B e z i r k s k o m i t e e   C h e m n i t z
zur Förderung math.- nat. begabter und interessierter Schüler
www.bezirkskomitee.de

AUFGABENSAMMLUNG FÜR ARBEITSGEMEINSCHAFTEN - Klasse 10

GLEICHUNGEN, UNGLEICHUNGEN UND FUNKTIONEN

Wiederhole aus den Aufgabensammlungen:

Klasse 7,	S.25:	Mengentheoretisch - logische Grundlagen
	S.26:	Regeln für das äquivalente Umformen von Gleichungen und Ungleichungen
Klasse 8,	S.16:	Das Beweisen von Gleichheits- und Ungleichheitsaussagen
	S.22:	Funktionen und ihre Graphen
Klasse 9,	S.27:	Lineare Gleichungssysteme; der Gaußsche Algorithmus
	S.28:	Quadratische Gleichungen und Ungleichungen
	S.29:	Gleichungen höheren Grades
	S.30:	Transformation von Funktionsgraphen

1) Ermittle die Lösungsmengen folgender Gleichungen (über dem Bereich der reellen Zahlen):

a) $\frac{1}{x-2} - (x-2)^2 = 0$;

b) $\frac{1}{x-2} - (x-1)^2 + 3 = 0$;

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+\frac{1}{2}} = 0$;

d) $\frac{x^2+12x+4}{x+2} = 6\sqrt{x}$;

e) $\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{x^2-9x+20} + \frac{1}{x^2-11x+30} + \frac{1}{x^2-13x+42} = \frac{x(x+5)}{x^2-8x+7}$.

2) Für welche Werte des reellen Parameters p besitzen folgende Gleichungen keine, genau eine oder mehr als eine Lösung?

a) $\frac{1}{x^2-p^2} - \frac{1}{x^2+2px+p^2} = \frac{1}{2x-2p}$;

b) $\frac{x^2-p+3p^2}{x-p} + 2x = 3$.

3) Ermittle jeweils alle geordneten Paare $(k;x)$ aus einer ganzen Zahl k und einer reellen Zahl x, die folgende Gleichungen erfüllen:

a) $\frac{3}{3x^2+1} = k$;

b) $\frac{x}{x^2-6x+10} = k$;

c) $\frac{x}{x^2-5x+7} = k$.

4) Ermittle die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

a) $\sqrt{8-x^2} = x$;

b) $\sqrt{10-x} - \sqrt{x} = 2$;

c) $\sqrt{2x-1} = 1-\sqrt{x}$;

d) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2-x} = 0$;

e) $\sqrt{-2x+x^2+1} + \sqrt{x^2+4-4x} = 1$;

f) $5\sqrt{x^2+5x+28} = x^2+5x+4$;

g) $\sqrt{26-x} \leq \sqrt{x} - 4$;

h) $\sqrt{x+4} - 1 \geq 2 - \sqrt{x+1}$;

i) $\sqrt{10-x} + \sqrt{x} \le \sqrt{2x+1} + \sqrt{9-2x}$; k) $\sqrt{x^2+2} - \sqrt{2x^2+5} \le 0$;

l) $\frac{\sqrt{x}}{x-2} \le 1$; m) $\sqrt{2x^2-1} < \frac{1}{x}$;

n) $\frac{1-\sqrt{1-3x^2}}{x} < 1$; o) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

5) Arbeite im "Merkstoff" auf S.25 den Abschnitt "1.1 Funktionen und ihre Graphen" durch !

6) Untersuche, ob es reelle Zahlen a, b, c, d gibt, so dass für $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gilt: $f(0) = 10$, $f(1) = 12$, $f(2) = 4$, $f(3) = 1$.
Falls es solche Zahlen gibt, dann ermittle alle diese Zahlen !

7) Seien a, b gegebene positive reelle Zahlen und sei f die für alle natürlichen Zahlen n durch die Gleichung $f(n) = a^n + b^n + (a+b)^n$ definierte Funktion.
Beweise, dass dann $(f(2))^2 = 2\cdot f(4)$ gilt !

8) Beweise, dass die durch die Gleichung $f(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16$ gegebene Funktion f genau zwei reelle Nullstellen besitzt !

9) Untersuche, ob die durch die Gleichung $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ gegebene Funktion f eine reelle Nullstelle besitzt !

10) Ermittle alle ganzen Zahlen a , für die die durch die Gleichung
$f(x) = x^4 + x^3 + a^2x^2 + x + 1$ gegebene Funktion f mindestens eine reelle Nullstelle besitzt !

11) Beweise folgende Aussage:
Wenn eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle x die Gleichung

$$x \cdot f(x+2) = (x^2-9) \cdot f(x)$$

erfüllt, dann hat sie mindestens drei reelle Nullstellen.

12) Eine Funktion, die für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen definiert ist, erfülle folgende Bedingungen:

(1) $f(1) = 1$;
(2) $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} \cdot f(x)$ für $x \neq 0$;
(3) $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ für $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1+x_2 \neq 0$.

Beweise: Wenn eine Funktion f diese Bedingungen erfüllt, dann gilt $f(\frac{5}{7}) = \frac{5}{7}$.

13) Ermittle für jede Funktion f , die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, die Funktionswerte $f(0)$, $f(-1)$ und $f(\frac{3}{7})$:

(1) f ist für alle reellen Zahlen definiert.
(2) Es gilt $f(1) = 2$.
(3) Für alle reellen Zahlen a und b gilt $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$.

14) Eine Funktion f sei durch die Gleichung $f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_3, a_2, a_1, a_0 gegeben.
Beweise: Wenn eine rationale Zahl x Nullstelle dieser Funktion f ist, dann ist x eine ganze Zahl.

15) Beweise, dass für jede durch $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_ix^i + \ldots + a_nx^n$ gegebene Funktion f gilt:

a) Wenn f genau n reelle Nullstellen besitzt und alle diese Nullstellen von f ganze Zahlen sind, dann sind auch alle Koeffizienten a_i ganze Zahlen.

b) Wenn alle Koeffizienten a_i ganze Zahlen sind und $a_n = 1$ gilt, dann ist jede Nullstelle von f entweder eine ganze Zahl oder eine irrationale Zahl.

16) Untersuche, ob es jeweils ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_ix^i + \ldots + a_nx^n$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_i gibt, das folgende Bedingungen erfüllt:

a) Es gibt 4 paarweise verschiedene ganze Zahlen x_0, x_1, x_2, x_3, für die gilt:
$p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 1$ und $p(x_0) = 30$.

b) Es gibt 5 paarweise verschiedene ganze Zahlen x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 , für die gilt:
$p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = p(x_4) = 1$ und $p(x_0) = 30$.
Wenn dies der Fall ist, dann gib für a) bzw. b) ein solches Polynom an.

17) Ermittle jeweils alle Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, die die folgenden Gleichungssysteme erfüllen :

a) (1) $x^2 + y^2 = 5$
(2) $x^2 + xy = 2$

b) (1) $x^2 + y = 2$
(2) $y^2 + x = 2$

c) (1) $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 6 = 9xy$
(2) $(x + y)^2 = 36$

d) (1) $x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2}$
(2) $x^2 + y^2 = 6$

18) Ermittle jeweils alle Tripel $(x;y;z)$ reeller Zahlen, die die folgenden Gleichungssysteme erfüllen:

a) (1) $x^2 + y^2 = 5$
(2) $x \cdot y = 2$
(3) $x \cdot z = 3$

b) (1) $x(y + z) = 5$
(2) $y(x + z) = 8$
(3) $z(x + y) = 9$

c) (1) $x - \frac{1}{y} = 1$
(2) $y - \frac{1}{z} = 1$
(3) $z - \frac{1}{x} = 1$

d) (1) $x + y - z = -1$
(2) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$
(3) $-x^3 + y^3 + z^3 = -1$

e) (1) $x + y + z = a$
(2) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
(3) $x^3 + y^3 + z^3 = a^3$

f) (1) $x + y + z = 3$
(2) $x^3 + y^3 + z^3 = 3$
(3) $x \cdot y \cdot z = 1$

19) Ermittle alle reellen Zahlen a , für die das Gleichungssystem

(1) $x + y + z = 0$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(3) $x^3 + y^3 + z^3 = a$

a) keine reellen Lösungen $(x;y;z)$ besitzt;
b) genau eine reelle Lösung $(x;y;z)$ besitzt;
c) mehr als eine reelle Lösung $(x;y;z)$ besitzt.

20) Ermittle jeweils alle reellen Zahlen a , für die die folgenden Ungleichungssysteme mindestens eine Lösung $(x;y)$ besitzen:

a)	(1)	$x + 2y < 20$	b)	(1)	$y > x^2 - 2x + a$
	(2)	$y - x < 4$		(2)	$y < x + a$
	(3)	$y - ax \geq 6$		(3)	$y < -2x + 1$

21) Berechne (ohne Verwendung von Rechenhilfsmitteln) die Werte der folgenden Terme:

a) $25^{0,5}$ = ... b) $4^{1,5}$ = ... c) $16^{-0,5}$ = ...

d) $0,01^{0,5}$ = ... e) $0,36^{-0,5}$ = ... f) $0,125^{0,3}$ = ...

g) $0,00032^{-0,2}$= .... h) $0,027^{0,6}$ = ... i) $125^{-0,6}$ = ...

22) Ermittle (ohne Verwendung von Rechenhilfsmitteln) Näherungswerte für folgende Terme:

a) $17^{0,5}$ = ... ≈ .... b) $0,5^{-0,5}$ = ... ≈ ....

c) $16^{0,24}$ ≈ .... = ... d) $28^{0,3}$ ≈ .... = ...

e) $0,041^{-0,49}$ ≈ .... = ... f) $50^{0,51}$ ≈ .... = ...

Bilde und löse analoge Aufgaben!

23) Ermittle die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$9^x - 10 \cdot 3^{x+1} + 81 = 0 \quad .$$

24) Ermittle alle Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, die folgende Gleichung erfüllen:

$$2^{\sqrt{1 + x - 3y}} + 3^{\sqrt{2x - 4y + 1}} = 2 \quad .$$

25) Berechne die Werte folgender Terme und begründe!

a) $\log_2 16$ = ..., weil .... b) $\log_{16} 2$ = ..., weil ....

c) $\log_2 \frac{1}{16}$ = ..., weil .... d) $\log_2 \sqrt{8}$ = ..., weil ....

e) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{27}}$ = ..., weil .... f) $\log_5 0,2$ = ..., weil ....

Bilde und löse analoge Aufgaben!

26) Beweise folgende Sätze:

(1) $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$; (2) $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$;

(3) $n \cdot \log_a b = \log_a b^n$; (4) $\frac{1}{n} \cdot \log_a b = \log_a \sqrt[n]{b}$.

27) Finde jeweils eine Vermutung! Beweise diese Vermutung!

(5) $\log_a b \cdot \log_b a =$ .... (6) $\log_a b \cdot \log_b c =$ .... (7) $\frac{\log_a b}{\log_a c} =$ ....

28) Berechne (mit Hilfe von dekadischen Logarithmen) die Werte der folgenden Terme auf 4 Stellen nach dem Komma genau; überprüfe die Resultate durch eine Schätzung! Bilde und löse analoge Aufgaben!

a) $\log_7 5 =$ .... b) $\log_5 7 =$ .... c) $\log_{0,2} 1,5 =$ ....d) $\log_{1,5} 0,5 =$ ....

29) Folgende Terme stellen jeweils eine rationale Zahl dar.
Ermittle (ohne Verwendung von Rechenhilfsmitteln) diese rationalen Zahlen!

a) $\log_2 7 \cdot \log_{13} 9 \cdot \log_7 \sqrt{2} \cdot \log_3 13 =$ ....

b) $\lg(1+\frac{1}{1}) + \lg(1+\frac{1}{2}) + ... + \lg(1+\frac{1}{98}) + \lg(1+\frac{1}{99}) =$ ....

c) $\frac{\lg(2-\sqrt{3})}{\lg(7-4\sqrt{3})} =$ .... d) $\frac{\lg(3-2\sqrt{2})}{\lg(5\sqrt{2}-7)} =$ ....

30) Ermittle die letzten beiden Ziffern derjenigen natürlichen Zahl, die folgende Gleichung erfüllt:

$$\log_{14}(\log_{11} x) = 1 \ .$$

31) Ermittle die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

a) $\log_2(\log_2(\log_2 x)) = 0$; b) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$;

c) $\frac{1}{2}\lg(2x-1) + \lg\sqrt{x-9} < 1$; d) $\lg(2x+1) - \lg x > 2$;

e) $\lg(2x+6) - \lg(x-5) > 1$; f) $\lg\sqrt{x-9} + \frac{1}{2}\lg(2x-1) > 1$;

g) $\lg(x-2) - \lg(1-2x) > 1$.

