugzeug die Kolonne mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von 400 km/h überfliegt?

43) Ein Ingenieur, der außerhalb der Stadt arbeitet, fährt täglich zur gleichen Zeit mit dem Zug bis zu einem Bahnhof. Zur selben Zeit kommt ein Auto dorthin und holt ihn zum Werk ab. Einmal kam der Ingenieur 55 Minuten früher am Bahnhof an, wartete aber nicht auf das Auto, sondern ging ihm zum Werk entgegen. Als er es unterwegs traf, stieg er ein und erreichte so das Werk 10 Minuten früher als gewöhnlich.

Berechne das Verhältnis der Geschwindigkeit des Autos zur Geschwindigkeit des Fußgängers!

44) Ein Wanderer geht von A in Richtung B mit einer Geschwindigkeit von 4 km/h . Nach einer gewissen Zeit bricht von A aus ein zweiter Wanderer auf, wiederum nach derselben Zeitspanne ein dritter. Der dritte Wanderer holt den zweiten auf halbem Wege zwischen A und B ein. Von da an gehen beide gemeinsam weiter und zwar mit der Geschwindigkeit, die gleich dem arithmetischen Mittel ihrer beiden bisherigen Geschwindigkeiten ist. Alle drei kommen gleichzeitig in B an.

Mit welcher Geschwindigkeit bewegte sich der zweite Wanderer ursprünglich, wenn der dritte ursprünglich 6 km/h zurücklegte?

Welche weiteren Angaben lassen sich aus den gegebenen Größen berechnen?

## GEOMETRIE

### Beweis- und Bestimmungsaufgaben

1) Zwei Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  mögen einen Kreis  $k(M;r)$  in den Punkten  $T_1$  bzw.  $T_2$  berühren und einander im Punkt  $S$  schneiden.

Unter diesen Voraussetzungen gilt stets:

- Die Tangentenabschnitte  $\overline{ST_1}$  und  $\overline{ST_2}$  sind gleich lang.
- Die Zentrale  $SM$  halbiert den Winkel  $\angle T_1ST_2$ .
- Die Berührungssehne  $\overline{T_1T_2}$  steht auf der Zentralen  $SM$  senkrecht.

Beweise diese Sätze!

2) In jedem Tangentenviereck  $ABCD$  gilt  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$ .

Beweise diesen Tangentenvierecksatz!

Besitzt dieser Satz eine wahre Umkehrung?

Welche speziellen Vierecksarten sind stets auch Tangentenvierecke?

3) Sei  $\overline{AB}$  eine (vom Durchmesser verschiedene) Sehne eines Kreises  $k(M;r)$  und  $t$  die Tangente an diesen Kreis im Punkt  $B$ . Die Senkrechte  $g$  auf  $MA$  durch  $M$  schneide  $t$  im Punkt  $T$  und die Sehne (oder deren Verlängerung) im Punkt  $S$ .

Was lässt sich unter diesen Voraussetzungen über  $\overline{TB}$  und  $\overline{TS}$  aussagen? .....

Beweise diese Vermutung!

4) Sei  $r$  der Inkreisradius eines rechtwinkligen Dreiecks  $ABC$  mit der Hypotenuse  $\overline{AB} = c$  und den Katheten  $\overline{BC} = a$  und  $\overline{AC} = b$ .

Drücke  $r$  durch  $a, b, c$  aus!

5) Ein rechtwinkliges Dreieck  $ABC$  werde durch die Höhe  $\overline{CD} = h$  in zwei Teildreiecke zerlegt. Sei  $r, r_1$  bzw.  $r_2$  der Inkreisradius von Dreieck  $ABC, ADC$  bzw.  $BDC$ .

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets  $h = r + r_1 + r_2$  gilt!

6) Formuliere die Umkehrung des folgenden Satzes:

Wenn  $X$  auf der Mittelsenkrechten der Strecke  $\overline{AB}$  liegt, dann gilt  $\overline{AX} = \overline{XB}$ .

Beweise diese Umkehrung *indirekt*!

7) Formuliere den Satz des Pythagoras, den Höhensatz sowie den Kathetensatz und suche nach wahren Umkehrungen dieser Sätze!

8) Beweise den Satz des Pythagoras!

9) Leite den Höhensatz aus dem Satz des Pythagoras ab!

10) Leite den Kathetensatz aus dem Satz des Pythagoras und dem Höhensatz ab!

11) Beweise die Umkehrung des Satzes des Pythagoras indirekt!

12) Berechne die Höhenlänge  $\overline{CH} = h$  eines gleichschenkligen Dreiecks  $ACB$  mit  $\overline{AB} = c$  und  $\overline{AC} = \overline{BC} = s$ !

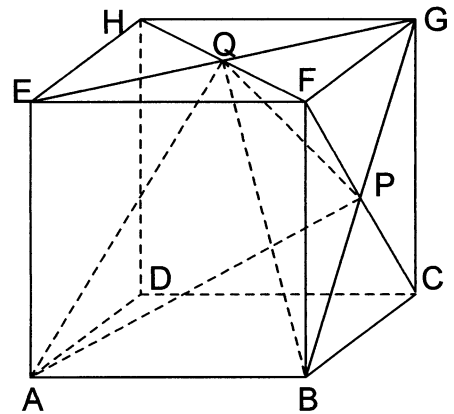
(Wähle speziell  $c = 4$  und  $s = 5$  und überprüfe das Resultat anhand einer genau gezeichneten Figur.)

13) Sei ABCD ein Trapez mit  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  und  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ .  
 Beweise, dass dann stets  $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (\overline{AC} + \overline{BD})^2$  gilt!

14) Gegeben sei ein konvexes Viereck ABCD, bei dem sich die Verlängerungen der beiden Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  unter einem rechten Winkel schneiden. Die Mittelpunkte der Diagonalen  $\overline{AC}$  und  $\overline{BD}$  seien E bzw. F.  
 Es ist zu beweisen, dass unter diesen Voraussetzungen stets gilt:

$$\overline{EF}^2 = \frac{1}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2).$$

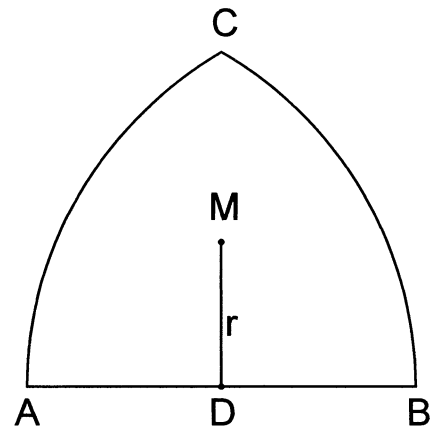
15) Sei ABCDEFGH ein Würfel mit der Kantenlänge a; seien P bzw. Q die Diagonalschnittpunkte der Seitenflächen BCGF bzw. EFGH (vgl. Abbildung).



- a) Ermittle den Umfang des Dreiecks APQ!
- b) Beweise, dass dann stets  $\angle PBQ = \angle PQB$  gilt!

16) In einem Dreieck ABC gelte  $\overline{AC} = b = 13$  cm und  $\overline{BC} = a = 15$  cm. Sei H der Fußpunkt des Lots von C auf AB und gelte  $\overline{CH} = h = 12$  cm.  
 Ermittle für alle Dreiecke ABC, die diese Bedingungen erfüllen, den Flächeninhalt J(ABC)!

17) Eine dreieckige Fläche wird von einer Strecke  $\overline{AB}$  mit der Länge a sowie von zwei Kreisbögen begrenzt, die zu den Kreisen  $k(A;a)$  bzw.  $k(B;a)$  gehören. Dieser dreieckigen Fläche sei ein Kreis mit dem Radius r einbeschrieben, der alle drei Begrenzungslinien berührt.  
 Drücke r durch a aus!  
 (Wähle speziell  $a = 4$  und überprüfe das Resultat anhand einer genau gezeichneten Figur.)  
 (Ein Nachweis für die eindeutige Existenz des Inkreises wird nicht verlangt.)



18) Für ein rechtwinkliges Dreieck ABC (mit dem rechten Winkel bei C und der Höhenfußpunkt H) gelte  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$ ,  $\overline{BC} = a$  und  $\overline{CH} = h$ . Der Umfang des Dreiecks werde mit u bezeichnet.

Löse folgende Bestimmungsaufgaben:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Gegeben:	a, b	a, b	a, J	c, u	u, J	h, u
Gesucht:	u	h	u	h	c	c

19) Formuliere den *Sehnenvierecksatz*, den *Peripheriewinkelsatz*, den *Peripherie-Zentriwinkel-Satz* sowie den *Satz des Thales*.

Suche nach wahren Umkehrungen dieser Sätze!

20) Beweise den folgenden *Sehntangentenwinkelsatz*:

Jeder Sehntangentenwinkel eines Kreises ist stets halb so groß wie der über demselben Bogen stehende Zentriwinkel (und daher gleich groß wie jeder zugehörige Peripheriewinkel dieses Kreises).

21) Wir betrachten den Satz des Thales und zwei Umkehrungen dieses Satzes (wobei  $k$  ein Kreis sei und  $A, B \in k$  sowie  $A \neq B$ ,  $B \neq C$ ,  $A \neq C$  gelte):

(S)  $C \in k \wedge \overline{AB}$  ist Durchmesser von  $k \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$ .

(U<sub>1</sub>)  $\angle ACB = 90^\circ \wedge C \in k \Rightarrow \overline{AB}$  ist Durchmesser von  $k$ .

(U<sub>2</sub>)  $\angle ACB = 90^\circ \wedge \overline{AB}$  ist Durchmesser von  $k \Rightarrow C \in k$ .

a) Nenne verschiedenartige Anwendungen von (U<sub>1</sub>) und (U<sub>2</sub>)!

b) Beweise (U<sub>2</sub>) *indirekt*!

22) Sei  $ABCD$  ein Quadrat und  $P$  ein Punkt auf dem Halbkreis über  $\overline{AB}$  im Inneren dieses Quadrats. Die Gerade  $BP$  schneide den Viertelkreis um  $B$  durch  $A$  und  $C$  im Punkt  $S$ . Sei  $Q$  der Fußpunkt des Lots von  $S$  auf  $AD$ .

Was lässt sich dann über die Dreiecke  $APS$  und  $AQS$  aussagen?

Beweise deine Vermutung!

23) Sei  $D$  ein Punkt auf dem Umbogen  $\widehat{AB}$  eines spitzwinkligen Dreiecks  $ABD$  (wobei dieser Umbogen den Punkt  $C$  nicht enthält).

Dann gilt stets:

Wenn  $CD$  Winkelhalbierende von  $\angle ACB$  ist, dann ist  $D$  .....

a) Äußere eine Vermutung und beweise den zugehörigen Satz!

b) Wie lässt sich dieser Satz verallgemeinern?

c) Formuliere eine wahre Umkehrung dieses Satzes und beweise sie!

24) Der Inkreis eines Dreiecks  $ABC$  mit den Innenwinkelgrößen  $\alpha, \beta, \gamma$  habe mit den Dreiecksseiten  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  bzw.  $\overline{AC}$  die Berührungspunkte  $D$ ,  $E$  bzw.  $F$ .

Ermittle die Innenwinkelgrößen  $\delta, \varepsilon, \varphi$  des Dreiecks  $DEF$  in Abhängigkeit von  $\alpha, \beta, \gamma$ !

25) Ein Trapez mit den Grundseiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  besitze einen Inkreis  $k(M;r)$ .

Was lässt sich dann über den Winkel  $\angle DMA$  aussagen?

Beweise deine Vermutung!

26) Beweise: Wenn  $M$  im Inneren des Dreiecks  $ABC$  liegt, dann gilt stets  $\angle BMC > \angle BAC$ .  
Besitzt dieser Satz eine wahre Umkehrung?

Lässt sich dieser Satz verallgemeinern, indem man seine Voraussetzungen abschwächt?

27) Von einem rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  seien der Umfang  $u$  und der Umkreisradius  $r$  bekannt. Drücke den Flächeninhalt  $J(ABC)$  dieses Dreiecks durch  $u$  und  $r$  aus!

28) Sei  $ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei  $C$ . Für den auf der Hypotenuse  $\overline{AB}$  gelegenen Höhenfußpunkt gelte  $\overline{AH} : \overline{HB} = 1 : 3$ .

Ermittle - jeweils in Abhängigkeit von der Hypotenusenlänge  $c$  - folgende Stücke dieses Dreiecks:

- |                                     |                        |
|-------------------------------------|------------------------|
| a) Den Flächeninhalt                | $J(ABC)$ ;             |
| b) den Umfang                       | $u(ABC)$ ;             |
| c) die Länge der Höhe               | $h = \overline{CH}$ ;  |
| d) die Länge der Seitenhalbierenden | $s = \overline{CS}$ ;  |
| e) die Innenwinkelgröße             | $\beta = \angle CBA$ . |

29) Sei  $M$  der Mittelpunkt des Umkreises  $k$  eines spitzwinkligen Dreiecks  $ABC$ , für dessen Innenwinkel  $\alpha > \beta$  gilt. Sei  $\overline{CD}$  eine Höhe dieses Dreiecks und  $E$  der Schnittpunkt des von  $C$  ausgehenden Strahls durch  $M$  mit dem Kreis  $k$ .

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets  $\sphericalangle DCE = \alpha - \beta$  gilt!

30) Zwei Kreise  $k_1(M_1; r_1)$  und  $k_2(M_2; r_2)$  mögen einander im Punkt  $A$  von außen berühren. Eine gemeinsame äußere Tangente berühre  $k_1$  in  $T_1$  und  $k_2$  in  $T_2$ .

Ermittle die Größe des Winkels  $\sphericalangle T_2AT_1$ !

31) Sei  $k$  ein Halbkreis über einem Durchmesser  $\overline{AB}$ . Eine Gerade  $g$  schneide  $k$  in zwei (von  $A$  und  $B$  verschiedenen) Punkten  $C$  und  $D$  sowie die Verlängerung von  $\overline{AB}$  über  $B$  hinaus in einem Punkt  $E$  derart, dass  $C$  zwischen  $D$  und  $E$  liegt. Ferner gelte

$$(1) \overline{BD} = \overline{BE} \quad \text{und} \quad (2) \sphericalangle DAC = \varphi = 27^\circ .$$

a) Berechne die Größe  $\alpha$  des Winkels  $\sphericalangle ACD$ !

b) Drücke  $\alpha$  allgemein durch  $\varphi$  aus!

32) Über fünf Punkte  $A, B, C, D, M$  wird folgendes vorausgesetzt:

(a)  $M$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AB}$ , und die Punkte  $A, C, D, B$  liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über  $\overline{AB}$ ;

(b)  $AB \parallel CD$ ;

(c)  $\overline{MC}$  schneidet  $\overline{AD}$  im Punkt  $E$ , für den  $\overline{AC} = \overline{EC}$  gilt.

Zeige, dass durch diese Voraussetzungen die Größe  $\alpha$  des Winkels  $\sphericalangle BAD$  eindeutig bestimmt ist und ermittle diese Winkelgröße!

33) Sei  $ABCD$  ein Trapez, das einen Umkreis  $k$  besitzt. Die Verlängerungen der nichtparallelen Seiten  $\overline{AD}$  und  $\overline{BC}$  mögen einander im Punkt  $M$  schneiden. Sei  $N$  der Schnittpunkt der beiden Tangenten  $t_1$  bzw.  $t_2$  an  $k$  in den Punkten  $B$  bzw.  $D$ .

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets  $MN \parallel AB$  gilt!

## Konstruktions- und Ortsaufgaben

34) Konstruiere alle (untereinander nicht kongruenten) Vierecke  $ABCD$ , die folgende Bedingungen erfüllen:

(a)  $ABCD$  ist ein Rhombus;

(b)  $\sphericalangle BAD = \alpha$ ;

(c)  $\overline{AC} + \overline{BD} = s$ .

a) Liefere eine Konstruktionsbeschreibung und gib Bedingungen an, unter denen Lösungen existieren (Determinationsbedingungen).

b) Weise nach: Wenn ein Viereck  $ABCD$  die gegebenen Bedingungen erfüllt, dann lässt es sich wie angegeben konstruieren; (Einzigkeitsnachweis).

c) Weise nach: Wenn ein Viereck  $ABCD$  wie beschrieben konstruiert wurde, dann erfüllt es die gegebenen Bedingungen; (Existenznachweis).

Es sind jeweils alle (untereinander nicht kongruenten) Dreiecke  $ABC$  zu konstruieren, die die in Aufgabe 35) bis 38) angegebenen Bedingungen erfüllen.

35) (a)  $\overline{AB} = c (= 6 \text{ cm})$ ; (b)  $\sphericalangle CBA = \beta$ ; (c)  $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$ .

- 36) (a)  $\overline{AB} = c$ ; (b)  $\overline{CH} = h$ ; (c)  $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$ ; (d)  $\overline{CH}$  ist Höhe in  $\triangle ABC$ .
- 37) (a)  $\overline{AB} = c$ ; (b)  $\angle CBA = \beta$ ; (c)  $\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 2$ .
- 38) (a)  $\overline{AB} = c$ ; (b)  $\overline{CH} = w$ ; (c)  $\overline{AC} : \overline{BC} = 3 : 1$ ; (d)  $\overline{CH}$  ist Winkelhalbierende.
- 39) a) Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck  $ABC$ .  
Zu konstruieren ist der Halbkreis, dessen Durchmesser auf der Hypotenuse  $\overline{AB} = c$  liegt und der die Katheten  $\overline{BC} = a$  und  $\overline{AC} = b$  (von innen) berührt.  
b) Es ist zu beweisen, dass unter diesen Voraussetzungen stets  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r}$  gilt, wobei  $r$  die Radiuslänge des Halbkreises ist.
- 

40) Gegeben seien eine Strecke  $\overline{AB}$  und eine Winkelgröße  $\varphi (< 180^\circ)$ .  
Ermittle den geometrischen Ort aller Punkte  $X$ , die folgende Bedingung erfüllen:  
 $\angle AXB = \varphi$ .

Es sind jeweils alle (untereinander nicht kongruenten) Dreiecke  $ABC$  zu konstruieren, die die in Aufgabe 41) bis 44) angegebenen Bedingungen erfüllen

- 41) (a)  $\overline{AB} = c$ ; (b)  $\overline{CH} = h$ ; (c)  $\angle ACB = \gamma$ ; (d)  $\overline{CH}$  ist Höhe im Dreieck  $ABC$ .
- 42) (a)  $\overline{AB} = c$ ; (b)  $\overline{AH}_a = h_a$ ; (c)  $\overline{BH}_b = h_b$ ; (d)  $\overline{AH}_a$  und  $\overline{BH}_b$  sind Höhen in  $\triangle ABC$ .
- 43) (a)  $\overline{BC} = a$ ; (b)  $\angle BAC = \alpha$ ; (c)  $\overline{MA} = r_u$  (Umkreisradius);
- 44) (a)  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = s = 10 \text{ cm}$ ; (b)  $\overline{CH} = h = 2,5 \text{ cm}$ ;  
(c)  $\angle ACB = \gamma = 60^\circ$ ; (d)  $\overline{CH}$  ist Höhe im Dreieck  $ABC$ .

Es sind jeweils alle (untereinander nicht kongruenten) Vierecke  $ABCD$  zu konstruieren, die die in Aufgabe 45) und 46) angegebenen Bedingungen erfüllen.

- 45) (a)  $AC \perp BD$  mit  $AC \cap BD = \{S\}$ ; (b)  $\overline{AB} = a = 6 \text{ cm}$ ;  
(c)  $\overline{AC} = e = 7 \text{ cm}$ ; (d)  $\angle BAD = \alpha = 60^\circ$ ;  
(e)  $\overline{SS'} = h = 2 \text{ cm}$ , wobei  $S'$  der Fußpunkt des Lots von  $S$  auf  $AD$  ist.
- 46) (a)  $ABCD$  ist ein Sehnenviereck; (b)  $\overline{AB} = a = 5 \text{ cm}$ ; (c)  $\overline{BD} = f = 7 \text{ cm}$ ;  
(d)  $\angle BAD = \alpha = 110^\circ$ ; (e)  $\overline{AC} = e$ .  
(Führe die Konstruktion speziell für  $e = 5 \text{ cm}$ ,  $e = 7 \text{ cm}$  und  $e = 9 \text{ cm}$  durch; gib eine Determination für beliebige  $e$  an!)

47) Zu konstruieren sind alle Dreiecke  $ABC$ , die folgende Bedingungen erfüllen:

- (a)  $\overline{BC} = a (= 4 \text{ cm})$ ; (b)  $\angle BAC = \alpha (= 30^\circ)$ ; (c)  $\overline{CS} = s (= 5 \text{ cm})$ ;  
(d)  $\overline{CS}$  ist Seitenhalbierende im Dreieck  $ABC$ .