32) Ermittle die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in Abhängigkeit von den vorkommenden reellen Parametern:

a) $x^{\log_a x} = a^2 x$; b) $a \cdot 10^{bx} = 10^{cx+d}$.

33) Ermittle alle Paare $(x;y)$ reeller Zahlen mit $y > 0$ und $y \neq 1$, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

(1) $x \cdot \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = 2 \cdot \log_y(5 - \sqrt{24})$

(2) $y - x = 2$

34) Arbeite im "Merkstoff" auf S.26 den Abschnitt "1.2. Transformation von Funktionsgraphen" durch !

35) Zeichne die Graphen der durch folgende Gleichungen dargestellten Funktionen! (Zeichne auch charakteristische Punkte und Asymptoten ein.)

a) $y = 2^x$, $x \in (-2;2)$; $y = -2^x$; $y = 2^{-x}$; $y = 2^{x-3} - 1$; $y = 2^{-(x+3)} - 1$

b) $y = \log_2 x$; $y = \log_3 x$; $y = -\log_2 x + 4$; $y = \log_2(x - 3)$.

36) Löse folgende Gleichungen graphisch und gib an, welche der Lösungen genau und welche nur näherungsweise abgelesen werden können!

$a_1)$ $2^{x-1} - \sqrt{x+3} + 2 = 0$;
$a_2)$ $2^{x-1} - \sqrt{x+3} + 1 = 0$;
$a_3)$ $2^{x-1} - \sqrt{x+3} = 0$;
$a_4)$ $2^{x-1} - \sqrt{x+3} - 1 = 0$;

$b_1)$ $\log_2(x+2) - (x-1)^2 = 0$;
$b_2)$ $\log_2(x+2) - (x-1)^2 - 1 = 0$;
$b_3)$ $\log_2(x+2) - (x+1)^2 = 0$;
$b_4)$ $\log_2(x+2) - (x+1)^2 - 1 = 0$.

37) Untersuche, ob es eine Funktion $y = og_a(bx+c)$ mit reellen Zahlen a, b, c und $a > 1$ gibt, deren Graph in einem x,y - Koordinatensystem durch die Punkte (2;2), (-1;0) und (0;1) verläuft.
Wenn es eine derartige Funktion gibt, dann gib alle reellen Zahlentripel (a;b;c) an, für die dies zutrifft!

Beweise folgende Aussagen:

38) a) Wenn $a, b > 0$ und $a, b \neq 1$, dann $|\log_a b| + |\log_b a| \geq 2$.

b) Wenn $a, b > 0$ und $a^2 + b^2 = 7ab$, dann $\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$.

39) Wenn $x, y > 0$, dann $\sqrt{x} + \sqrt{x+3y} < \sqrt{x+y} + \sqrt{x+2y}$.

40) a) Wenn $x, y > 0$, dann $(x+y)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \geq 4$.

b) Wenn $x, y, z > 0$, dann $(x+y+z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geq 9$.

c) Formuliere einen analogen Satz für n positive reelle Zahlen!

41) a) Wenn $x, y > 0$, dann $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

b) Wenn $x, y, z > 0$, dann $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$.

42) Gegeben sei die parameterhaltige Ungleichung $x^2 + y^2 \geq axy$.

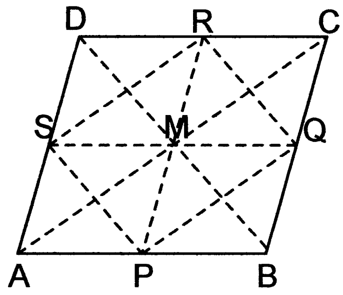
a) Ermittle alle Werte des reellen Parameters a , für die diese Ungleichung allgemeingültig ist!

b) Für welche a und für welche x , y gilt das Gleichheitszeichen?

V E K T O R E N

1) Arbeite im "Merkstoff" auf S.27 den Abschnitt "2.1. Pfeile und Vektoren; das Rechnen mit Vektoren" durch und ergänze die angegebenen Leerstellen!

2) Sei ABCD ein Parallelogramm mit dem Diagonalenschnittpunkt M ; sei PQRS das zugehörige Mittelpunktviereck; ferner gelte $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.
Betrachte alle Pfeile, die mit Hilfe der bezeichneten Punkte darstellbar sind!



a) Gib alle Pfeile an, die mit $\overrightarrow{MQ}$ gleichgerichtet und nicht gleich lang sind!

....

b) Gib alle Pfeile an, die mit $\overrightarrow{SP}$ entgegengesetzt gerichtet und gleich lang sind!

....

c) Drücke die durch folgende Pfeile repräsentierten Vektoren durch $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ aus!

$\overrightarrow{DC}$ = ... ; $\overrightarrow{CD}$ = ... ; $\overrightarrow{PR}$ = ... ; $\overrightarrow{DA}$ = ... ; $\overrightarrow{QS}$ = ... ; $\overrightarrow{SQ}$ = ... ;

$\overrightarrow{AC}$ = ... ; $\overrightarrow{BD}$ = ... ; $\overrightarrow{DB}$ = ... ; $\overrightarrow{CA}$ = ... ;

$\overrightarrow{AP}$ = ... ; $\overrightarrow{QM}$ = ... ; $\overrightarrow{RM}$ = ... ; $\overrightarrow{SA}$ = ... ; $\overrightarrow{QC}$ = ... ; $\overrightarrow{MS}$ = ... ;

$\overrightarrow{AM}$ = ... ; $\overrightarrow{MB}$ = ... ; $\overrightarrow{MD}$ = ... ; $\overrightarrow{RS}$ = ...

d) Welche Beziehungen bestehen zwischen $\overrightarrow{PM}$ und $\overrightarrow{CQ}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{RD}$, $\overrightarrow{SP}$ und $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{AS}$ bzw. $\overrightarrow{MR}$ und $\overrightarrow{DA}$?

$\overrightarrow{PM}$ = ... ; $\overrightarrow{AC}$ = ... ; $\overrightarrow{AB}$ = ... ; $\overrightarrow{SP}$ = ... ; $\overrightarrow{RP}$ = ... ; $\overrightarrow{MR}$ = ...

e) Drücke folgende Summen durch $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ aus!

$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS}$ = ... = ... ; $\overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP}$ = ... = ... ;

$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{BM}$ = ... = ... ; $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{PA}$ = ... = ... ;

$\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{RP}$ = ... = ... ; $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{AC}$ = ... = ...

f) Löse folgende Vektorgleichungen und drücke $\vec{x}$ durch $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ aus !

$\overrightarrow{AP} + \vec{x} = \overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{QR} + \vec{x} = \overrightarrow{QC}$; $\overrightarrow{AP} + \vec{x} = \overrightarrow{SR}$; $\overrightarrow{QR} + \vec{x} = \overrightarrow{AS}$;

$\overrightarrow{CR} + \vec{x} = \overrightarrow{BQ}$; $\overrightarrow{MS} + \vec{x} = \overrightarrow{QC}$; $\overrightarrow{SM} + \vec{x} = \overrightarrow{PB}$; $\overrightarrow{AP} + \vec{x} = \overrightarrow{QC}$.

3) Beweise, dass für alle Vektoren $\vec{a}$, gilt : $|\vec{a}| - |\vec{b}| \le |\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$.
Wann gilt das Gleichheitszeichen?

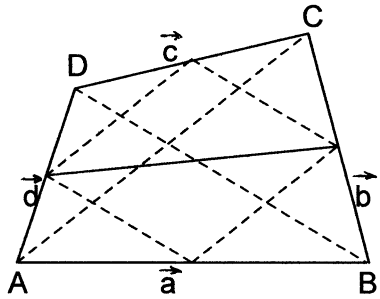
4) Sei $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$ und M der Mittelpunkt von $\overrightarrow{PQ}$.

Drücke die durch folgende Pfeile repräsentierten Vektoren durch $\vec{p}$ oder $\vec{q}$ aus !

$\overrightarrow{PQ}$ = ... ; $\overrightarrow{QP}$ = ... ; $\overrightarrow{PM}$ = ... = ... ;

$\overrightarrow{OM}$ = ... = ... = ...

5) Sei ABCD ein Viereck und EFGH das zugehörige Mittelpunktviereck .



Es gelte $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$.

a) Drücke die durch folgende Pfeile repräsentierten Vektoren durch $\vec{a}$, $\vec{b}$. $\vec{c}$, $\vec{d}$ aus!

$\overrightarrow{AC}$ = ... = ...

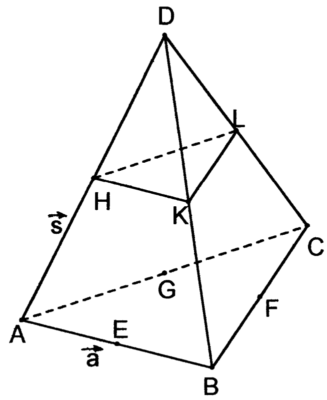
$\overrightarrow{BD}$ = ... = ... ;

$\overrightarrow{EF}$ = ... = ... = ... ; $\overrightarrow{HG}$ = ... = ... = ...

b) Welche Beziehung besteht zwischen $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{AC}$ bzw. zwischen $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{HG}$? Deute dieses Ergebnis geometrisch!

c) Drücke $\overrightarrow{HF}$ durch $\vec{a}$ und $\vec{c}$ aus !

6) Sei E , F , G , H , K bzw. L der Mittelpunkt der Kante $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ bzw. $\overline{CD}$ eines Tetraeders ABCD .
Ferner gelte $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$ und $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{CD}|$ sowie $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{AD} = \vec{s}$.



a) Gib alle (durch die bezeichneten Punkte darstellbaren) Pfeile an, die mit $\overrightarrow{EF}$ entgegengesetzt gerichtet sind !
Begründe !

....

b) Wie viele (durch die bezeichneten Punkte darstellbaren) Pfeile haben die gleiche Länge wie $\overrightarrow{KL}$?
Drücke diese Länge durch $|\vec{a}|$ aus ! Begründe !

c) Drücke die durch folgende Pfeile repräsentierten Vektoren durch $\vec{a}$ oder $\vec{s}$ aus!
$\overrightarrow{HD}$ = ... ; $\overrightarrow{BE}$ = ... ; $\overrightarrow{KH}$ = ... ; $\overrightarrow{AH}$ = ...

$\overrightarrow{BD}$ = ... = ... ; $\overrightarrow{DK}$ = ... = ...

d) Drücke folgende Summen von Vektoren durch $\vec{a}$ oder $\vec{s}$ aus!

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ = ... = ... ; $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FL} + \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DE}$ = ... = ... ;

$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{KH}$ = ... = ... = ... ;

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CL} + \overrightarrow{CF}$ = ... = ... = ... ;

$\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{KH} + \overrightarrow{AH}$ = ... = ... = ... ;

$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{KE}$ = ... = ... = ...

7) Seien $\overrightarrow{AS_a}$, $\overrightarrow{BS_b}$, $\overrightarrow{CS_c}$ die Seitenhalbierenden eines Dreiecks ABC und gelte $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, also $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$.

a) Drücke $\overline{s_a} = \overrightarrow{AS_a}$ auf verschiedene Weisen durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ oder $\vec{c}$ aus!

b) Berechne die Vektorsumme $\vec{x} = \overrightarrow{s_a} + \overrightarrow{s_b} + \overrightarrow{s_c}$ und deute das Ergebnis geometrisch!

8) Sei ABCDEFGH ein Quader, M der Diagonalenschnittpunkt der Deckfläche EFGH , N der Mittelpunkt der Kante $\overline{CG}$ und P der Mittelpunkt von $\overline{MN}$.
Sei $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$.

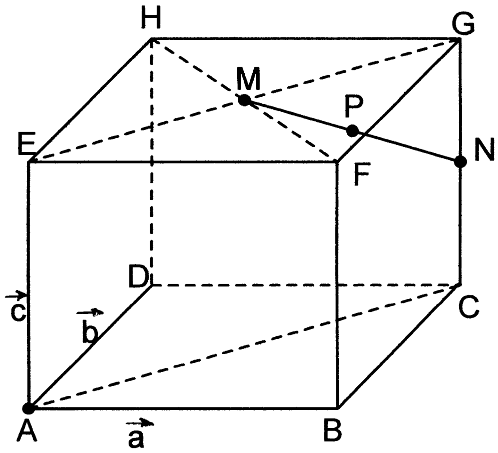
a) Drücke die durch folgende Pfeile repräsentierten Vektoren durch $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aus !