## V E R M I S C H T E   A U F G A B E N

V1) Die Eltern von Fritz haben eine fünfstellige symmetrische Telefonnummer, bei der die erste, dritte und fünfte Ziffer, aber auch die zweite und vierte Ziffer übereinstimmen. Die Quersumme dieser Telefonnummer ist so groß wie die aus den ersten beiden Ziffern gebildete Zahl. Welche Telefonnummer haben die Eltern von Fritz?

V2) Wähle eine beliebige Zahl  $x$ . Addiere 13. Multipliziere das Ergebnis mit 13. Subtrahiere nun 13 und dividiere dann durch 13. Addiere 1. Subtrahiere 13.  
Was fällt auf? Was passiert, wenn jede in der Aufgabe vorkommende 13 durch eine beliebige andere Zahl ersetzt wird?

V3) Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 177. Teilt man die größere der beiden Zahlen durch die kleinere, dann erhält man den Quotienten 3 und den Rest 9.  
Wie heißen die beiden Zahlen?

V4) Auf einem Parkplatz steht eine unbekannte Zahl von Fahrzeugen mit insgesamt 66 Rädern. Es sind doppelt so viele Autos wie Fahrräder und halb so viele Mopeds wie Fahrräder.  
Wie groß ist die Anzahl der Autos, Fahrräder und Mopeds?

V5) An einer Schule unterrichten die drei Lehrerinnen Linde, Rose und Hase in den Fächern Mathematik, Englisch, Erdkunde, Spanisch, Musik und Chemie. Über diese Lehrerinnen ist folgendes bekannt:

- (a) Jede unterrichtet in genau zwei dieser Fächer, und jedes dieser sechs Fächer wird von genau einer dieser Lehrerinnen unterrichtet.
- (b) Sowohl die Lehrerin für Chemie als auch die Lehrerin für Musik ist älter als Frau Linde.
- (c) In der Freizeit spielen die Lehrerin für Englisch, für Spanisch und Frau Linde gern Skat. Dabei gewinnt Frau Hase öfter als die Lehrerin für Chemie und als die Lehrerin für Englisch..

Zeige, dass sich aus diesen Angaben die Zuordnung der drei Lehrerinnen zu den sechs Fächern eindeutig ergibt und gib diese Zuordnung an.

V6) Die Eltern haben für ihre Tochter Susi 5000 € zu folgenden Konditionen angelegt (Zuwachssparen): Im ersten Jahr werden 5,75%, im zweiten 6,0%, im dritten 6,25% und im vierten 6,5% Zinsen gezahlt. Die Zinsen werden jährlich gutgeschrieben und mit verzinst.  
Wie hoch ist Susis Sparguthaben nach 4 Jahren?

V7) Die Differenz zweier natürlicher Zahlen beträgt 3997. Teilt man die größere dieser Zahlen durch die kleinere, dann erhält man den Quotienten 13 und den Rest 13.  
Wie heißen die beiden Zahlen?

V8) Frau Schusslig hat die vierstellige Geheimzahl für ihre EC-Karte vergessen. Sie weiß nur noch, dass keine Null vorkam und dass nur die beiden mittleren Ziffern gleich waren.  
Wie viele verschiedene Geheimzahlen erfüllen diese Bedingungen?

V9) Auf einer Versammlung waren dreimal soviel Männer wie Frauen anwesend. Nachdem vier Ehepaare die Versammlung vorzeitig verlassen mussten, waren viermal so viel Männer wie Frauen noch anwesend.  
Wie viele Personen besuchten diese Versammlung?



V10) Eine natürliche Zahl erfüllt folgende Bedingungen:

Dividiert man 100 durch diese Zahl, dann bleibt der Rest 4. Dividiert man 90 durch diese Zahl, dann bleibt der Rest 18.

Wie lautet diese Zahl?

V11) Eine Reisegesellschaft besteht aus 80 Personen. Es sprechen genau 8 Personen nur englisch und französisch, genau 12 Personen nur deutsch und französisch, genau 5 Personen nur französisch, genau 27 Personen nur deutsch und englisch, und genau 60 Personen sprechen englisch. Keine dieser Personen spricht alle drei Sprachen.

Wie viel Personen können deutsch, wie viel nur englisch sprechen, wenn jede dieser Personen mindestens eine der angegebenen drei Sprachen spricht?

V12) Das Quadrat der Summe zweier natürlicher Zahlen ist gleich dem vierfachen Produkt dieser beiden Zahlen.

Es sind alle Zahlenpaare zu ermitteln, die diese Bedingung erfüllen!

V13) Ein PKW fährt 100 km mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h, dann 2 Stunden mit der Geschwindigkeit von 100 km/h.

Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit  $v$  für die Gesamtstrecke?

V14) Vier Schüler, Anja, Birgit, Christoph und Dirk, spielen folgendes Spiel, dessen Regeln ihnen allen bekannt sind:

Einer von ihnen, z.B. Dirk, verlässt das Zimmer. Nun nimmt eine der Personen Anja, Birgit oder Christoph einen vereinbarten Gegenstand, etwa einen Fingerhut, an sich, und Dirk wird wieder hereingerufen. Er erhält dann von den Mitspielern Aussagen mitgeteilt, wobei genau derjenige eine falsche Aussage macht, der den Fingerhut bei sich hat.

Bei einer Durchführung dieses Spiels lauten die Aussagen:

Anja: Ich habe den Fingerhut nicht, und Christoph hat den Fingerhut.

Birgit: Anja hat den Fingerhut, und ich habe den Fingerhut nicht.

Christoph: Ich habe den Fingerhut nicht.

Untersuche, ob mit Hilfe dieser Aussagen eindeutig festgestellt werden kann, welcher Spieler den Fingerhut genommen hatte!

Ist dies der Fall, dann ermittle diesen Spieler!

V15) Bekanntlich gilt  $45 \cdot 9 = 405$ . Untersuche, ob es weitere Beispiele dafür gibt, dass aus einer zweistelligen natürlichen Zahl durch Einschoben einer Ziffer 0 zwischen ihre beiden Ziffern zugleich das Produkt der zweistelligen Zahl mit einer einstelligen Zahl entsteht!

Wenn das der Fall ist, dann gib alle diese Beispiele an!

V16) In einer Firma, die Brettspiele herstellt, werden für ein Spiel bestimmte Figuren verschieden eingefärbt. Die Tagesproduktion des Betriebes beträgt insgesamt 33500 Figuren. Dabei steht die Anzahl der rot gefärbten Figuren zur Anzahl der blauen und zur Anzahl der grünen Figuren im Verhältnis 2:20:45.

Wie viel rote, blaue bzw. grüne Figuren werden täglich produziert?

V17) Es ist die kleinste positive ganze Zahl  $z$  zu ermitteln, deren dritte Potenz ein ganzzahliges Vielfaches von 588 ist!

V18) Für eine Pralinenmischung sollen zwei Sorten Pralinen zum Preis von 2,30 € bzw. 1,80 € für 100 g verwendet werden. Der Verkaufspreis soll 2,00 € pro 100 g betragen.

Wie viel Gramm Pralinen der ersten Sorte muss man für eine Mischung von 10 kg nehmen?

V19) Ermittle alle zweistelligen Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:

- Setzt man zwischen Einerziffer und Zehnerziffer der zweistelligen Zahl die Ziffer 5, dann erhält man eine Zahl, die um genau 230 größer ist als die ursprüngliche Zahl.
- Setzt man die Ziffer 5 vor die zweistellige Zahl, dann erhält man ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl.

V20) Hans möchte seiner Mutter zu ihrem Geburtstag ein Geschenk kaufen. Deshalb öffnet er seine Sparsbüchse. Sie enthält nur 10-€-Scheine, 5€-Scheine und 1-€-Stücke, sonst keine anderen Geldscheine oder Münzen. Zu seinem Erstaunen stellt Hans fest, dass die Sparsbüchse zusammen genau 50 Geldscheine oder Münzen enthält, die insgesamt einen Wert von 100 € haben.

Wie viele Geldstücke zu 1 € enthält die Sparsbüchse von Hans?

V21) Anjas Mutter ist gegenwärtig dreimal so alt wie Anja. Vor vier Jahren war die Mutter viermal so alt, wie Anja damals war.

In wie viel Jahren wird Anja halb so alt sein, wie dann ihre Mutter sein wird?

V22) In einem Kaufhaus waren  $\frac{4}{5}$  aller Beschäftigten Frauen. Zu Anfang eines Monats waren 12,5% dieser Frauen nicht verheiratet. Von den in diesem Kaufhaus beschäftigten Männern waren 18,75% nicht verheiratet.

Während des Monats heirateten vier Paare, von denen jeweils sowohl der Mann als auch die Frau zu den oben genannten unverheirateten Beschäftigten des Kaufhauses gehörten. Weitere Änderungen gab es nicht.

Danach waren noch genau 36 Beschäftigte des Kaufhauses unverheiratet.

Wie viele Beschäftigte hatte das Kaufhaus insgesamt?

V23) Vier Brüder besitzen zusammen 45 Kronen.

Wenn man die Anzahl der Kronen des ersten Bruders um 2 Kronen vergrößert, die des zweiten Bruders um 2 Kronen verringert, die des dritten Bruders verdoppelt und die des vierten Bruders halbiert, dann hat jeder Bruder dieselbe Anzahl von Kronen.

Wie viel Kronen hat jeder Bruder?

V24) Ermittle die kleinste achtstellige natürliche Zahl, die folgende Bedingungen erfüllt:

- Alle Ziffern der dezimalen Darstellung von  $z$  sind voneinander verschieden.
- Die Zahl  $z$  ist durch 36 teilbar.

V25) Das Zahlenschloss von Sebastian hat vier Ringe mit den Ziffern 0 bis 6. Er weiß nur noch, dass die zweite Ziffer die einzige 5 in seiner Geheimzahl war.

Wie viele verschiedene Einstellungen des Schlosses erfüllen diese Bedingung?

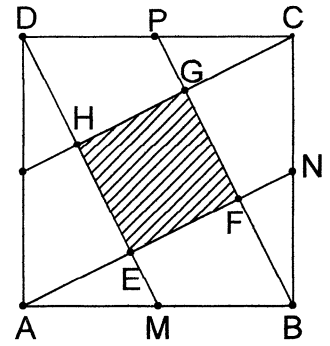
V26) Ein Jagdflugzeug flog in einer halben Stunde 200 km weiter als ein Sportflugzeug in einer Stunde.

Wie groß war die Geschwindigkeit jedes dieser beiden Flugzeuge, wenn die des Jagdflugzeugs dreimal so groß war wie die des Sportflugzeugs?