$\overrightarrow{AG}$ = ... ; $\overrightarrow{EC}$ = ... ;

$\overrightarrow{AM}$ = ... ; $\overrightarrow{AN}$ = ... ;

$\overrightarrow{MN}$ = ... = ... ;

$\overrightarrow{AP}$ = ... = ...



b) Vergleiche $\overrightarrow{EC}$ und $\overrightarrow{MN}$! Was lässt sich daraus schließen ?

c) Beweise, dass P auf der Raumdiagonalen $\overline{AG}$ liegt und dass $\overline{AP} : \overline{AG} = 3 : 4$ gilt !

9) Beweise folgende Sätze mit Hilfe der Vektorrechnung !

a) Wenn sich in einem Viereck die Diagonalen halbieren, dann ist dieses Viereck ein Parallelogramm.

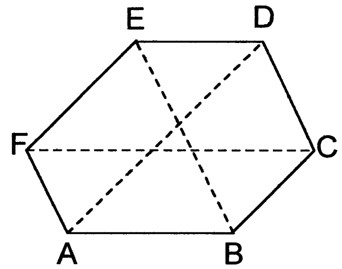
b) In jedem Trapez ist die Mittellinie parallel zu den Grundseiten und halb so lang wie deren Summe.

c) Für jedes Trapez, das kein Parallelogramm ist, liegen die Mittelpunkte der Grundseiten und der Schnittpunkt der verlängerten Schenkel auf einer Geraden.

10) Beweise folgende Aussagen:

a) Ist M ein Punkt im Inneren eines Dreiecks ABC, dann ist der Vektor $\vec{x} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2 \cdot \overrightarrow{MC}$ von der Lage des Punktes M unabhängig.

b) In der vom Dreieck ABC festgelegten Ebene gibt es stets genau einen Punkt P , für den $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - 3 \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$ gilt.
Wo liegt dieser Punkt P ?



11) Beweise folgenden Satz über Sechsecke ABCDEF :

Wenn AB || DE || CF und BC || EF || AD und CD || FA , dann gilt auch BE || CD .

12) Beweise folgende Sätze und berechne jeweils das Längenverhältnis $\overline{AB} : \overline{BC}$ der zugehörigen Strecken:

a) Wenn $\overrightarrow{OC} = 3 \cdot \overrightarrow{OA} - 2 \cdot \overrightarrow{OB}$ gilt, dann liegen die Punkte A , B , C auf einer Geraden.

b) Wenn $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{OB}$ gilt, dann liegen die Punkte A , B , C auf einer Geraden.

13) Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$. Sei P derjenige Punkt auf $\overline{BC}$, für den $\overline{BP} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BC}$ gilt, und sei S der Schnittpunkt von $\overline{AP}$ mit der Höhe $\overline{CH}$ dieses Dreiecks. Berechne das Verhältnis $\overline{AS} : \overline{AP}$ und das Verhältnis $\overline{HS} : \overline{SC}$!

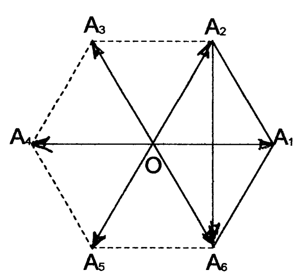
14) Arbeite im "Merkstoff" auf S.29 den Abschnitt "2.2. Punkte und Vektoren im Koordinatensystem" durch und ergänze die angegebenen Leerstellen !

15) Zeichne jeweils den Repräsentanten $\overrightarrow{OP}$ zu folgenden Vektoren in einem Koordinatensystem:
$\vec{a} = (2;1)$; $\vec{b} = (-1;1)$; $\vec{c} = (-2;0)$; $\vec{d} = (2;2)$; $\vec{e} = [\sqrt{2}; 135°]$; $\vec{f} = [2; 180°]$; $\vec{g} = [2\sqrt{2}; -45°]$.

16) Gegeben seien die Punkte A(-1;2) und B(2;3) .
- Zeichne die Pfeile $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$!
- Konstruiere D so, dass $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ gilt und ermittle die Koordinaten von D!
- Konstruiere den Pfeil $\overrightarrow{OP}$, der denselben Vektor $\vec{p}$ repräsentiert wie $\overrightarrow{AB}$ und ermittle die Koordinaten von P !
- Berechne $| \vec{p} |$!

17) Sei $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (2;1)$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = (0;2)$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = (-1;1)$.
Berechne und konstruiere
$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = 2 \cdot \vec{a}$, $y = \overrightarrow{OY} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ und $= \overrightarrow{OZ} = 3 \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b} - 2 \cdot \vec{c}$.
Bilde und löse analoge Aufgaben !

18) Sei $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (a_1;a_2)$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = (b_1;b_2)$. Sei M er Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
- Berechne $\vec{m} = \overrightarrow{OM} = (m_1;m_2)$!
- Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$!
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{m}$?



19) Sei $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ein reguläres Sechseck mit dem Mittelpunkt O und $| \overline{OA_1} | = 1$ (vgl. Figur) .
Berechne folgende Vektoren sowohl in der Form (x;y) als auch in der Form $[|\vec{a}|; \varphi]$!

$\overrightarrow{OA_1}$ = ... = ... ; $\overrightarrow{A_1A_2}$ = ... = ... ;

$\overrightarrow{OA_2}$ = ... = ...; $\overrightarrow{A_1A_3}$ = ... = ... ;

$\overrightarrow{OA_3}$ = ... = ... ; $\overrightarrow{A_1A_4}$ = ... = ... ;

$\overrightarrow{OA_4}$ = ... = ... $\overrightarrow{A_1A_5}$ = ... = ... ;

$\overrightarrow{OA_5}$ = ... = ... ; $\overrightarrow{A_1A_6}$ = ... = ... ;

$\overrightarrow{OA_6}$ = ... = ... ; $\overrightarrow{A_2A_6}$ = ... = ...

20) Fülle folgende Tabelle aus:

$\vec{p} = (x;y)$	$\lvert\vec{p}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	Quadrant	$\tan\varphi = \frac{y}{x}$	φ (in °)	$\vec{p} = [\lvert\vec{p}\rvert; \varphi]$
$\vec{a} = (3;4)$					
$\vec{b} = (-3;-4)$					
$\vec{c} = (2;-4)$					
$\vec{d} = (-5;1)$					
$\vec{e} = (-4;-4)$					
$\vec{f} = (\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$					
$\vec{g} = (-1;3)$					
$\vec{h} = (3; -1)$					

21) Fülle folgende Tabelle aus:

$\vec{p} = [\lvert\vec{p}\rvert; \varphi]$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$x = \lvert\vec{p}\rvert \cdot \cos\varphi$	$y = \lvert\vec{p}\rvert \cdot \sin\varphi$	$\vec{p} = (x;y)$
$\vec{a} = [2; 30°]$					
$\vec{b} = [2; -30°]$					
$\vec{c} = [4; 100°]$					
$\vec{d} = [10; 160°]$					
$\vec{e} = [5; -120°]$					
$\vec{f} = [10; -20°]$					
$\vec{g} = [2; -135°]$					
$\vec{h} = [3; 170°]$					
$\vec{i} = [1; 135°]$					

KOMPLEXE ZAHLEN

1) a) Stelle die Zahl 40 als Produkt zweier Faktoren dar, deren Summe 14 beträgt !
   b) Stelle die Zahl 40 als Produkt zweier Faktoren dar, deren Summe 12 beträgt !

2) Arbeite im "Merkstoff" auf S.29 im Abschnitt "3. Komplexe Zahlen" die Definitionen D(1) bis D(8) durch !
Weise nach, dass die für komplexe Zahlen definierte Addition und Multiplikation dieselben Eigenschaften besitzt wie die Addition und Multiplikation reeller Zahlen !
Weise nach, dass es nicht möglich ist, für komplexe Zahlen eine Relation $a < b$ zu definieren, die die vom Reellen her bekannten Eigenschaften besitzt !

3) Arbeite im "Merkstoff" auf S.30 im Abschnitt "3. Komplexe Zahlen" die Sätze S(1) bis S(6) durch !
Beweise diese Sätze ! Gib dabei stets an, welche der Definitionen D(1) bis D(6) sowie der bereits bewiesenen Sätze für den jeweiligen Beweis benötigt wurden.

4) Sei $a = (1;1)$, $b = (-2;1)$, $c = (4;-3)$, $d = (0;5)$.

a) Stelle die komplexen Zahlen a , b , c , d sowie die zu a , b konjugiert komplexen Zahlen $\bar{a}$, $\bar{b}$ als Punkte in der Zahlenebene dar !
Berechne jeweils Betrag und Argument !
Wie lautet die Summendarstellung sowie die trigonometrische Darstellung dieser Zahlen ?

b) Berechne in der Form $(x;y)$:

$2a - 3b - 3c + d =$ .... ; $(a + \bar{a})(b + \bar{b}) =$ .... ; $(a + \bar{b})(b + \bar{a}) =$ .... ;

$(a + b)(\bar{a} + \bar{b}) =$ .... ; $(c + \bar{d})(d + \bar{c}) =$ .... ; $a \cdot \bar{a} + b \cdot \bar{b} =$ ....

5) Berechne in Summendarstellung ! (Bedeutung von a , b , c , d wie in Aufgabe 4))

$a^2 =$ .... ; $ab =$ .... ; $b^2 =$ .... ; $a^2 + 2ab + b^2 =$ .... ;

$(a + b)^2 =$ .... ; $(a + b)(a - b) =$ .... ; $(a + b)(c + d) =$ .... ;

$a^3 =$ .... ; $a^4 =$ .... ; $a^5 =$ .... ; $a^6 =$ .... ; $a^7 =$ ....

6) Berechne in Summendarstellung ! (Bedeutung von a , b , c , d wie in Aufgabe 4))

$\frac{1}{a} =$ .... ; $\frac{1}{b} =$ .... ; $\frac{1}{c} =$ .... ; $\frac{a}{b} =$ .... ; $\frac{b}{a} =$ ....

7) Löse folgende Gleichungen ! (Bedeutung von a , b , c , d wie in Aufgabe 4))

a) $bz = d$; b) $az + b = cz + d$; c) $a(z + b) = (c + d)z$.

8) Durch die Funktionsgleichung $w = f(z) = az$ mit $a = (1;1) = [\sqrt{2}; 45°]$ wird jeder komplexen Zahl z eindeutig eine komplexe Zahl w zugeordnet.
Berechne die zu gegebenem z gehörenden Funktionswerte !
Stelle die zugehörigen Originalpunkte P und Bildpunkte P' in der Zahlenebene dar !

z	(0;0)	(1;0)	(2;1)	(1;2)	(-2;2)	(-1;-1)
w						

9) Sei $a = [|a|; \varphi]$ gegeben und P der zu einer komplexen Zahl z gehörende Punkt in der Zahlenebene.
Wie kann man den zu der komplexen Zahl az gehörenden Punkt P' in der Zahlenebene konstruieren ?

10) Durch die Funktionsgleichung $w = f(z) = \frac{1}{z}$ wird jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ eindeutig eine komplexe Zahl w zugeordnet.
Berechne die zu gegebenem z gehörenden Funktionswerte !
Stelle die zugehörigen Original- und Bildpunkte in der Zahlenebene dar !

z	(1;0)	(1;1)	(0;1)	$(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$	(-2;-2)	(3;-2)	(2;0)
w							

11) Sei P der zu einer gegebenen komplexen Zahl z gehörende Punkt.
Wie kann man den zur komplexen Zahl $\frac{1}{z}$ gehörenden Punkt P' in der Zahlenebene konstruieren ?
(Hinweis: Betrachte zunächst den zum Kehrwert der konjugiert komplexen Zahl $\bar{z}$ gehörenden Hilfspunkt; achte auf Beziehungen zwischen den Beträgen sowie zwischen den Argumenten der betrachteten Zahlen; zeichne den Kreis um O mit dem Radius r = 1 in die Zahlenebene ein.)

12) Wiederhole aus dem Merkstoff der Aufgabensammlung für Klasse 9 auf S.34 den Abschnitt "3. Spiegelung am Kreis" !

13) Sei $a = 2(\cos 25° + i \cdot \sin 25°)$; $b = 3(\cos 210° + i \cdot \sin 210°)$;
$c = 2(\cos 20° + i \cdot \sin 20°)$; $d = \frac{1}{3} \cdot (\cos 50° + i \cdot \sin 50°)$.

Berechne auf möglichst einfache Weise !