V27) Eine siebenstellige Telefonnummer  $\overline{abcdefg}$  besteht aus den Primzahlen  $a, b, c, d, e, f, g$ , deren Summe eine Primzahl ist. Es gilt  $a + b = c$  und  $c + a = d$ . Keine der Zahlen  $a, b, \dots, g$  tritt in der Telefonnummer genau  $p$ -mal auf, wobei  $p$  eine beliebige Primzahl ist.

Wie lautet die Telefonnummer?

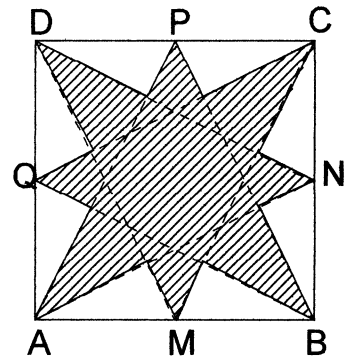
V28) Sei  $ABCD$  ein Quadrat mit der Seitenlänge  $a$ ; sei  $M, N, P$  bzw.  $Q$  der Mittelpunkt von  $AB, BC, CD$  bzw.  $AD$ ; seien  $E, F, G$  und  $H$  die in nebenstehender Figur angegebenen Schnittpunkte. Berechne den Inhalt des Vierecks  $EFGH$  in Abhängigkeit von  $a$ !



V29) Simon, Sibylle und Steffen treffen sich an mehreren Wochenenden hintereinander und tragen untereinander ein Schachturnier aus. Dabei spielte jeder Teilnehmer gegen jeden anderen genau die gleiche Anzahl von Partien. Keine Partie endete unentschieden. Simon gewann genau zwei Drittel seiner Spiele. Sibylle gewann genau drei Viertel ihrer Spiele. Steffen gewann genau ein Spiel. Wie viele Spiele wurden in diesem Turnier ausgetragen?

V30) Die gebrochene Zahl  $\frac{9}{91}$  soll als positive Differenz zweier positiver echter Brüche mit den Nennern 7 und 13 dargestellt werden. Untersuche, ob es eine solche Darstellung gibt, ob es mehr als eine gibt, und ermittle alle derartigen Darstellungen!

V31) Sei  $ABCD$  ein Quadrat mit der Seitenlänge  $a$ ; sei  $M, N, P$  bzw.  $Q$  der Mittelpunkt von  $AB, BC, CD$ , bzw.  $AD$ . Berechne den Inhalt des in nebenstehender Figur schraffierten (nicht konvexen) Sechzehnecks in Abhängigkeit von  $a$ !



V32) Vor dem Beginn eines Pferderennens fachsimplen Zuschauer über den möglichen Einlauf der drei Favoriten  $A, B, C$ . Es wurden folgende vier Vermutungen geäußert:

- (1)  $A$  gewinnt oder  $C$  gewinnt.
- (2) Wenn  $A$  Zweiter wird, dann gewinnt  $B$ .
- (3) Wenn  $A$  Dritter wird, dann gewinnt  $C$  nicht.
- (4)  $A$  wird Zweiter oder  $B$  wird Zweiter.

Nach dem Einlauf stellte sich heraus, dass die drei Favoriten  $A, B, C$  tatsächlich die ersten drei Plätze belegten und dass alle vier Vermutungen richtig waren. Wie lautete der Einlauf?

V33) Von zwei Primzahlen wird folgendes gefordert:

- (a) Ihre Summe ist eine Primzahl.
- (b) Multipliziert man diese Summe mit dem Produkt der zuerst genannten beiden Primzahlen, dann erhält man eine durch 10 teilbare Zahl.

Man gebe alle Primzahlpaare an, die diese Forderungen erfüllen!

V34) Vier verschiedengroße Holzquader mit gleicher quadratischer Grundfläche von  $100 \text{ cm}^2$  und den Höhen von  $10 \text{ cm}, 13 \text{ cm}, 15 \text{ cm}$  bzw.  $16 \text{ cm}$  werden übereinandergetürmt. Dieser Turmbau erfolgt so, dass sie auf ihren Seitenflächen liegen und dass der größte zuunterst, darauf der nächstkleinere usw. zu liegen kommt. Dabei soll kein höher liegender Quader über den unter ihm liegenden hinüberraagen. Berechne den Flächeninhalt der sichtbaren Oberfläche des Turms!

V35) Sei  $AB$  eine (vom Durchmesser verschiedene) Sehne eines Kreises  $k(M;r)$ , sei  $t$  die Tangente an diesen Kreis im Punkt  $A$  und sein  $B'$  der Fußpunkt des Lots von  $B$  auf  $t$ .

Was lässt sich dann über die Winkel  $\sphericalangle MAB$  und  $\sphericalangle ABB'$  aussagen? .....  
Beweise diese Vermutung!

V36) Eine Erbschaft fällt an fünf Nichten des Erblassers. Lisa erhält  $\frac{1}{5}$  des Vermögens, Maria  $\frac{1}{8}$ , Anna  $\frac{1}{10}$ , Katja  $\frac{2}{5}$  und Nora den Rest von 38780 €. Wie viel erhielten die einzelnen Erbinnen?

V37) Von den drei Brieffreundinnen Andrea, Beate und Carola wohnt je eine in Berlin, Köln und München. Wo wohnt jede von ihnen, wenn genau eine der drei folgenden Aussagen wahr ist und die anderen falsch sind?

- (1) Weder wohnt Andrea in Berlin, noch Carola in München.
- (2) Andrea wohnt in München oder Beate in Köln.
- (3) Beate wohnt nicht in Berlin.

V38) In einem Kreis  $k(M;r)$  seien ein Durchmesser  $\overline{AB}$  und eine (diesen Durchmesser nicht schneidende) Sehne  $\overline{CD}$  eingezeichnet. Sei  $N$  der Mittelpunkt von  $\overline{CD}$  und seien  $E$  bzw.  $F$  die Fußpunkte der Lote von  $C$  bzw.  $D$  auf  $\overline{AB}$ . Was lässt sich dann über das Dreieck  $EFN$  aussagen? Beweise deine Vermutung!

V39) Beweise, dass man aus jeder dreistelligen Zahl durch Anfügen von höchstens drei Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl erhalten kann.

V40) Berechne die Höhenlänge  $\overline{CH} = h$  eines gleichseitigen Dreiecks  $ABC$  mit der Seitenlänge  $s$ !  
(Wähle speziell  $s = 6$  und überprüfe das Resultat anhand einer genau gezeichneten Figur.)

V41) Wegen Bauarbeiten kann ein PKW-Fahrer die erste Hälfte der vor ihm liegenden Wegstrecke von 80 km nur mit einer Geschwindigkeit von 20 km/h fahren. Wie schnell müsste er im zweiten Abschnitt fahren, wenn er die Gesamtstrecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 40 km/h zurücklegen möchte?

V42) Beweise, dass  $c$  nicht restlos durch 7 teilbar sein kann, wenn  $(a;b;c)$  ein pythagoreisches Grundtripel ist (d.h. wenn die natürlichen Zahlen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  teilerfremd sind und wenn  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt).

V43) Berechne die Längen der drei Flächendiagonalen und die Länge der Raumdiagonalen eines Quaders  $ABCDEFGH$  mit den Kantenlängen  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{AD} = b$  und  $\overline{AE} = c$ !  
(Wähle speziell  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 6$ .)

V44) Anja, Brigitte, Cathrin, Daja und Eva trugen mehrere Spiele für vier Personen unter sich aus. In jedem Spiel gab es einen Gewinner und drei Verlierer. Jedes der Mädchen spielte gleich viele Male. Nach Abschluss aller Spiele stellte man fest:

- (1) Cathrin gewann genau die Hälfte, Daja genau ein Drittel und Eva genau ein Viertel der Spiele, an denen sie beteiligt waren.
- (2) Die Anzahl der Siege des Mädchens, das das drittbeste Ergebnis erzielte, war eine Primzahl.
- (3) Keines der Mädchen verlor alle Spiele.

Ermittle die genaue Anzahl aller Spiele, die ausgetragen wurden, und gib an, wie viele Spiele jedes Mädchen insgesamt gewann!

V45) Eine dreiseitige Pyramide  $ABCD$ , mit der Grundfläche  $ABC$  und der Spitze  $D$  habe die Kantenlängen  $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$ ,  $\overline{AC} = 3 \text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = 5 \text{ cm}$ ,  $\overline{BD} = 12 \text{ cm}$ ,  $\overline{CD} = 13 \text{ cm}$  und es gelte  $\sphericalangle ABD = 90^\circ$ .

Untersuche, ob es eine solche Pyramide gibt, und berechne gegebenenfalls das Volumen einer solchen Pyramide.

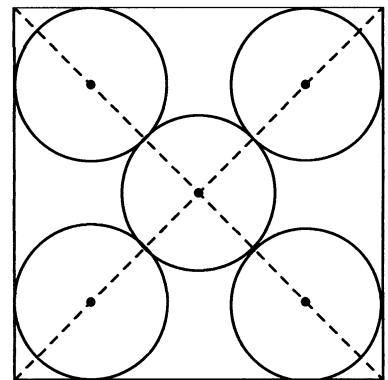
V46) Einer der vier Herren Krause, Lehmann, Meier und Schulze ist von Beruf Arzt, ein anderer Ingenieur, ein dritter Lehrer und der vierte Notar.

Welchen Beruf übt jeder dieser vier aus, wenn die drei folgenden Aussagen alle falsch sind?

- (1) Herr Meier ist nicht Lehrer und auch nicht Ingenieur.
- (2) Herr Meier ist nicht Notar und Herr Schulze nicht Ingenieur.
- (3) Herr Lehmann ist Notar.

V47) In einem Quadrat mit der Seitenlänge  $a$  seien fünf gleichgroße Kreise eingezeichnet, die einander bzw. das Quadrat berühren (vgl. nebenstehende Figur).

Drücke die Länge  $r$  des Radius dieses Kreises durch  $a$  aus!



V48) Zwischen die Ziffern der Zahl  $123456789$  sollen Pluszeichen so eingesetzt werden, dass die entstehende Summe den Summenwert  $99$  hat.

- a) Gib alle Lösungen an!
- b) Begründe, warum es keine weiteren Lösungen gibt!
- c) Ist die Aufgabe lösbar, wenn der Summenwert  $111$  betragen soll?

Gib die Lösungen an oder begründe, warum es keine Lösung geben kann!