$\frac{a^2}{b \cdot d}$ = ... ; $\frac{c^2 d}{b^2}$ = ... ; $b^5 c^3 d^6$ = ...

14) Welche Beziehung besteht zwischen $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ und $z_1 \cdot z_2$? Beweise deine Vermutung !

15) Welche geometrische Bedeutung hat $|z_1 - z_2|$ für die den komplexen Zahlen z_1 und z_2 zugeordneten Punkte in der Zahlenebene ?
Ermittle den geometrischen Ort aller Punkte z in der Zahlenebene, die folgende Bedingungen erfüllen (wobei a und b komplexe Zahlen und r eine positive reelle Zahl seien) :

a) $|z - 1| \leq 2$; b) $|z - i| = 3$; c) $|z - 3i + 4| \leq 5$; d) $|z - a| = r$ mit $r>0$;

e) $|z - 1| = |z - 3|$; f) $|z - 2i| = |z + 5i|$; g) $|z - a| = |z - b|$.

16) Arbeite im "Merkstoff" auf S.31 im Abschnitt "3. Komplexe Zahlen" die Ausführungen zum Fundamentalsatz der Algebra durch !

17) Ermittle die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen und zeichne jeweils den Graphen dieser Lösungsmenge in der Zahlenebene !

a) $z^4 = (-8\,;\, 8\sqrt{3})$; b) $z^3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\, \frac{\sqrt{2}}{2})$; c) $z^2 = (-1\,;\, \sqrt{3})$; d) $z^8 = 1$; e) $z^6 = 1$;

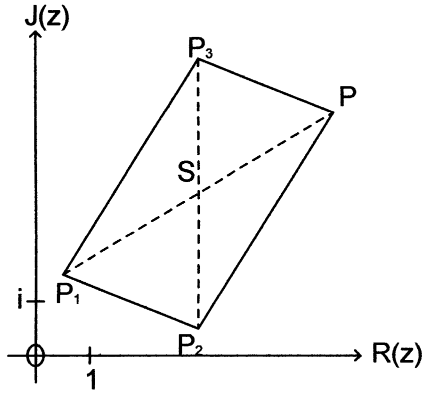
f) $z^4 = 1$; g) $z^3 = 1$; h) $z^3 = -8$; i) $z^4 = -16$; k) $z^n = a$ mit $a = |a|\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$.

18) Zerlege folgende Polynome in Linearfaktoren !

a) $z^2 + 1 =$ .... ; b) $z^3 + 8 =$ .... ;

c) $z^2 + (1; -\sqrt{3}) =$ .... ; d) $2z^3 + (\sqrt{2}; -\sqrt{2}) =$ ....

19) Den Eckpunkten P_1, P_2, P_3 des Parallelogramms $P_1P_2PP_3$ seien die komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3 zugeordnet.
Welche komplexen Zahlen sind dann folgenden Pfeilen zugeordnet ?



$\overrightarrow{P_1P_2}$ = ... $\overrightarrow{P_3P}$ = ...

$\overrightarrow{P_1P_3}$ = ... $\overrightarrow{P_2P}$ = ...

$\overrightarrow{P_3P_1}$ = ... $\overrightarrow{P_2P_3}$ = ...

$\overrightarrow{P_1P}$ = ... $\overrightarrow{P_1S}$ = ...

(Beachte: Wenn zwei Pfeile denselben Vektor repräsentieren, dann ist diesen Pfeilen dieselbe komplexe Zahl zugeordnet.)

20) Über den Seiten eines Dreiecks ABC seien Quadrate mit den Diagonalenschnittpunkten M_1 , M_2 , M_3 errichtet. M sei der Mittelpunkt von $\overline{AB}$; weitere Bezeichnungen entnehme man der Figur. Den Punkten A , B , C seien die komplexen Zahlen a , b , c zugeordnet.

a) Welche komplexen Zahlen sind dann folgenden Pfeilen zugeordnet ?

$\overrightarrow{AC_1}$ = ...

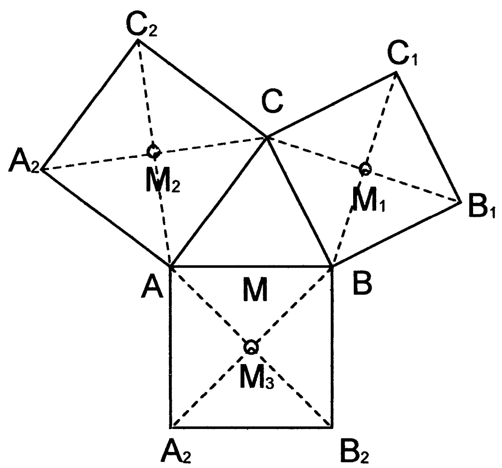
$\overrightarrow{BC_2}$ = ...

$\overrightarrow{BC_1}$ = ...

$\overrightarrow{AM_1}$ = ...

$\overrightarrow{BM_2}$ = ...

$\overrightarrow{CM_3}$ = ...



$\overrightarrow{MM_1}$ = ... $\overrightarrow{M_1M_2}$ = ...

$\overrightarrow{MM_2}$ = ...

b) Beweise, dass folgende Strecken jeweils gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen:

$\overline{AC_1}$ und $\overline{BC_2}$; $\overline{MM_1}$ und $\overline{MM_2}$; $\overline{CM_3}$ und $\overline{M_1M_2}$.

c) Beweise, dass der Schnittpunkt O der Geraden AB_1 und BA_1 auf der Höhe $\overline{CH}$ des Dreiecks liegt !
(Hinweis: Lege die Figur so in die Zahlenebene, dass O mit dem Ursprung zusammenfällt und C auf der imaginären Achse liegt. Zeige dann, dass die Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{OC}$ aufeinander senkrecht stehen.)

d) Beweise, dass die Geraden AM_1 , BM_2 , CM_3 durch einen Punkt gehen und dass $\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{BM_2} + \overrightarrow{CM_3} = \vec{o}$ gilt !
(Hinweis: Beachte, dass außer $CM_3 \perp M_1M_2$ auch $AM_1 \perp M_2M_3$ und $BM_2 \perp M_1M_3$ gilt.)

TRIGONOMETRIE

1) Arbeite im "Merkstoff" auf S.26 die Abschnitte"1.2. Transformation von Funktionsgraphen" und "Eigenschaften von Funktionen" durch !

2) Zeichne die zu folgenden Funktionsgleichungen gehörenden Graphen, wobei die Graphen zu c), d) und e) durch Superposition von Funktionsgraphen zu ermitteln sind .

Welche Eigenschaften haben die zugehörigen Funktionen ?

a) $y = -2\cdot\sin 2x + 1$, $x \in \langle 0;2\pi\rangle$; b) $y = |\cos\frac{x}{2}| - 1$, $x \in \langle -2\pi;2\pi\rangle$;
c) $y = \sin x + \cos x$, $x \in \langle -\pi;\pi\rangle$; d) $y = 2^x + 2^{-x}$, $x \in \langle -2;2\rangle$;
e) $y = \log_2 x + 2^{-(x-2)}$, $x \in \langle 0;6\rangle$.

3) Ermittle zu folgenden Gleichungen auf graphischem Weg die Anzahl der Lösungen sowie Näherungswerte für diese Lösungen !
Welche Lösungen lassen sich genau ablesen ?

a) $|6x - 5| = 4\cdot\sin\frac{\pi}{3}x$; b) $x - 3\cdot\sin\pi x = 0$; c) $\cos\frac{\pi}{3}x - x^2 + \frac{1}{2} = 0$;

d_1) $3\cdot\cos\frac{\pi}{2}x - 2^x - 2^{-x} = 0$; d_2) $2\cdot\cos\frac{\pi}{2}x - 2^x - 2^{-x} = 0$; d_3) $\cos\frac{\pi}{2}x - 2^x - 2^{-x} = 0$;

e) $2\cdot\sin\frac{\pi}{2}x + \log_2 x = 0$; f) $2\cdot\cos\pi x - p - \frac{x^2}{4} = 0$ für $p = 0$, $p = \frac{3}{2}$, $p = 2$, $p = 3$

4) In einer Diskussion über die Anzahl von Kurvenschnittpunkten behauptet Anne, ausgehend vom Beispiel der Kurven mit den Gleichungen $y = \cos x$ und $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$:
"Die Kurve c mit der Gleichung $y = \cos x$ hat mit jeder quadratischen Parabel genau zwei Schnittpunkte."
Bernd behauptet dagegen: "Es gibt auch eine quadratische Parabel, die mit der Kurve c genau 10 Schnittpunkte besitzt."
Untersuche sowohl für Annes als auch für Bernds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist !

5) Wie lassen sich die Terme $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ als Längen von Strecken am Einheitskreis deuten ?
Finde am Einheitskreis eine Strecke, deren Länge $\tan\varphi$ beträgt ! (Woher kommt der Name "Tangens" ?)

6) Arbeite im "Merkstoff" auf S.31 den Abschnitt "4.1. Einige goniometrische Formeln" durch !

a) Leite die Additionstheoreme (3) und (4) durch Anwenden von Rechenregeln für komplexe Zahlen her !

b) Leite die goniometrischen Formeln (5) bis (12b) aus den Formeln (3), (4) ab !
(Gib dabei stets an, welche Definitionen, Umformungsregeln oder bereits abgeleitete Formeln verwendet werden.)

7) Die Formel $\sin\varphi + \sin(\varphi + 120°) + \sin(\varphi + 240°) = 0$ tritt in der Wechselstromtechnik auf.
Beweise diese Formel !

8) Vereinfache folgende Terme:

a) $\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$ = ...

b) $\cos(60° + \alpha) + \sin(30° + \alpha)$ = ...

c) $\cos(\alpha + 45°) + \cos(\alpha - 45°)$ = ...

9) Beweise: Für die Seitenlänge x eines regulären Zehnecks mit dem Umkreisradius r = 1 gilt : $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

10) Berechne (ohne Verwendung von Rechenhilfsmitteln) die genauen Funktionswerte folgender Terme (d.h. drücke diese Terme durch Wurzeln aus natürlichen Zahlen aus) :

a) sin15° = ... ; cos15°= .... ; tan15° = ...;

b) sin75° = ... ; cos75°=........................ ; tan75° = ...;

c) cos36° = ... ; sin36° = ... ; tan36° = ...

11) Ergänze folgende Tabelle, in der Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen festgehalten sind. Über das Vorzeichen des gesuchten Funktionswerts entscheidet der Quadrant des Winkels.

Ges. / Geg.	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$	$\cot\varphi$
$\sin\varphi$	$\sin\varphi$	$\sqrt{1-\cos^2\varphi}$		
$\cos\varphi$		$\cos\varphi$		
$\tan\varphi$			$\tan\varphi$	
$\cot\varphi$				$\cot\varphi$

12) Ermittle die Lösungsmengen folgender Gleichungen und Ungleichungen im Bereich $0° \leq x \leq 360°$ bzw. $0 \leq x \leq 2\pi$:

a) $\cos^2 x = \frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{4} \leq \sin^2 x \leq 1$; c) $\sin(2x + 10°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $3\sin x - 2\cos^2 x = 0$;

e) $\cos x + \cos(x + 60°) - \frac{3}{2} = 0$; f) $\sin(x - 30°)\cdot\cos x = \frac{1}{4}$; g) $\cos 2x + \cos x = 0$;

h) $\cos^2 x - 4\sin x + 5\sin^2 x = 0$; i) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$; k) $\sin 2x - \tan x = 0$.

13) Ermittle alle Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, die folgende Gleichung bzw. folgendes Gleichungssystem erfüllen:

a) $(\sin(x - y) + 1)(2\cos(2x - y) + 1) = 6$;

b) (1) $\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$

(2) $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}$

14) Beweise indirekt, dass stets $\sin x + \cos x \neq 1{,}5$ gilt !

15) Beweise, dass $\sin 10°$ eine Lösung der folgenden Gleichung ist :

$$8x^3 - 6x + 1 = 0 \; .$$

16) Beweise : Wenn $0 < x < \pi$, dann $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > 0$.

17) Beweise : Wenn $x + y + z = \pi$, dann $\cos 2x + \cos 2y - \cos 2z \leq \frac{3}{2}$.

18) Beweise indirekt: Wenn a eine irrationale Zahl ist, dann ist die durch $y = \cos ax + \cos x$ dargestellte Funktion nicht periodisch.

19) Untersuche, ob die durch folgende Funktionsgleichungen für alle reellen Zahlen x definierten Funktionen f_1 bzw. f_2 periodisch sind !

a) $f_1(x) = \dfrac{\sin(x\sqrt{2})}{1 + \sin^2(x\sqrt{2})}$; b) $f_2(x) = \dfrac{\sin(x)}{1 + \sin^2(x\sqrt{2})}$.

20) Arbeite im "Merkstoff" auf S.32 den Abschnitt "4.2. Einige trigonometrische Sätze" durch !

21) Sei R der Umkreisradius eines Dreiecks ABC und gelte $\overline{BC} = a$ sowie $\angle BAC = \alpha$.
Beweise, dass dann stets $a = 2R\cdot\sin\alpha$ gilt !
Leite hieraus den verallgemeinerten Sinussatz ab !

22) Leite den Tangenssatz ab ! (Verwende hierzu den verallgemeinerten Sinussatz.)

23) Sei r der Inkreisradius und p der halbe Umfang eines Dreiecks ABC.
Beweise, dass dann stets $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}$ gilt !

24) Es lässt sich zeigen, dass auch $\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ gilt.
Leite unter Verwendung dieser Formel ab, dass für den Inkreisradius r eines Dreiecks stets gilt:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \ .$$

25) Leite folgende Inhaltsformeln her: $J(ABC) = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma = 2R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$.

26) Leite folgende Heronische Formel für den Inhalt eines Dreiecks her :

$$J(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \ .$$

27) Gegeben sei ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$.
Berechne auf möglichst geschickte Weise den Inhalt J , den Inkreisradius r , den Umkreisradius R sowie die Länge h der Höhe $\overline{CH}$ dieses Dreiecks !

28) Kann in einem Dreieck ABC folgende Beziehung gelten ?

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin\gamma \ .$$

29) Beweise, dass für die Seitenlängen a , b , c und die Winkelgrößen α , β , γ eines beliebigen Dreiecks stets gilt :

$$\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos\gamma}{c} > 0 \ .$$

30) Beweise, dass in keinem Dreieck folgende Beziehung gelten kann:

$$(a + b)\cdot\cos\gamma + c = 0$$

31) Beweise, dass für den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC stets gilt:

$$J(ABC) < \frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{(abc)^2} \ .$$

32) Beweise: Ist u der Umfang, R der Umkreisradius und J der Inhalt eines Dreiecks, dann gilt stets $\frac{u^3}{R\cdot J} \geq 108$.

33) Sei ABCDE ein reguläres Fünfeck mit dem Umkreisdurchmesser d .
Drücke den Inhalt des Dreiecks ABD durch d aus !

AUFGABEN ZUR WIEDERHOLUNG

Zahlentheorie

1) Ermittle alle Quadrupel $(a;b;c;d)$ von unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, für die $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ gilt !

2) Ermittle alle Zahlenpaare $(x;y)$ aus ganzen Zahlen, die die Gleichung $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ erfüllen !

3) Ermittle alle natürlichen Zahlen n , für die sich der Bruch $\frac{n-1}{n^2+1}$ nicht kürzen lässt !

4) Ermittle alle Zahlenpaare $(x;y)$ aus natürlichen Zahlen, für die $p = x^4 + 4y^4$ eine Primzahl ist !

5) Ermittle mindestens vier Primfaktoren der Zahl $z = 2^{256} - 1$!

6) Ermittle alle rationalen Zahlen x , für die die Zahl $z = x^2 + x + 6$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist !

7) Ermittle alle Zahlenpaare $(x;y)$ aus ganzen Zahlen, die die Gleichung $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1985}$ erfüllen !

8) Ermittle die Anzahl der Ziffern sowie die letzte Ziffer der Zahl 3^{100} !

9) Beweise folgende Aussagen :

a) Die Summe der Quadrate zweier unmittelbar aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist niemals durch 3 teilbar.

b) Die Summe der Kuben dreier unmittelbar aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist stets durch 9 teilbar.

c) Wenn a und b positive ganze Zahlen sind, dann lässt sich die Zahl
$$z = a^5 + 3a^4b - 5a^3b^2 - 15a^2b^3 + 4ab^4 + 12b^5$$
als Produkt von fünf paarweise verschiedenen ganzen Zahlen darstellen.

d) Es gibt unendlich viele Paare unmittelbar aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die durch eine dritte natürliche Zahl zu einem pythagoreischen Zahlentripel ergänzt werden können.

e) Wenn n eine natürliche Zahl und $3n+1$ eine Quadratzahl ist, dann lässt sich $n+1$ als Summe von drei Quadratzahlen darstellen.

f) Wenn n und k natürliche Zahlen sind und $n > 2$ und $k > 2$ gilt, dann lässt sich der Term $n(n-1)^{k-1}$ stets als Summe von unmittelbar aufeinanderfolgenden geraden Zahlen darstellen.
Wie viel Summanden hat diese Summe ?
Wie lautet der erste Summand ?

10) Ermittle die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen; beweise bzw. widerlege diese Aussagen !

a) Wenn m eine natürliche Zahl ist, dann ist auch $n = \frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$ eine natürliche Zahl.
b) Für alle ganzen Zahlen a und b gilt: Wenn $3|(a^2+b^2)$, dann $3|a$ und $3|b$.
d) Es gibt ganze Zahlen a, b, für die die Gleichung $x^2 + 10ax + 5b + 3 = 0$ mindestens eine ganzzahlige Lösung besitzt.
e) Es gibt ein Paar $(a;b)$ voneinander verschiedener natürlicher Zahlen, für die a^2+b^2 durch $a \cdot b$ teilbar ist.
e) Es gibt ein Tripel $(a;b;c)$ voneinander paarweise verschiedener natürlicher Zahlen, für die $a^2+b^2+c^2$ durch $a \cdot b \cdot c$ teilbar ist.

Logik und Kombinatorik

1) An einem Turnier nahmen genau 30 Schachspieler teil. Ein Spieler erreicht genau dann die nächste Runde dieses Turniers, wenn er mindestens 60% der erreichbaren Gewinnpunkte erreicht.
Wie viel Spieler können unter diesen Bedingungen die nächste Runde erreichen ?

2) Beweise, dass 77 Telefone niemals so miteinander verbunden werden können, dass jedes Telefon mit genau 15 anderen Telefonen verbunden ist !

3) Aus den natürlichen Zahlen 1 bis 200 werden 101 verschiedene Zahlen beliebig ausgewählt.
Beweise, dass bei jeder solchen Auswahl unter den ausgewählten Zahlen mindestens zwei existieren, so dass die eine Zahl ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist !

4) Beweise, dass man aus 1000 beliebigen ganzen Zahlen stets solche Zahlen auswählen kann, deren Summe durch 1000 teilbar ist !

5) In einem Quadrat der Seitenlänge 1 mögen sich 51 Punkte befinden.
Beweise, dass es zu jeder Anordnung solcher 51 Punkte stets einen Kreis mit dem Radius 1/7 gibt, der mindestens drei dieser Punkte in seinem Inneren enthält !

7) In einer Ebene sei eine Menge von endlich vielen Punkten, die nicht alle auf ein und derselben Geraden liegen, so gegeben, dass der Flächeninhalt jedes Dreiecks, das drei dieser Punkte als Eckpunkte hat, nicht größer als 1 ist.
Beweise, dass für jede derartige Menge eine Dreiecksfläche existiert, deren Flächeninhalt nicht größer als 4 ist und die die gegebene Menge enthält !

8) Ist es möglich, auf folgende Weise aus 7 Papierstücken genau 1994 Papierstücke herzustellen ?
Man teile einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, danach wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, usw.

9) Gegeben seien 6 Punkte. Je drei dieser Punkte sollen ein Dreieck bilden. Die Seiten dieser Dreiecke sollen entweder rot oder grün gefärbt werden.
Kann man vermeiden, dass eines dieser Dreiecke nur gleichfarbige Seiten hat ?

Geometrie

Planimetrie

1) Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ und $\overline{AB} = c$ gegeben. Der Inkreis dieses Dreiecks berühre die Seite $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$ im Punkt D , E bzw. F .
Berechne die Längen der Seitenabschnitte $\overline{BD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EA}$, $\overline{AF}$ und $\overline{FB}$ in Abhängigkeit von a , b und c !

2) Gegeben sei die Kathetenlänge $\overline{BC} = a$ eines bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC , für das $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$ gilt. Ferner schneide die Halbierende des rechten Winkels den Umkreis dieses Dreiecks im Punkt D .
Berechne die Länge der Sehne $\overline{CD}$ in Abhängigkeit von a !

3) Aus der Figur zum Lehrsatz des Pythagoras erzeuge man durch Verbinden der äußeren Eckpunkte ein Sechseck.
Berechne den Flächeninhalt dieses Sechsecks in Abhängigkeit von den Kathetenlängen des Ausgangsdreiecks !

4) Gegeben sei ein konvexes Viereck ABCD , bei dem sich die Verlängerungen der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ unter einem rechten Winkel schneiden. Seien E bzw. F die Mittelpunkte der Diagonalen $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BD}$ und gelte $\overline{AB} = a$ sowie $\overline{CD} = c$.
a) Beweise, dass dann stets $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2$ gilt !
b) Berechne die Länge der Strecke $\overline{EF}$ in Abhängigkeit von a und c !

5) Gegeben seien zwei konzentrische Kreise $k_1(M;r_1)$ und $k_2(M;r_2)$ mit $r_1 < r_2$. Sei $\overline{AB}$ ein Durchmesser des Kreises k_1 und P ein Punkt des Kreises k_2 .
a) Beweise, dass dann stets $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = c$ gilt, wobei c eine Konstante ist !
b) Berechne c in Abhängigkeit von r_1 und r_2 !

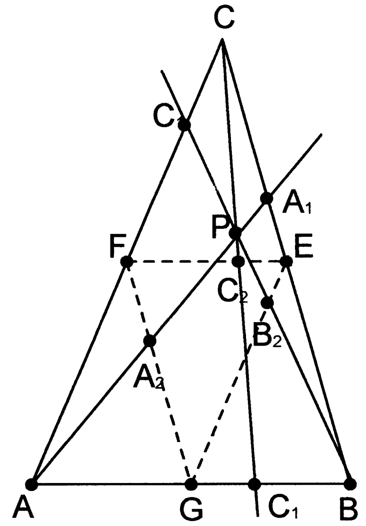
6) Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB} = c$, der Höhe $\overline{CH} = h$, der Seitenhalbierenden $\overline{CS} = s$ und der Winkelhalbierenden $\overline{CW} = w$.
a) Beweise, dass $\overline{CW}$ auch Winkelhalbierende des Dreiecks SHC ist !
b) Berechne w in Abhängigkeit von s und h !

7) Wiederhole in der Aufgabensammlung für Klasse 9 auf S.21-22 die Sätze des Menelaos und Ceva sowie deren Umkehrungen !

8) Der Inkreis eines Dreiecks ABC berühre dessen Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ in den Punkten D, E , F .
Beweise, dass sich unter diesen Voraussetzungen die Ecktransversalen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ in einem Punkt schneiden !

9) Beweise folgenden Satz:
Wenn ABCD ein Drachenviereck mit $\overline{AB} = \overline{AD} = a$, $\overline{BC} = \overline{DC} = b$ und dem Inkreismittelpunkt M ist, dann gilt stets
$$\frac{a}{b} = \frac{AM \cdot BM}{CM \cdot DM} .$$

10) Die Ecktransversalen $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ eines Dreiecks ABC mögen die Seiten des zugehörigen Seitenmittelpunktdreiecks EFG in den Punkten A_2 , B_2 , C_2 schneiden (vgl. Figur) .

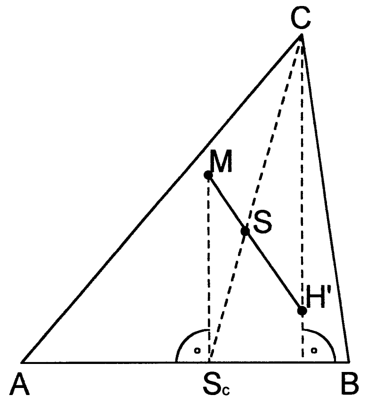


Beweise, dass dann folgender Satz gilt:

Wenn sich die Ecktransversalen $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ in einem Punkt schneiden, dann trifft dies auch für die Ecktransversalen $\overrightarrow{EE_1}$, $\overrightarrow{FB_2}$, $\overrightarrow{GC_2}$ zu .

11) Sei $k(M;r_1)$ der Umkreis sowie $k(N;r_2)$ der Inkreis eines gleichschenkligen Dreiecks mit $\overline{AC} = \overline{BC}$.
Beweise, dass dann stets $\overline{MN} = \sqrt{r_1(r_1 - 2r_2)}$ gilt !