V49) Klaus überprüft während der Ferien seine Vokabelkenntnisse in Englisch. Als er unter den  $2555$  Wörtern, die er im Laufe der Zeit sorgfältig in sein Vokabelheft eingetragen hat, die Anzahl  $z_1$  derjenigen Wörter ermittelt, die er noch beherrscht, und danach die Anzahl  $z_2$  der übrigen Wörter, stellt er beim Aufschreiben dieser beiden Zahlen fest, dass  $z_1 > z_2$  ist und dass er beim Aufschreiben genau zwei Ziffern verwendet hat, und zwar immer abwechselnd, wobei die an erster Stelle stehende Ziffer bei beiden Zahlen dieselbe ist.

Ermittle  $z_1$  und  $z_2$ !

V50) Beweise: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Längen der Katheten gleich der Summe von Umkreisdurchmesser und Inkreisdurchmesser dieses Dreiecks.

V51) Als es auf der Klassenfahrt einmal regnet, schlägt jemand vor, sich die Zeit mit einem "Schuheraten" zu vertreiben. Mario, das Logikgenie der Klasse, wird aus dem Raum geschickt und von fünf seiner Mitschüler, die alle unterschiedliche Schuhgrößen haben, wird je eine Sandale genommen. Mario soll nun zu jedem den passenden Schuh finden, aber natürlich nicht durch Probieren wie beim Aschenbrödel. Er soll die folgenden  $7$  Aussagen, von denen genau eine falsch ist, exakt analysieren:

- (1) Ali hat größere Schuhe als Ellen.
- (2) Birgit hat kleinere Schuhe als Clement.
- (3) Dörte hat kleinere Schuhe als Ali.
- (4) Ellen hat größere Schuhe als Clement.

- (5) Ali hat kleinere Schuhe als Clement.  
 (6) Ellen hat größere Schuhe als Dörte.  
 (7) Clement hat kleinere Schuhe als Dörte.

Finde heraus, welches die falsche Aussage ist und ordne Marios Mitschüler nach der Größe ihrer Füße!

V52) Ein Gummiball - der Radius bleibt unberücksichtigt - fällt von einem 108 m hohen Turm lotrecht auf den Boden und springt nach jedem Aufprall genau  $\frac{1}{10}$  seiner vorherigen Fallhöhe wieder hoch,

- a) Wie hoch springt der Ball nach dem 4. Aufprall?  
 b) Wie lang ist der Weg, den der Ball bis zum 5. Aufprall zurücklegt?  
 c) Löse die Aufgabenteile a) und b) für eine beliebige Höhe  $h$  und fasse das jeweilige Ergebnis so weit wie möglich zusammen!

V53) Beweise folgenden Satz:

Wenn drei einander paarweise berührende Kreise mit den Radien  $r_1, r_2, r_3$ , für die  $r_3 < r_2 < r_1$  gilt, eine gemeinsame Tangente  $t$  besitzen, dann gilt folgende Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}$$

V54) Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen  $n$ , die gleich dem Fünffachen ihres Quersprodukts sind!

V55) Konstruiere alle Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen:

- (a)  $\overline{AB} = c$ ; (b)  $\overline{CS} = s$ ; (c)  $\overline{AC} : \overline{BC} = 3 : 1$ ; (d)  $\overline{CS}$  ist Seitenhalbierende .

V56) Beweise folgende Aussage:

Wenn  $p$  und  $q$  Primzahlen sind, für die  $q - p = 2$  und  $p > 3$  gilt, dann folgt:

- (1) Das arithmetische Mittel von  $p$  und  $q$  ist durch 3 teilbar.  
 (2) Vergrößert man das Produkt von  $p$  und  $q$  um 1, dann entsteht eine durch 18 teilbare Zahl.

V57) Zum Mahlen einer Getreidemenge können zwei Mahlwerke A und B eingesetzt werden. Jedes Mahlwerk bewältigt in gleichen Zeiten gleiche Mengen.

Wenn man zunächst 8 Stunden lang nur mit dem Mahlwerk A mahlen würde und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 18 Stunden benötigen, bis die gesamte Getreidemenge bewältigt ist. Würde aber zunächst 10 Stunden lang nur mit A gemahlen und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 15 Stunden benötigen, bis die gesamte Menge bewältigt ist.

Wie lange wird es dauern, die gesamte Menge zu bewältigen, wenn A und B von Anfang an zusammen eingesetzt werden?

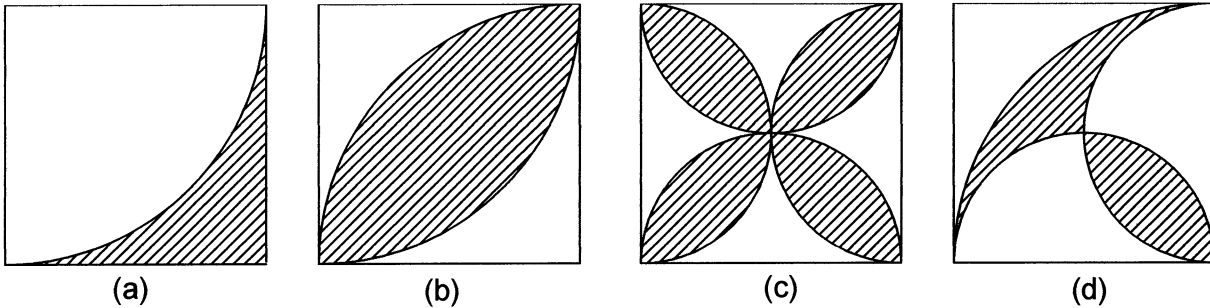
V58) Seien  $a, b, c, d$  rationale Zahlen und gelte  $b \neq 0, d \neq 0, a \neq b, c \neq d$ .

a) Beweise folgenden Satz: Wenn  $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ , dann  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .

b) Untersuche, ob die Umkehrung dieses Satzes wahr oder falsch ist und gib einen Beweis: oder eine Widerlegung an!

V59) Ermittle die Inhalte der schraffierten Flächen!

(Die Figuren seien Quadrate mit der Seitenlänge 1 (LE) sowie Halbkreisbogen oder Viertelkreisbogen.)



V60) Ermittle den Wahrheitswert der folgenden Aussage und beweise bzw. widerlege sie!

Wenn  $m$  der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, 4, ... annimmt, dann ist  $2^{2m} + 2^{m+1} + 1$  stets eine Quadratzahl.

V61) Beweise folgenden Satz:

Wenn man durch einen der Schnittpunkte zweier Kreise die beiden Durchmesser zieht, dann liegen deren andere Endpunkte mit dem zweiten Schnittpunkt der beiden Kreise in einer Geraden.

V62) Wie viele Paare  $(x;y)$  natürlicher Zahlen gibt es, die folgende Gleichung erfüllen:

$$10x + y < 1993$$

V63) In einem Flugzeug sitzen sechs Passagiere, die in Berlin, Rostock, Halle, Essen, Celle und Suhl ihren Wohnsitz haben. Die Anfangsbuchstaben ihrer Namen sind A, B, C, D, E und F (die Reihenfolge der Städte entspricht nicht der Reihenfolge der Namen).

Wir erfahren aus Gesprächsfetzen:

- (1) Zwei der Passagiere, und zwar A und der Berliner, sind Ingenieure.
- (2) Zwei der Passagiere, und zwar E und der Rostocker, sind Journalisten.
- (3) Zwei der Passagiere, und zwar C und der Reisende aus Halle, sind Lehrer.
- (4) B und F sind aktive Sportler, der Reisende aus Halle treibt keinen Sport.
- (5) Der Passagier aus Celle ist älter als A, der Passagier aus Suhl ist jünger als C.
- (6) Zwei der Passagiere, und zwar B und der Berliner wollen in Brüssel bleiben. Zwei der Passagiere, und zwar C und der Reisende aus Celle steigen in Brüssel um und fliegen dann noch weiter.

Gib zu jedem der Passagiere Namen, Beruf und Wohnsitz an!

V64) Sei ABCD ein Sehnenviereck mit dem Diagonalschnittpunkt S. Der Umkreismittelpunkt M liege im Inneren von ABCD.

Ermittle die Größe  $\varphi$  des Winkels  $\sphericalangle CSD$  in Abhängigkeit von den Größen  $\mu_1$  bzw.  $\mu_2$  von den zu den Bogen  $\widehat{AB}$  bzw.  $\widehat{CD}$  gehörenden Zentriwinkeln!

V65) Beweise, dass alle Differenzen der Form  $2^3 - 1^3$ ,  $3^3 - 2^3$ ,  $4^3 - 3^3$ , .... bei Division durch 6 den Rest 1 lassen!

V66) Es ist zu beweisen, dass die reellen Zahlen  $x, y, z$  genau dann positiv sind, wenn sie folgende drei Ungleichungen erfüllen:

- (1)  $x + y + z > 0$  ;
- (2)  $xy + yz + xz > 0$  ;
- (3)  $xyz > 0$  .

V67) Zu konstruieren sind alle Dreiecke  $ABC$  , die folgende Bedingungen erfüllen:

- (a)  $\overline{BC} = a$  ; (b)  $\overline{AS} = s$  ; (c)  $\sphericalangle BAC = \alpha$  ;
- (d)  $\overline{AS}$  ist Seitenhalbierende im Dreieck  $ABC$  .

V68) Ermittle ohne Verwendung von Rechenhilfsmitteln alle vierstelligen Zahlen, die Quadrate natürlicher Zahlen und deren Ziffern sämtlich Primzahlen sind!

V69) Max arbeitet zur Vorbereitung auf die Mathematik-Olympiade eine Anzahl Aufgaben durch. Seinem Freund Moritz, der ihn fragt, wie viele von diesen Aufgaben er schon gelöst habe und wie viele noch nicht, antwortet er:

"Die Anzahl der gelösten Aufgaben ist um 22 größer als die Anzahl der nicht gelösten Aufgaben. Addiert man zur Anzahl der gelösten Aufgaben die dreifache Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, dann erhält man eine Zahl, die kleiner als 60 ist. Addiert man aber zur Anzahl der gelösten Aufgaben ein Drittel der Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, dann ergibt sich eine ganze Zahl, die größer als 30 ist."

Untersuche, ob durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie viele Aufgaben Max bearbeitet und wie viele er davon gelöst hat!

Ist dies der Fall, dann gib diese Anzahlen an!

V70) Von einem Punkt  $P$  auf der Peripherie eines Kreises gehen zwei Sehnen aus, die einen Winkel von  $135^\circ$  miteinander bilden. Zwei weitere Sehnen, die ebenfalls von  $P$  ausgehen, zerlegen diesen Winkel in drei Winkel von je  $45^\circ$  .