Sei M der Umkreismittelpunkt und S der Schwerpunkt eines (nicht gleichseitigen) Dreiecks ABC . Sei H' derjenige Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{MS}$, für den
$\overline{MS} : \overline{SH_1} = 1 : 2$ gilt.

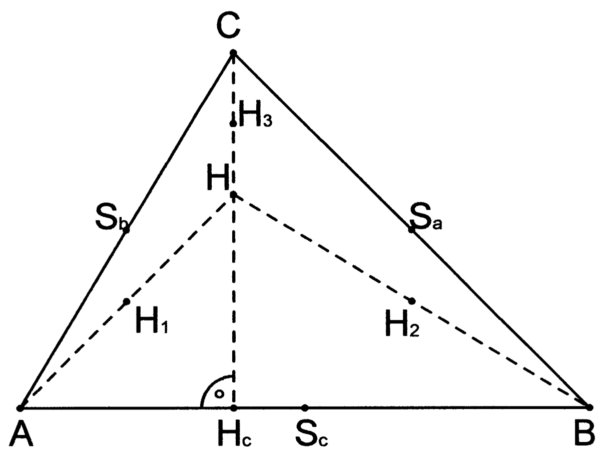


a) Beweise, dass dann H' stets auf der Höhe $\overline{CH_c}$ dieses Dreiecks liegt !

b) Beweise, dass H' der Höhenschnittpunkt H dieses Dreiecks ist !

13) Beweise folgenden *Satz über die Eulersche Gerade* (Euler: 1707 - 1783) :
In jedem (nicht gleichseitigen) Dreieck liegt der Höhenschnittpunkt H auf der durch den Umkreismittelpunkt M und den Schwerpunkt S festgelegten Geraden (die Eulersche Gerade heißt).
Dabei gilt stets $\overline{MS} : \overline{SH} = 1 : 2$.

14) Seien S_a , S_b , S_c die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ eines Dreiecks ABC mit dem Höhenschnittpunkt H und den Höhenfußpunkten H_a , H_b , H_c . Seien H_1 , H_2, H_3 die Mittelpunkte der Höhenabschnitte $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$.

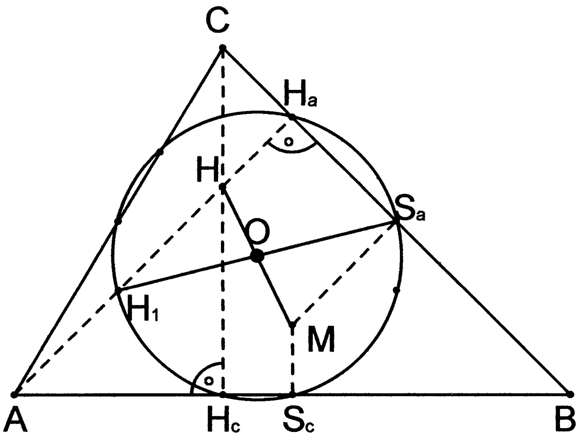


a) Beweise, dass die Punkte H_1 , H_2 , S_a, S_b auf einem Kreis $k(O;r)$ liegen !

b) Beweise, dass die Punkte H_3 , S_c ebenfalls auf diesem Kreis $k(O;r)$ liegen !

c) Beweise, dass H_a (und analog auch H_b , H_c) ebenfalls auf diesem Kreis $k(O;r)$ liegt !

d) Beweise, dass der Mittelpunkt O dieses Kreises auf der Eulerschen Geraden liegt und die Strecke $\overline{HM}$ halbiert !



Damit ist folgender *Satz über den Feuerbachschen Kreis* bewiesen:
Die drei Seitenmittelpunkte, die drei Höhenfußpunkte und die drei Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte eines Dreiecks liegen stets auf einem Kreis.

Der Mittelpunkt O dieses Kreises liegt auf der Eulerschen Geraden und halbiert die Strecke $\overline{HM}$, wobei H der Höhenschnittpunkt und M der Umkreismittelpunkt dieses Dreiecks ist.

e) Untersuche, wie viel dieser neun Punkte auf dem Feuerbachkreis zusammenfallen, wenn das Dreieck rechtwinklig, gleichschenklig oder gleichseitig ist !

15) Wiederhole aus den "Aufgabensammlungen für Arbeitsgemeinschaften" :
Klasse 7 , S.27-28 : "Musterlösung für eine Konstruktionsaufgabe" ;
Klasse 8 , S.23-24 : "Das Lösen von Bestimmungsaufgaben" ;
Klasse 9 , S.30-31 : "Die algebraische Methode zum Lösen von Konstruktionsaufgaben".

16) Zwei zueinander senkrechte Geraden g_1 und g_2 mögen einander im Punkt O schneiden.
Ermittle den geometrischen Ort der Schwerpunkte aller Dreiecke OXY , die folgende Bedingungen erfüllen:

$$X \in g_1 \quad \text{und} \quad Y \in g_2 \quad \text{und} \quad \overline{XY} = 6 \ .$$

17) Zu konstruieren sind alle (untereinander nicht kongruenten) Vierecke ABCD , die folgende Bedingungen erfüllen :

(a) ABCD ist ein Trapez mit $AB \| CD$ mit $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{S\}$;
(b) $\overline{AB} + \overline{CD} = s = 12\text{cm}$;
(c) $\overline{AC} + \overline{BD} = d = 15\text{cm}$;
(d) $\angle ASB = \varphi = 100°$:
(e) $\angle CAD = \varepsilon = 70°$.

18) Zu konstruieren sind alle (untereinander nicht kongruenten) Vierecke ABCD , die folgende Bedingungen erfüllen :

(a) ABCD ist ein Drachenviereck mit $\overline{AD} = \overline{CD}$ und $\overline{AB} = \overline{CB}$;
(b) $\overline{AB} + \overline{AD} = s$;
(c) $\overline{BD} = f$;
(d) $\angle CBA + \angle ADC = \varphi$.

19) Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB} = s$ sowie eine Zahl $p>0$.
Zu konstruieren sind alle Punkte X , die folgende Bedingungen erfüllen :

(a) $X \in \overline{AB}$;
(b) $\overline{AX} + \overline{XB} = s$;
(c) $\overline{AX} \cdot \overline{XB} = p$.

Stereometrie

20) Wiederhole aus der "Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 9" auf S.31-33 den Abschnitt "Einige Begriffe und Sätze aus der Stereometrie" !

21) Ein gerades Prisma und eine gerade Pyramide sollen als gemeinsame Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a haben. Die Spitze der Pyramide liege in der Deckfläche des Prismas, und die gemeinsame Höhenlänge sei h .
Berechne h in Abhängigkeit von a für den Fall, dass der Mantel des Prismas den gleichen Flächeninhalt hat wie der Mantel der Pyramide !

22) Gegeben sei eine vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ und der Spitze S .
Alle acht Kanten sollen die gleiche Länge a besitzen. Ferner seien E und F die Mittelpunkte der Kanten $\overline{SB}$ bzw. $\overline{SC}$.
Beweise, dass dann die Punkte A , E , F und D in einer Ebene liegen, die die Pyramide in zwei Teilkörper zerlegt !
Ermittle das Verhältnis der Volumina dieser Teilkörper !

23) Gegeben sei ein gerader Kreiskegelstumpf, dessen Mantellinien um $60°$ gegen die Grundfläche geneigt sind. Für die Flächeninhalte von Grund- und Deckfläche gelte $A_g = 4A_d$. Zwischen einem Randpunkt P der Grundfläche und einem Randpunkt Q der Deckfläche sei ein Gummifaden straff gespannt und dieser Gummifaden möge die Mantelfläche nirgends verlassen.
Berechne die maximale Länge $\max\{PQ\}$ eines solchen Gummifadens in Abhängigkeit vom Radius r_g der Grundfläche des Kegelstumpfes !

24) Gegeben sei ein gerader Kreiskegelkörper mit dem Grundkreisradius R und der Höhenlänge h . Dieser Kegel sei zylindrisch so durchbohrt, dass seine Achse mit der Achse des Bohrlochs zusammenfällt.
Der Radius r des Bohrlochs soll so gewählt werden, dass das Volumen des Restkörpers halb so groß ist wie das Volumen des Kegels.
Berechne r in Abhängigkeit von R !

25) Von einem Würfel und einem regulären Oktaeder sei vorausgesetzt, dass die Umkugeln dieser beiden Körper denselben Radius r besitzen. Sei r_1 der Radius der Inkugel des Würfels und sei r_2 der Radius der Inkugel des Oktaeders.
Berechne das Verhältnis $r_1 : r_2$!

26) Bei zentrisch zylindrischer Durchbohrung einer Kugel mit dem Radius R verbleibt ein ringförmiger Restkörper mit dem Volumen V_R , dessen Höhe gleich der Länge l der zylindrischen Bohrung ist. Sei V_K das Volumen einer Kugel mit dem Durchmesser d .
Ermittle das Verhältnis $V_K : V_R$ für den Fall, dass $l = d$ gewählt wird !

27) Die Breiten des nördlichen Polarkreises und des nördlichen Wendekreises der Erde sind $\alpha = 66°33'$ und $\beta = 23°27'$ nördlicher Breite.
Berechne den Abstand h der zugehörigen beiden Breitenkreisebenen in Abhängigkeit von den Radien r_1 und r_2 der zugehörigen Breitenkreise. (Dabei wird vereinfachend angenommen, dass die Erde eine Kugel sei .)

28) In eine Hohlkugel mit dem inneren Durchmesser $D = 2R$ sollen:

a) 6 kleinere, gleich große Kugeln so eingelagert werden, dass jede von ihnen die Hohlkugel von innen und vier der kleineren Kugeln berührt ;

b) 8 kleinere, gleich große Kugeln so eingelagert werden, dass jede von ihnen die Hohlkugel von innen und drei der kleineren Kugeln berührt ;

c) 4 kleinere, gleich große Kugeln so eingelagert werden, dass jede von ihnen die Hohlkugel von innen und jede Kugel jede andere berührt.

Berechne für jeden dieser drei Fälle den Durchmesser $d = 2r$ der kleineren Kugeln in Abhängigkeit von D !

29) Gegeben sei ein regelmäßiges Fünfeck $M_1M_2M_3M_4M_5$ mit der Seitenlänge s . Wir betrachten (für $i = 1, 2, 3, 4, 5$) die fünf Kugeln K_i mit den Mittelpunkten M_i und dem gemeinsamen Radius $0{,}5s$. Dann gibt es genau zwei Kugeln K_6 und K_7 , die jede der fünf Kugeln K_i berühren und ebenfalls den Radius $0{,}5s$ besitzen.
Untersuche, ob K_6 und K_7 einander schneiden, einander berühren oder einander meiden !

M E R K S T O F F

1. GLEICHUNGEN , UNGLEICHUNGEN UND FUNKTIONEN

1.1. Funktionen und ihre Graphen

- Funktionen
  - algebraische Funktionen
    - rationale Funktionen
      - ganze rationale Funkt. → Potenzfunkt. $y = x^n$, $n \in N$; lineare Funktionen; quadratische Funktionen; Funktionen n-ten Grades
      - gebrochen rationale F. → $y = x^{-n}$, $x \in N$; linear gebr. F.
    - irrationale Funkt. → $y = x^r$, $r \in Q$; Wurzelfunktionen
  - transzendente Funkt. → Exponentialfunkt.; Logarithmusfunkt.; trigonometrische F.

Eine durch die Funktionsgleichung $y = f(x)$, $x \in R$ dargestellte Funktion heißt *algebraisch* genau dann, wenn in $f(x)$ nur algebraische Operationszeichen (für Grundrechenoperationen, Potenzieren oder Radizieren) vorkommen.

ganze rationale Funktion n-ten Grades: $y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit $a_n \neq 0$

Lösungsmenge: $L \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$;

Vietascher Wurzelsatz für $a_n = 1$: $a_0 = (-1)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$;

$a_{n-1} = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$;

$a_{n-2} = +(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n)$.

den.