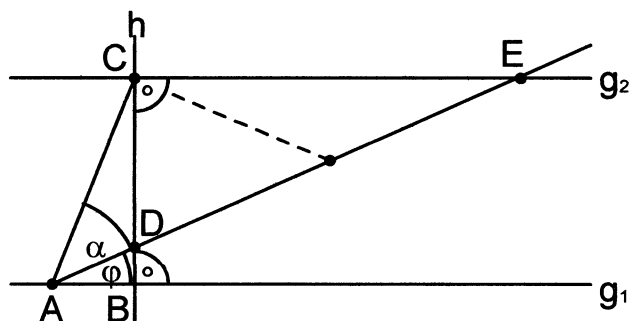
Die vier Endpunkte dieser Sehnen (außer  $P$ ) bilden vermutlich stets ein .....  
Beweise diese Vermutung!

V71) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen  $n$  , die folgende Bedingungen erfüllen:

- (a) Die Zahl  $n$  ist das Produkt von genau drei Primzahlen; je zwei dieser Primzahlen sind voneinander verschieden; jede dieser Primzahlen ist größer als 10 .
- (b) Die Zahl  $n$  kann als das Produkt von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden, deren Summe 600 beträgt. Die Zahl  $n$  kann aber auch als das Produkt von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden, deren Summe 240 beträgt.

V72) In nebenstehender Figur gelte  $h \perp g_1$  ,  
 $h \perp g_2$  ,  $\overline{DE} = 2\overline{AC}$  und  $\sphericalangle EAC = \alpha$  .

- a) Berechne die Größe  $\varphi$  des Winkels  $\sphericalangle BAE$  , wenn  $\alpha = 26^\circ$  gilt!
- b) Drücke  $\varphi$  allgemein durch  $\alpha$  aus!



V73) Ermittle alle Paare  $(x;y)$  aus natürlichen Zahlen, die die Gleichung  $2^x + 5 = 3^y$  erfüllen!



V74) Konstruiere alle Vierecke ABCD, die folgende Bedingungen erfüllen:

- (a)  $\overline{AD} = \overline{DC} = c = 4 \text{ cm}$  ; (b)  $\sphericalangle CBA = 2 \cdot \sphericalangle BAD$  ; (c)  $\sphericalangle DCB = \frac{3}{2} \cdot \sphericalangle CBA$  ;  
 (d)  $\sphericalangle ADC = \frac{4}{3} \cdot \sphericalangle DCB$  .

a) Weise nach, dass es genau ein Viereck ABCD gibt, das die gegebenen Bedingungen erfüllt, und dass dieses Viereck ein Trapez ist!

b) Beweise, dass die Diagonale  $\overline{AC}$  den Winkel  $\sphericalangle BAD$  halbiert!

c) Beweise, dass  $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$  gilt! (Betrachte dazu das Dreieck ABC.)

d) Untersuche, ob dieses Viereck einen Umkreis oder einen Inkreis besitzt!  
 Beweise die entsprechenden Vermutungen!

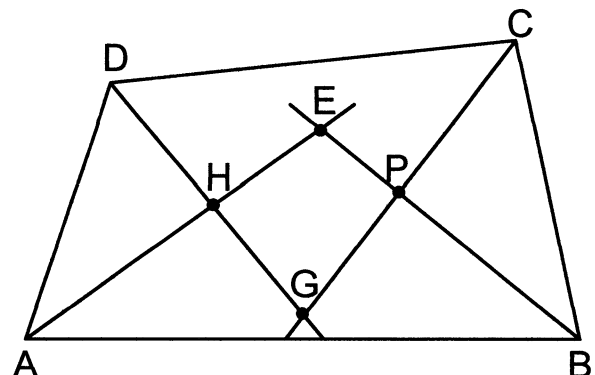
V75) Die Folge  $\{a_n\}$  sei rekursiv durch  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = Q[Q(a_n) + a_n]$  definiert (wobei  $Q(z)$  die Quersumme der Zahl  $z$  bedeute).

Ermittle die Zahl  $a_{2000}$  dieser Folge!

V76) Wie alt ist Herr Müller und wie alt ist seine Frau (Altersangaben in vollen Jahren), wenn Herr Müller doppelt so alt ist wie seine Frau war, als er so alt war, wie seine Frau heute ist? Herr Müller wird mit seiner Frau zusammen 108 Jahre alt sein, wenn seine Frau so alt sein wird, wie Herr Müller heute ist.

V77) Die Winkelhalbierenden eines konvexen Vierecks mögen sich wie in nebenstehender Abbildung angeben in den Punkten E, F, G, H schneiden.

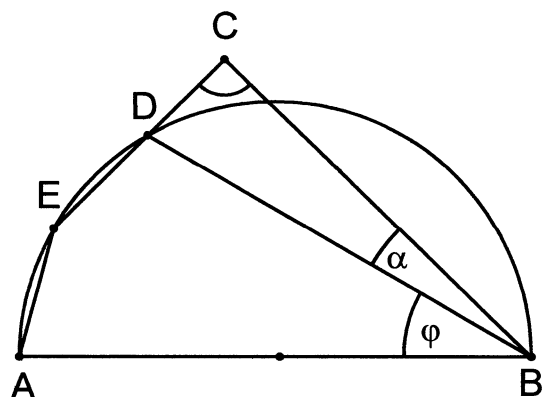
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen EFGH stets ein Sehnenviereck ist!



V78) Beweise: Wenn die Summe zweier Quadratzahlen durch 36 teilbar ist, dann trifft dies auch für deren Differenz zu.

V79) In nebenstehender Figur gelte  $\overline{AE} = \overline{ED}$ ,  
 $\sphericalangle ECB = \sphericalangle DCB = 90^\circ$  und  $\sphericalangle DBC = \alpha$ .

Drücke die Größe  $\varphi$  des Winkels  $\sphericalangle ABD$  durch  $\alpha$  aus!



V80) Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl  $n$ , bei der sowohl die Quersumme  $Q(n)$  als auch die Quersumme  $Q(n+1)$  des Nachfolgers  $n+1$  durch 11 teilbar ist!

V81) Sei T der Berührungspunkt zweier sich von außen berührender Kreise  $k_1$  und  $k_2$ . Zwei durch T gehende Sekanten  $s_1$  und  $s_2$  mögen  $k_1$  in  $A_1$  bzw.  $B_1$  sowie  $k_2$  in  $A_2$  bzw.  $B_2$  schneiden.

Beweise, dass dann stets  $A_1B_1$  parallel zu  $A_2B_2$  ist!

## M E R K S T O F F

Wiederhole den Merkstoff aus der Aufgabensammlung für Klasse 7 :

- Grundgleichung der Zahlentheorie ; Sätze aus der Teilbarkeitslehre ;
- Binomische Formeln ;
- Terme, Aussageformen und Erfüllungsmengen ;
- Regeln für das äquivalente Umformen von Gleichungen und Ungleichungen ;
- Einige wichtige Ungleichungen ;
- Musterlösung für eine Konstruktionsaufgabe .

### 1. Das Rechnen mit Kongruenzen (Modulrechnung)

**Satz:** Zu jeder ganzen Zahl  $a$  und jeder natürlichen Zahl  $m \geq 1$  gibt es genau zwei ganze Zahlen  $q$  und  $r$ , so dass gilt:

$$a = q \cdot m + r \quad \text{mit} \quad 0 \leq r < m .$$

Dabei heißt  $r$  der zu  $a$  und  $m$  gehörende "nichtnegativ kleinste Rest".

Desgleichen gibt es zwei Zahlen  $\bar{q}$  und  $\bar{r}$ , so dass gilt:

$$a = \bar{q} \cdot m + \bar{r} \quad \text{mit} \quad |2\bar{r}| \leq m .$$

Dabei heißt  $\bar{r}$  der zu  $a$  und  $m$  gehörende "absolut kleinste Rest" .

**Definition:**  $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow_{\text{Def}} m \mid (b - a)$  mit  $a, b, m \in \mathbb{Z}$  und  $m > 0$  .

Zwei ganze Zahlen, die bei Division durch eine natürliche Zahl  $m > 0$  denselben Rest lassen (und deren Differenz dann stets durch  $m$  teilbar ist) nennt man "*kongruent nach dem Modul  $m$* ". Man schreibt dafür  $a \equiv b \pmod{m}$  oder kürzer  $a \equiv b \pmod{m}$  .

Aus den Definitionen folgt, dass  $a \mid b$  gleichbedeutend ist mit  $b \equiv 0 \pmod{a}$  . Man kann daher *Teilbarkeitsaussagen in die Sprache der Kongruenzen übersetzen*.

Ferner folgt, dass  $a \equiv b \pmod{m}$  gleichbedeutend ist mit  $a = q \cdot m + b$  . Man kann daher stets *aus der Sprache der Kongruenzen in die Sprache der Gleichungen übergehen*.

Die Kongruenzrelation besitzt (wie auch die Gleichheit) folgende wichtige *Eigenschaften*:

**Reflexivität:** Stets gilt  $a \equiv a \pmod{m}$  .

**Symmetrie:** Wenn  $a \equiv b \pmod{m}$  , dann  $b \equiv a \pmod{m}$  .

**Transitivität:** Wenn  $a \equiv b \pmod{m}$  und  $b \equiv c \pmod{m}$  , dann  $a \equiv c \pmod{m}$  .

Es gelten folgende *Sätze*:

$$(S1) \quad a \equiv b \pmod{m} \quad \text{und} \quad c \equiv d \pmod{m} \quad \Rightarrow \quad a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m} .$$

$$(S2) \quad a \equiv b \pmod{m} \quad \text{und} \quad c \equiv d \pmod{m} \quad \Rightarrow \quad ac \equiv bd \pmod{m} .$$

$$(S3) \quad a \equiv b \pmod{m} \quad \Rightarrow \quad a^n \equiv b^n \pmod{m} .$$

$$(S4) \quad ab \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{und} \quad (p \text{ ist Primzahl}) \quad \Rightarrow \quad a \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{oder} \quad b \equiv 0 \pmod{p} .$$

$$(S5) \quad ac \equiv bc \pmod{m} \quad \text{und} \quad c \not\equiv 0 \pmod{m} \quad \text{und} \quad \text{ggT}(c; m) = d \quad \Rightarrow \quad a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}} .$$

(S6) Wenn  $c$  und  $m$  teilerfremd sind ( d.h.  $\text{ggT}(c; m) = 1$  ) , dann gilt:

$$ac \equiv bc \pmod{m} \quad \text{und} \quad c \not\equiv 0 \pmod{m} \quad \Rightarrow \quad a \equiv b \pmod{m}$$

## 2. Verallgemeinern und Spezialisieren von Sätzen

Fügt man zu den Voraussetzungen bzw. zur Behauptung eines Satzes neue Voraussetzungen bzw. Behauptungen hinzu, dann sagen wir, dass die Voraussetzungen bzw. die Behauptung dieses Satzes *verschärft* wurden.