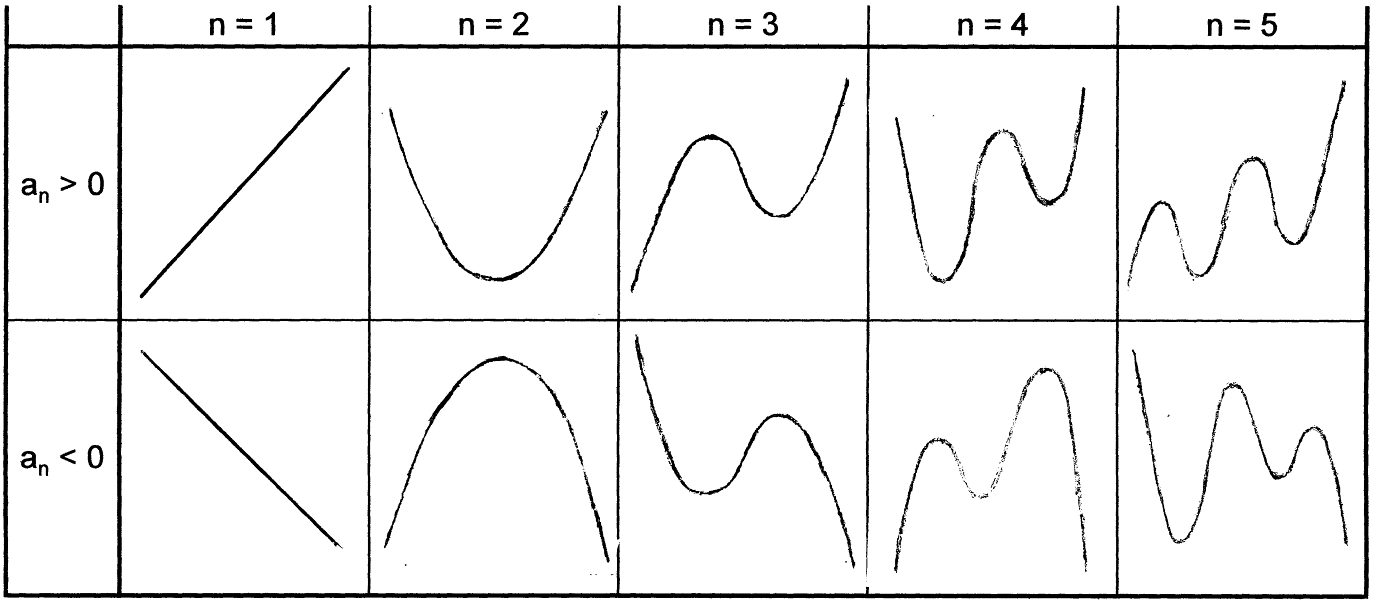
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ bedeutet, dass diese beiden Pfeile denselben Vektor repräsentieren bzw. dass die zugehörigen Vektoren gleich sind.

Erweiterungen des Potenzbegriffs		$a^b = c$	$a,b,c \in R$, $a,b,c>0$, $a \neq 1$
gegeben: gesucht:	a , b c	b , c a	a , c b
Operationen	Potenzieren $c = a^b$	Radizieren $a = \sqrt[b]{c}$	Logarithmieren $b = \log_a c$
Funktionen	Potenzfunktion $y = x^n$ Exponentialfunkt. $y = a^x$	Wurzelfunktion $y = \sqrt[n]{x}$	Logarithmusf. $y = \log_a x$

Als *Graph einer Gleichung* $F(x;y) = 0$ bezeichnet man die Menge aller Punkte P , deren Koordinaten (x;y) diese Gleichung erfüllen.

Als *Graph einer Funktion* f bezeichnet man den Graphen der zugehörigen Funktionsgleichung $y = f(x)$, $x \in X$.

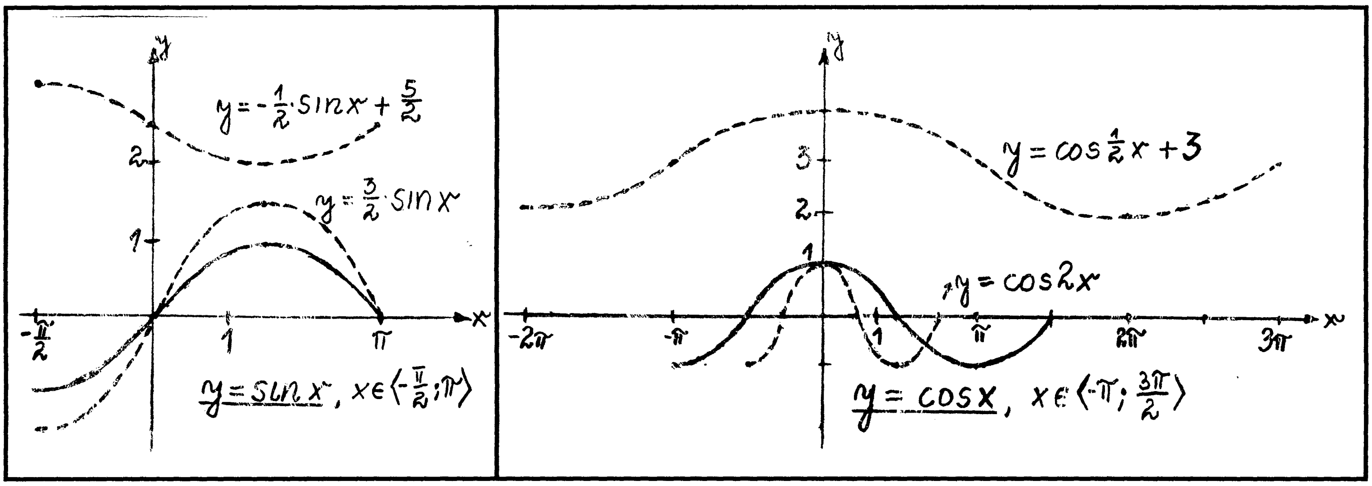
Graphen von ganzen rationalen Funktionen n-ten Grades



1.2. Transformation von Funktionsgraphen

Gegeben sei der Graph einer Funktion $y = f(x)$, $x \in X$; a, b, c, d seien positive reelle Zahlen.

Man erhält das Bild von	aus dem Bild von $y = f(x)$ durch
$y = f(-x)$	Spiegelung an der y-Achse
$y = -f(x)$	Spiegelung an der x-Achse
$y = f(x - a)$	Verschiebung um a Einheiten in Richtung der positiven x-Achse
$y = f(x) + b$	Verschiebung um b Einheiten in Richtung der positiven y-Achse
$y = f(c \cdot x)$	Dehnung (für $0<c<1$) bzw. Stauchung (für $c>1$) in Richtung der x-Achse im Verhältnis 1:



1.3. Einige Eigenschaften von Funktionen

f ist *gerade* $\Leftrightarrow_{Df}$ Stets gilt $f(-x) = f(x)$.
f ist *ungerade* $\Leftrightarrow_{Df}$ Stets gilt $f(-x) = - f(x)$.
f ist *periodisch* $\Leftrightarrow_{Df}$ Es gibt ein t (>0) , so dass stets gilt: $f(x+t) = f(x)$;
(das kleinstmögliche t nennt man dann "die" Periode von f).
f *wächst* (streng) *monoton* $\Leftrightarrow_{Df}$ Stets gilt: Wenn $x_1 < x_2$, dann $f(x_1) < f(x_2)$.
f *fällt* (streng) *monoton* $\Leftrightarrow_{Df}$ Stets gilt: Wenn $x_1 < x_2$, dann $f(x_1) > f(x_2)$.
f ist *nach oben beschränkt* $\Leftrightarrow_{Df}$ Es gibt eine Zahl M , so dass stets $f(x) \leq M$.
f ist *nach unten beschränkt* $\Leftrightarrow_{Df}$ Es gibt eine Zahl m , so dass stets $f(x) \geq m$.
f besitzt eine *Nullstelle* x_0 $\Leftrightarrow_{Df}$ Es gilt $f(x_0) = 0$.

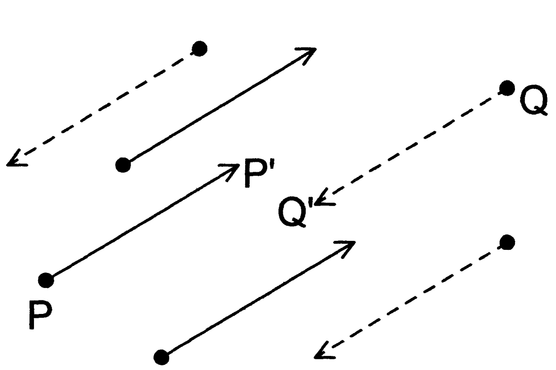
2. V e k t o r e n

2.1. Pfeile und Vektoren ; das Rechnen mit Vektoren

Jede *Verschiebung* $V(\overrightarrow{PP'})$ kann durch irgendeinen ihrer Verschiebungspfeile $\overrightarrow{PP'}$ angegeben werden. Alle gleich langen, parallelen und gleich gerichteten Pfeile legen dieselbe Verschiebung fest.

$V(\overrightarrow{PP'}) \leftrightarrow \vec{a}$; $V(\overrightarrow{QQ'}) \leftrightarrow \vec{b}$; $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

Vektor $\vec{a}$ $=_{Df}$ Menge aller Pfeile $\overrightarrow{PP'}$, die gleich lang, parallel und gleich gerichtet sind. (Jeder dieser Pfeile heißt ein Repräsentant dieses Vektors.)



$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ bedeute, dass $\overrightarrow{PP'}$ ein Repräsentant von $\vec{a}$ ist. Es ist jedoch auch üblich, $\overrightarrow{PP'}$ als Bezeichnung für diesen Vektor zu verwenden.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ bedeutet, dass diese beiden Pfeile denselben Vektor repräsentieren bzw. dass die zugehörigen Vektoren gleich sind.

Satz 1: Jeder Verschiebung $V(\overrightarrow{PP'})$ ist eineindeutig ein Vektor zugeordnet.

$|\vec{a}|$ $=_{Df}$ *Betrag des Vektors* $\vec{a}$ *;* Länge der zu $\vec{a}$ gehörenden Pfeile .

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ $=_{Df}$ $\vec{a}$ ist *gleich gerichtet* mit $\vec{b}$.

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ $=_{Df}$ $\vec{a}$ ist *entgegengesetzt gerichtet* mit $\vec{b}$.

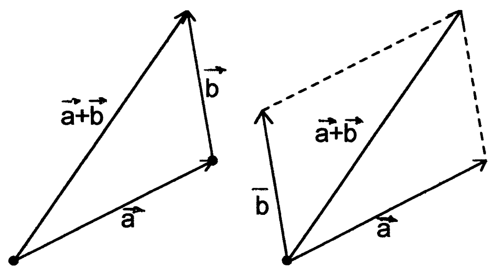
$-\vec{a}$ $=_{Df}$ der zu $\vec{a}$ *entgegengesetzte Vektor* (der sich von $\vec{a}$ nur durch den Richtungssinn unterscheidet) .

Satz : Stets gilt $\vec{a} \parallel \vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ oder ....

Satz : Stets gilt $\vec{a} = -\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ und ....

Addition und Subtraktion von Vektoren:

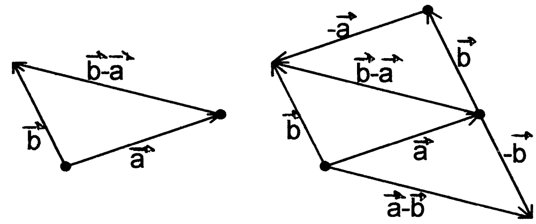
Seien $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ die den Verschiebungen $V(\overrightarrow{PQ})$ bzw. $V(\overrightarrow{QR})$ zugeordneten Vektoren. Dann nennt man den der Verschiebung $V(\overrightarrow{PR})$ zugeordnete Vektor $\vec{c}$ die *Summe* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und schreibt $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.



$\vec{a} + (-\vec{a})$ $=_{Df}$ $\vec{o}$ *(Nullvektor) .*

Satz 2 : Es gilt $|\vec{o}| = 0$ und $\vec{o} = -\vec{o}$.

Satz 3 : Die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ besitzt stets genau eine Lösung, nämlich $\vec{x} = \vec{b} + (-\vec{a})$.



$\vec{b} - \vec{a}$ $=_{Df}$ $\vec{b} + (-\vec{a})$ *Differenz* von $\vec{b}$ und $\vec{a}$.

Hinweis : Die so definierte Addition und Subtraktion von Vektoren besitzt die gleichen Eigenschaften wie die Addition und Subtraktion von Zahlen und gilt analog für Vektoren im Raum.