Lässt man von den Voraussetzungen bzw. der Behauptung eines Satzes Teile weg, dann sagt man, dass die Voraussetzungen bzw. die Behauptung dieses Satzes *abgeschwächt* wurden.

Eine Aussage, die man durch *Abschwächen der Voraussetzungen* oder durch *Verschärfen der Behauptung* eines Satzes erhält, nennt man eine *Verallgemeinerung* dieses Satzes. Eine Verallgemeinerung eines Satzes muss nicht wieder eine wahre Aussage sein; hier ist daher stets ein *Beweis* oder eine *Widerlegung* nötig.

Eine Aussage, die man durch *Verschärfen der Voraussetzungen* oder durch *Abschwächen der Behauptung* erhält, nennt man eine *Spezialisierung* (oder einen Spezialfall) dieses Satzes.

Eine *Spezialisierung* eines Satzes ist stets wieder eine wahre Aussage (und bedarf daher keines erneuten Beweises).

Ist ein Satz (S1) eine Verallgemeinerung eines Satzes (S2), dann ist (S2) eine Spezialisierung von (S1) (und umgekehrt).

- (S):  $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B_1 \wedge B_2$  ; Ausgangssatz  
 (S1):  $V_1 \wedge V_2 \wedge V_3 \Rightarrow B_1 \wedge B_2$  ; Spezialisierung von (S)  
 (S2):  $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B_1$  ; Spezialisierung von (S)  
 (S3):  $V_1 \Rightarrow B_1 \wedge B_2$  ; Verallgemeinerung von (S)  
 (S4):  $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B_1 \wedge B_2 \wedge B_3$  ; Verallgemeinerung von (S)  
 (S5):  $V_1 \wedge V_2 \wedge V_3 \Rightarrow B_1 \wedge B_2 \wedge B_4$  ; Verallgemeinerung der Spezialisierung (S1)  
 (S6):  $V_1 \Rightarrow B_1$  ; Verallgemeinerung der Spezialisierung (S2)

*Beispiel:* Es bedeute:

- |  |  |
|--|--|
| $V_1$ : $\overline{ABCD}$ ist ein Parallelogramm ; | $B_1$ : $\overline{AC}$ halbiert $\overline{BD}$ ; |
| $V_2$ : $\overline{AB} = \overline{BC}$ ;          | $B_2$ : $\overline{BD}$ halbiert $\overline{AC}$ ; |
| $V_3$ : $\angle BAC = 90^\circ$ ;                  | $B_3$ : $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ;      |
|  | $B_4$ : $\overline{AC} = \overline{BD}$ .          |

(S): In jedem Rhombus (d.h. jedem Parallelogramm mit einem Paar gleich langer benachbarter Seiten) halbieren die Diagonalen einander (d.h.  $\overline{AC}$  halbiert  $\overline{BD}$  und  $\overline{BD}$  halbiert  $\overline{AC}$ ).

(S1): In jedem Quadrat halbieren die Diagonalen einander.

(S2): In jedem Rhombus halbiert eine der beiden Diagonalen die andere.

(S3): In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

(S4): In jedem Rhombus halbieren die Diagonalen einander und stehen aufeinander senkrecht.

(S5): In jedem Quadrat halbieren die Diagonalen einander und sind gleich lang.

(S6): In jedem Parallelogramm halbiert eine der beiden Diagonalen die andere.

**Beachte:**

Hat man einen Satz entdeckt und bewiesen, dann sollte man stets versuchen, durch Umkehren oder Verallgemeinern zu einer neuen wahren Aussage zu gelangen. Dabei ist es wichtig, die Voraussetzung bzw. die Behauptung geschickt in Teilvoraussetzungen bzw. Teilbehauptungen aufzuspalten. Manchmal findet man eine wahre Umkehrung oder Verallgemeinerung erst dann, wenn man vorher den Ausgangssatz spezialisiert hat (vgl. Umkehrung des Höhensatzes). Wiederhole in der Aufgabensammlung für Klasse 6 den Abschnitt "Umformen und Umkehren von Sätzen" !

**3. Indirekte Beweise**

Sei  $A$  ein beliebige Ausdruck (d.h. eine Aussage  $A$  oder eine Aussageform  $H(x,y,\dots,z)$  ).

Dann wollen wir  $(A \wedge \text{nicht } A)$  *Widerspruch* nennen und mit  $\zeta$  bezeichnen.

Wenn man zeigen kann, dass  $A \Rightarrow \zeta$  gilt, dann ist die Aussage  $A$  falsch.

Wenn man zeigen kann, dass  $H(x,y,\dots,z) \Rightarrow \zeta$  gilt, dann ist die Aussageform  $H(x,y,\dots,z)$  kontradiktorisch, d.h. ihre Lösungsmenge ist leer.

*Die logische Struktur indirekter Beweise:*

**Satz (S) :**  $V \Rightarrow B$  . **Gegenannahme GA:** "nicht B "

*Indirekter Beweis von (S) :*

Man zeigt, dass  $(V \wedge \text{nicht } B) \Rightarrow \zeta$  gilt.

Folglich ist  $(\text{nicht } B)$  falsch, da  $V$  als wahr angenommen wird.

Folglich ist  $B$  wahr und (da  $V$  als wahr angenommen wird) ist auch der Satz  $V \Rightarrow B$  wahr, w.z.b.w. .

Der Nachweis, dass  $(V \wedge \text{nicht } B \Rightarrow \zeta)$  gilt, kann man in Form des für direkte Beweise verwendeten Beweisschemas führen.

**Beachte:**

- (1) Bei indirekten Beweisen können Widersprüche auftreten zu
  - (a) einer Voraussetzung des Satzes ;
  - (b) der Gegenannahme des Satzes ;
  - (c) bereits abgeleiteten Feststellungen, zu bewiesenen Sätzen oder zu Axiomen.
- (2) Indirekte Beweise werden in folgenden Fällen häufig angewendet:
  - (a) Beweis von Umkehrungen bereits bewiesener Sätze ;
  - (b) Beweis von Aussagen der Form "Es gibt kein  $x$  mit der Eigenschaft  $H(x)$  " ;
  - (c) Beweis von Aussagen der Form "Es gibt höchstens ein  $x$  mit der Eigenschaft  $H(x)$  " .
- (3) Beim indirekten Beweis einer Umkehrung eines Satzes kann man oft
  - (a) auf Beweisgedanken zurückgreifen, die beim direkten Beweis des Ausgangssatzes verwendet wurden ;
  - (b) den Ausgangssatz als Hilfsmittel verwenden .

### 1. Beispiel:

Wir beweisen den Satz

"Wenn das Quadrat einer Zahl gerade ist, dann ist auch die Zahl selbst gerade. "

$V: 2|x^2, x \in \mathbb{N}$  ; Beh.:  $2|x$  ; GA : nicht  $2|x$  .

*Beweis (indirekt) :*

GA  $\Rightarrow$  (1) Es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $x = 2n+1$  ;  
[Definition von  $2|x$  ; jede natürliche Zahl ist entweder gerade oder ungerade] .

(1)  $\Rightarrow$  (2)  $x^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2+2n) + 1$  ; [binomische Formel; Umformung] .

(2)  $\Rightarrow$  (3) Es gibt ein  $m \in \mathbb{N}$ , so dass  $x^2 = 2m+1$  ; [wenn  $n \in \mathbb{N}$ , dann auch  $(2n^2+2n) \in \mathbb{N}$ ] .

(3)  $\Rightarrow$  (4) nicht  $2|x^2$  ; [Definition der Teilbarkeit; jede natürliche Zahl ist entweder gerade oder ungerade] .

(4),  $V \Rightarrow \zeta$  [ Die abgeleitete Feststellung (4) widerspricht der Voraussetzung des Satzes ] .

Damit ist gezeigt, dass  $V \Rightarrow$  Beh. gilt, w.z.b.w.

(Unser Satz ist die Umkehrung des Satzes  $2|x \Rightarrow 2|x^2$  . Beim direkten Beweis des Ausgangssatzes wird dieselbe Beweisidee verwendet.. Beim indirekten Beweis der Irrationalität von  $\sqrt{2}$  werden diese beiden Sätze als Hilfsmittel verwendet.)

### 2. Beispiel:

*Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes:*

$V_1$ :  $\angle APB$  ist ein Peripheriewinkel von  $k(M;r)$  über dem Bogen  $\widehat{AB}$  ;

$V_2$ :  $\angle AQB = \angle APB$  (wobei Q auf derselben Seite von AB liegt wie P) ;

Beh.:  $\angle AQB$  ist ein Peripheriewinkel von  $k(M;r)$ , d.h.  $Q \in k(M;r)$  .

$GA_1$ : Q liegt außerhalb des Kreises  $k(M;r)$  ;

$GA_2$ : Q liegt innerhalb des Kreises  $k(M;r)$  ;

GA  $\Leftrightarrow (GA_1 \vee GA_2)$

(Bei indirekten Beweisen kommt es recht oft vor, dass eine *Fallunterscheidung* vorgenommen werden muss. In unserem Fall muss zweierlei gezeigt werden:

$$V_1 \wedge V_2 \wedge GA_1 \Rightarrow \zeta \quad \text{und} \quad V_1 \wedge V_2 \wedge GA_2 \Rightarrow \zeta .$$

Merke: Beim indirekten Beweis einer *Umkehrung* eines Satzes wird oft der *Ausgangssatz als Beweismittel* verwendet.)

*Beweis:*

Gelte  $\angle APB = \varphi$  und  $\angle AQB = \psi$  .

Aus  $GA_1$  folgt, dass es genau einen Punkt  $P'$  der Strecke  $\overline{AQ}$  gibt, der auf dem Kreis  $k(M;r)$  liegt.

Wegen  $V_2$  liegt  $P'$  auf derselben Seite von AB wie der Punkt P .

Also ist  $\angle AP'B$  ein Peripheriewinkel von  $k(M;r)$ , der über demselben Bogen liegt wie der Peripheriewinkel  $\angle APB$  .

Nach dem Peripheriewinkelsatz folgt hieraus

$$(1) \angle AP'B = \angle APB = \varphi .$$

Da  $P'$  auf der Strecke  $\overline{AQ}$  liegt, ist  $\angle AP'B$  ein Außenwinkel und  $\angle AQB = \angle P'QB = \psi$  ein nichtanliegender Innenwinkel im Dreieck  $P'BQ$ .

Nach dem Außenwinkelsatz folgt hieraus

$$(2) \angle AQB < \angle AP'B .$$

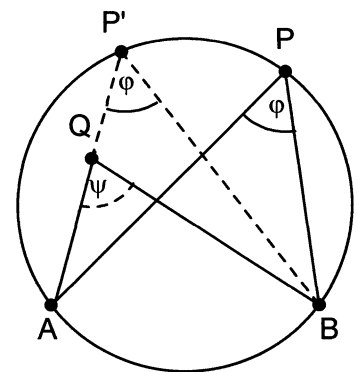
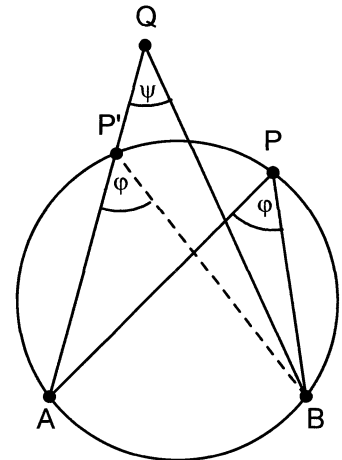
Aus (1) und (2) folgt dann  $\angle AQB < \angle APB$ , was der Voraussetzung  $V_1$  widerspricht.

Damit ist gezeigt, dass  $GA_1$  falsch sein muss.

Analog folgt aus  $GA_2$ , dass es genau einen Punkt  $P'$  auf dem Kreis  $k(M;r)$  gibt, für den  $Q$  auf der Strecke  $\overline{AP'}$  liegt.

Analog lässt sich dann mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes und des Außenwinkelsatzes herleiten, dass  $\angle AQB > \angle APB$  gelten würde, was ebenfalls der Voraussetzung  $V_2$  widerspricht.

Also muss außer  $GA_1$  auch  $GA_2$  falsch sein, woraus die Falschheit von  $GA$  folgt und damit ein indirekter Beweis unseres Satzes erbracht ist.



#### 4. Funktionen und ihre Graphen

D(1) Werden den Elementen  $x$  einer Menge  $X$  eindeutig Elemente  $y$  einer Menge  $Y$  zugeordnet, dann heißt die dabei entstehende Menge  $f$  von geordneten Paaren  $(x,y)$  eine *Funktion*.  $X$  heißt *Definitionsbereich*,  $Y$  heißt *Wertebereich* der Funktion  $f$ .

Die Elemente des Definitionsbereichs nennt man *Argumente*, die zugeordneten Elemente des Wertebereichs nennt man *Funktionswerte* der Funktion  $f$ .

$$x \xrightarrow{f} y \quad \text{äq} \quad (x,y) \in f .$$

D(2) Gilt  $X \subseteq \mathbb{R}$  und  $Y \subseteq \mathbb{R}$ , wobei  $\mathbb{R}$  die Menge der reellen Zahlen bezeichnet, dann nennt man  $f$  eine *reelle reellwertige Funktion*.

D(3) Kann man bei einer Funktion zu jedem Argument den zugehörigen Funktionswert mit Hilfe einer Gleichung berechnen, dann nennt man die betreffende Gleichung *Funktionsgleichung* dieser Funktion.

$$y = f(x); x \in X \quad \text{äq} \quad (x,y) \in f; x \in X .$$

Es gilt dann:  $f = \{ (x,y) \mid y = f(x); x \in X \}$ .

(Beachte:  $y = f(x)$  ist eine *Aussageform*;  $f$  ist die zugehörige *Erfüllungsmenge*;  $f(x)$  ist ein *Term*.)

D(4) Ordnet man jedem Zahlenpaar  $(x,y) \in f$  den zugehörigen Punkt  $P(x,y)$  in einem Koordinatensystem zu, dann erhält man eine ebene Punktmenge, die man *Graph von  $f$*  bzw. von  $y = f(x); x \in X$  nennt.

(Der Graph des Definitionsbereichs  $X$  ist eine Punktmenge auf der  $x$ -Achse; der Graph des Wertebereichs  $Y$  ist eine Punktmenge auf der  $y$ -Achse.)

D(5) Wenn  $u$  eine beliebige reelle Zahl ist, dann bezeichnet  $[u]$  den "ganzzahligen Anteil von  $u$ ", d.h. die größte ganze Zahl, die nicht größer als  $u$  ist.

Es soll also stets eine der folgenden, untereinander äquivalenten Beziehungen gelten:

$$(a) [u] \leq u < u + 1 ; \quad (b) u - 1 < [u] \leq u ; \quad (c) u = [u] + \alpha \text{ mit } 0 \leq \alpha < 1 .$$

$$D(6) \quad \text{sgn}(u) =_{\text{Df}} \begin{cases} 1, & \text{wenn } u > 0 ; \\ 0, & \text{wenn } u = 0 ; \\ -1, & \text{wenn } u < 0 . \end{cases} \quad (\text{gelesen: } \textit{Signum von } u) .$$

Der Graph einer *parameterhaltigen Funktionsgleichung*  $y = f(x;p)$  ist im allgemeinen eine *Kurvenschar*, nämlich die Gesamtheit der Graphen aller parameterfreien Funktionsgleichungen, die man erhält, wenn man für den Parameter  $p$  eine (beliebig wählbare) bestimmte reelle Zahl einsetzt.

## 5. Das Lösen von Bestimmungsaufgaben

Bei vielen Bestimmungsaufgaben ist die Menge aller Elemente aus einer vorgegebenen Menge zu ermitteln, die gewisse vorgegebene Bedingungen erfüllen. Jede solche *Bedingung* lässt sich als *Aussageform* schreiben.

(Als wichtiger Spezialfall treten *Gleichungen* auf.)

Allgemein: Zu einer *Konjunktion von Aussageformen* - speziell zu einer einzigen Aussageform - ist die *zugehörige Erfüllungsmenge* zu bestimmen.

(Dies wird etwa bei den meisten zahlentheoretischen Bestimmungsaufgaben gefordert.)

Werden geordnete Paare, Tripel bzw.  $n$ -Tupel gesucht, dann werden die zugehörigen Bedingungen durch Aussageformen mit 2, 3 bzw.  $n$  Variablen festgehalten.

(Dies ist etwa bei *Gleichungssystemen* mit mehreren Variablen sowie bei vielen *logisch-kombinatorischen Bestimmungsaufgaben* der Fall.)

Die Lösung einer solchen Aufgabe muss stets enthalten:

(a) Die Angabe der gesuchten **Erfüllungsmenge** (der gesuchten Elemente, Paare usw.) .

(b) Den **Einzigkeitsnachweis**, in dem gezeigt wird:

"Wenn ein Element alle gestellten Bedingungen erfüllt, dann gehört es zur angegebenen Erfüllungsmenge".

(Oft spricht man hierbei von einer "*begründeten Herleitung*".)

(c) Den **Existenznachweis**, in dem gezeigt wird:

"Wenn ein Element zur angegebenen Erfüllungsmenge gehört, dann erfüllt es alle gestellten Bedingungen".

(Manchmal nennt man diesen Nachweis auch "*Probe*".)

Meist stellt man die Lösung einer solchen Aufgabe wie folgt dar:

"Angenommen, die Aufgabe besitzt eine Lösung. Dann müsste gelten: .....  
 Folglich gilt: Wenn die Aufgabe Lösungen besitzt, dann können es nur die folgenden sein:  
 ..... (Einzigkeitsnachweis nebst Angabe der *Erfüllungsmenge*.)  
 Es sind dies alles tatsächlich Lösungen, denn es gilt: .....  
 (Probe als *Existenznachweis*.)

Bei **geometrischen Ortsaufgaben** wird jeweils eine Menge  $M$  von Punkten  $X$  (der Ebene) gesucht, die eine Bedingung  $H(X)$  erfüllen.

In der Regel versucht man zunächst, den geometrischen Ort  $M$  zu erraten, (indem man eine genaue Figur zeichnet und einige Spezial- sowie Grenzfälle für  $X$  untersucht).

Dann beweist man folgende beiden Sätze:

"Wenn  $H(X)$ , dann  $X \in M$ " (Einzigkeitsnachweis) ;

"Wenn  $X \in M$ , dann  $H(X)$ " (Existenznachweis) .

Bei **geometrischen Konstruktionsaufgaben** wird jeweils eine Menge von Figuren gesucht, die gegebene Bedingungen erfüllen.

Anstelle der Erfüllungsmenge wird hier ein (*Konstruktionsbeschreibung* genanntes) algorithmisches Verfahren angegeben, mit dessen Hilfe man die gesuchten Figuren und auch nur diese Figuren konstruieren kann.

Wie man hier den Einzigkeitsnachweis und den Existenznachweis führen kann, ist in der Aufgabensammlung für Klasse 7 in der "Musterlösung für eine Konstruktionsaufgabe" angegeben.

Es gibt auch Bestimmungsaufgaben, bei denen *Daten*  $a, b, \dots, c$  und Beziehungen gegeben sind und eine *Unbekannte*  $x$  gesucht wird, wobei diese Unbekannte durch die Daten ausgedrückt werden soll:  $x = f(a, b, \dots, c)$  .

Meist ist dabei vom Sachverhalt her klar, dass es genau ein solches Element gibt.

(Dies ist etwa bei Sachaufgaben und bei geometrischen Bestimmungsaufgaben meist der Fall.)

Bei solchen Aufgaben muss man in der Regel zunächst *Beziehungen zwischen den gegebenen, den gesuchten und günstig gewählten Hilfsgrößen suchen*, bis man als "Ansatz" ein *Gleichungssystem* (speziell eine einzelne Gleichung) erhält, das es (durch Eliminieren der Hilfsgrößen) gestattet, die gesuchte Größe durch die gegebenen Größen auszudrücken.

Jede **parameterhaltige Aufgabe** ist eine Klasse von unendlich vielen konkreten Aufgaben. Im Unterschied zu den konkreten Aufgaben muss hier zusätzlich angegeben werden, wie viel bzw. welche Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter auftreten.

(Dies nennt man *Lösungsdiskussion* bei parameterhaltigen Gleichungen; *Determination* bei parameterhaltigen Konstruktionsaufgaben; *Angabe von Lösbarkeitsbedingungen* bei parameterhaltigen Sachaufgaben oder geometrischen Bestimmungsaufgaben.)