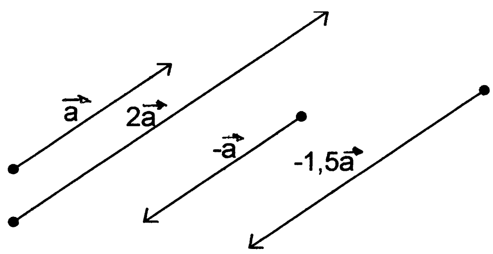
Multiplikation von Vektoren mit einer reellen Zahl

Def. : $\vec{b}$ heißt das *Produkt von* $\vec{a}$ *mit der reellen Zahl* r genau dann, wenn gilt :

(1) $|\vec{b}| = |r| \cdot |\vec{a}|$;

(2) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ für $r > 0$; $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ für $r < 0$;

$\vec{b} = \vec{o}$ für $r = 0$.



(Diese Multiplikation kann geometrisch als eine "Streckung" der zugehörigen Pfeile gedeutet werden.)

Satz 4: Für $r \neq 0$ gilt : $r \cdot \vec{x} = \vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{x} = \frac{1}{r} \cdot \vec{b}$.

(Hinweis: Die Gleichung $x \cdot \vec{a} = \vec{b}$ lässt sich im allgemeinen nicht nach der reellen Zahl x auflösen; eine Division eines Vektors durch einen Vektor ist nicht erklärt.)

Satz 5: Für $\vec{a} \neq \vec{o}$, $\vec{b} \neq \vec{o}$, $r \neq 0$ gilt : $\vec{a} = r \cdot \vec{b}$ genau dann, wenn $\vec{a} \parallel \vec{b}$;

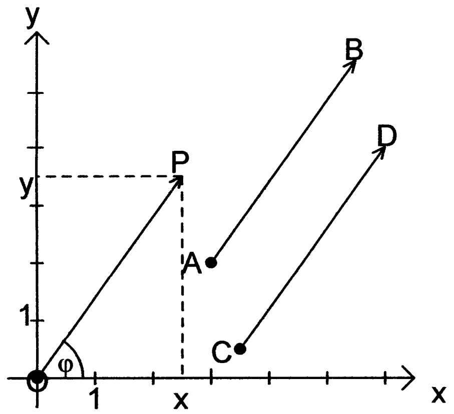
Wenn $\vec{a} = r \cdot \vec{b}$, dann $|\vec{a}| = |r| \cdot |\vec{b}|$.

2.2. Punkte und Vektoren im Koordinatensystem

Jedem Punkt P lässt sich eineindeutig ein geordnetes Paar (x;y) reeller Zahlen zuordnen.

Jeder (vom Nullvektor verschiedene) Vektor lässt sich eindeutig durch seinen *Betrag* $|\vec{p}|$ und den orientierten *Richtungswinkel* φ festhalten.
Dabei wird $0° \leq \varphi < 360°$ oder $-180° < \varphi \leq 180°$ gewählt.

(Jeder Vektor ist eine unendliche Menge äquivalenter Pfeile; jeder solche Pfeil ist ein Repräsentant des zugehörigen Vektors. Ein besonders bedeutsamer Repräsentant ist der "Ortspfeil" $\overrightarrow{OP}$.)



$\overrightarrow{OP} = \vec{p} = (x;y) = [|\vec{p}|;\varphi]$

$|\vec{p}|$ = ...; .... = $\frac{y}{x}$

x = ...; y = ...

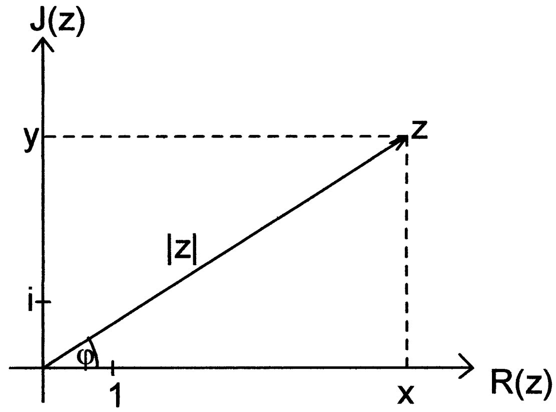
Liegt P auf der x-Achse, dann gilt speziell:

$\overrightarrow{OP} = \vec{p} = (x;0)$ sowie $\vec{p} = [|\vec{p}|;\ 0°]$ für $x > 0$ bzw.
$\vec{p} = [|\vec{p}|;\ 180°]$ für $x < 0$.

3. Komplexe Zahlen

Einige Definitionen :

D(1) $z =_{Df} (x\,;\,y) =_{Df} [|z|;\ \varphi]$ mit $x,y \in R$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0° \leq \varphi < 360°$ oder $-180° < \varphi \leq 180°$.
x heißt der Realteil, y heißt der Imaginärteil, |z| heißt der Betrag und φ heißt das Argument der komplexen Zahl z .



D(2) $x =_{Df} (x\,;\,0) =_{Df} [|x|\,;\,0°]$ für $x > 0$;
$x =_{Df} (x\,;\,0) =_{Df} [|x|\,;\,180°]$ für $x < 0$;
$x =_{Df} (0\,;\,0) =_{Df} [0\,;\,0°]$ für $x = 0$.

D(3a) $z_1 = z_2 \ \Leftrightarrow_{Df}\ x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$.
(Zwei komplexe Zahlen heißen genau dann gleich, wenn sie in Realteil und Imaginärteil übereinstimmen.)

D(3b) $z_1 = z_2 \ \Leftrightarrow_{Df}\ |z_1| = |z_2|$ und $\varphi_1 = \varphi_2 + k \cdot 360°$, $k \in Z$.

D(4) $z_1 + z_2 = (x_1\,;\,y_1) + (x_2\,;\,y_2) =_{Df} (x_1+x_2\,;\,y_1+y_2)$.
(Komplexe Zahlen werden addiert, indem man ihre Realteile und ihre Imaginärteile addiert.
Der Addition komplexer Zahlen entspricht die Addition der zugehörigen Vektoren.)

D(5) $z_1 \cdot z_2 = [|z_1| ; \varphi_1] \cdot [|z_2| ; \varphi_2] =_{Df} [|z_1| \cdot |z_2| ; \varphi_1 + \varphi_2]$.
(Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert.
Dieser Multiplikation entspricht eine "Drehstreckung" bei den zugehörigen Vektoren.)

D(6) $-z =_{Df} (-x ; -y) = [|z| ; \varphi + 180°]$.
(Überzeuge dich, dass dann $z + (-z) = z - z = (0 ; 0)$ gilt .)

D(7) $\frac{1}{z} =_{Df} [\frac{1}{|z|} ; -\varphi]$ für $z \neq (0;0)$.
(Überzeuge dich, dass dann $z \cdot \frac{1}{z} = (1;0) = 1$ gilt.)

D(8) $z =_{Df} (x ; -y)$ heißt die zu z konjugiert komplexe Zahl .

Es ist nachzuweisen, dass die so definierte Addition bzw. Multiplikation komplexer Zahlen dieselben Eigenschaften besitzt wie die Addition bzw. Multiplikation reeller Zahlen.

Eigenschaft	der Addition	der Multiplikation
Eindeutige Existenz von	$a + b$	$a \cdot b$
Assoziativgesetz	$a + (b+c) = (a+b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Eindeutige Lösbarkeit der Gleichung	$a + x = b$	$a \cdot x = b$, $a \neq 0$
Kommutativgesetz	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Distributivgesetz	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Ferner ist nachzuweisen, dass bei dem durch D(2) festgelegten Übergang zu den reellen Zahlen die so definierten Rechenoperationen mit der Addition bzw. Multiplikation reeller Zahlen übereinstimmen.

D(9) $i =_{Df} (0 ; 1) = [1 ; 90°]$.
(Überzeuge dich, dass die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit der imaginären Einheit i die Drehung des zu z gehörenden Pfeils OP um den Punkt O um 90° bewirkt.)

Einige Sätze :

S(1) $i^2 = (-1 ; 0) = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; $i^{4n+k} = i^k$.

S(2) Im Unterschied zu den reellen Zahlen lässt sich die Menge der komplexen Zahlen nicht ordnen. So führt etwa sowohl die Annahme $0 < i$ als auch die Annahme $0 > i$ zu einem Widerspruch .

S(3) $(0 ; y) = i \cdot y$.

S(4) $z = (x ; y) = x + i \cdot y$; Summendarstellung einer komplexen Zahl.

S(5) $z = [|z| ; \varphi] = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$; trigonometrische Darstellung einer komplexen Zahl.

S(6) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 ; y_1) \cdot (x_2 ; y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2 ; x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

S(6a) $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$.
(Das Produkt aus einer komplexen Zahl und der zu ihr konjugiert komplexen Zahl ist stets eine reelle Zahl.)

S(7) $z^n = |z^n| \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin\varphi)$; $n \in N$.
(Eine komplexe Zahl wird mit n potenziert, indem man ihren Betrag mit n potenziert und ihr Argument mit n multipliziert.)

S(8) Die Gleichung $z^n = 1$ heißt *"Kreisteilungsgleichung"* und besitzt genau n komplexe Lösungen, die man *n-te Einheitswurzeln* nennt. Die zugehörigen Punkte liegen auf dem Einheitskreis und bilden die Eckpunkte eines regulären n-Ecks.

S(9) Die Gleichung $z^n = a$ mit $a = (x_0 ; y_0) \neq 0$ besitzt stets genau n verschiedene Lösungen $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$.

Fundamentalsatz der Algebra:
Jede algebraische Gleichung n-ten Grades

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten a_i besitzt genau n reelle oder komplexe Lösungen, wobei k-fache Lösungen k-fach gezählt werden.

Folgerung:
Im Komplexen lässt sich jedes Polynom n-ten Grades in n Linearfaktoren zerlegen:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}z + a_n = (z - z_1)\cdot(z - z_2)\cdot \ldots \cdot(z - z_n) .$$

Die z_k (mit $k = 1, 2, \ldots, n$) heißen *Nullstellen* des Polynoms; diese Nullstellen müssen nicht sämtlich voneinander verschieden sein.

4. Trigonometrie

4.1. Einige goniometrische Formeln

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

(2) $\tan x \cdot \cot x = 1$;

Additionstheoreme:

(3) $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$;

(3a) $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$;

(4) $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$;

(4a) $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$;

(5) $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$;

(5a) $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$;

Theoreme über Summen trigonometrischer Funktionen:

(6a) $\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos y$;

(6b) $\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \cdot \cos x \cdot \sin y$

(6c) $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cdot \cos x \cdot \cos y$;

(6d) $\cos(x+y) - \cos(x - y) = -2 \cdot \sin x \cdot \sin y$;

(7) $\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin\frac{x + y}{2} \cdot \cos\frac{x - y}{2}$;

(7a) $\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos\frac{x + y}{2} \cdot \sin\frac{x - y}{2}$;

(7b) $\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos\frac{x + y}{2} \cdot \cos\frac{x - y}{2}$;

(7c) $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin\frac{x + y}{2} \cdot \sin\frac{x - y}{2}$;

Theoreme für mehrfache Winkel:

(8) $\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$;

(8a) $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$;

(9) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

(9a) $\cos 2x = 1 - 2\cdot\sin^2 x$;

(9b) $\cos 2x = 2\cdot\cos^2 x - 1$;

(9c) $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$;

(10) $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$;

(10a) $\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$;

(11a) $\sin 3x = 3\cdot\sin x - 4\cdot\sin^3 x$;

(11b) $\cos 3x = 4\cdot\cos^3 x - 3\cdot\cos x$;

Theoreme für halbe Winkel

(12a) $|\cos\frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$;

(12b) $|\sin\frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$.

Hinweis: (3) und (4) lässt sich aus Rechengesetzen für komplexe Zahlen herleiten, desgleichen (8), (9), (11a) und (11b) sowie weitere Formeln für mehrfache Winkel. (6a) bis (6d) liefert gleichzeitig Theoreme für Produkte zweier trigonometrischer Funktionen.
Mit Hilfe von (8) und (9) gelingt es auch, $\sin x$ und $\cos x$ durch Funktionen des halben Winkels auszudrücken.

4.2. Einige trigonometrische Sätze

Sei ABC ein Dreieck mit den Seitenlängen $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, dem Umkreisradius R, dem Inkreisradius r , dem Umfang u und dem Inhalt J .
Ferner sei $p = \frac{1}{2}\cdot u = \frac{1}{2}\cdot(a+b+c)$. Dann gilt für jedes Dreieck ABC :

(13) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$; (verallgemeinerter Sinussatz)

(14) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$; (Kosinussatz)

(15a) $\frac{a + b}{a - b} = \frac{\tan\frac{\alpha + \beta}{2}}{\tan\frac{\alpha - \beta}{2}}$; (Tangenssatz)

(15b) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p - a} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}}$,

(15c) $r = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}}$;

(16) $J(ABC) = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma = 2R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma = r\cdot p = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.