## Aufgabe 450936 (36%)

Gegeben sei ein Dreieck *ABC*. Außerdem seien *P* ein innerer Punkt der Strecke $\overline{AB}$, *U* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ und *V* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$. Der Bildpunkt von *P* bei der Spiegelung an *U* sei *Q* und *R* wiederum sei der Bildpunkt von *P* bei der Spiegelung an *V*. *M* sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QR}$. Die Gerade *PM* zerlegt also das Dreieck *PRQ* in zwei Teile gleichen Flächeninhalts.

Wie muss *P* auf der Strecke $\overline{AB}$ liegen, damit die Gerade *PM* auch das Dreieck *ABC* in zwei Teile gleichen Flächeninhalts zerlegt?

***Hinweise zur Lösungsfindung bei 450936 :***

- Betrachte *Spezialfälle* und *Grenzfälle*, um zu einer *Vermutung* zu kommen.
  [Wenn *P* im Mittelpunkt *N* der Seite $\overline{AB}$ liegt, dann gilt $M = C$, $\overline{PM}$ wird Seitenhalbierende des Dreiecks *ABC* und teilt dieses Dreieck in zwei inhaltsgleiche Teile. Diese Vermutung lässt sich leicht beweisen. Ferner erkennt man, dass für $P$ zwischen *A* und $N$ der „linke" Flächenteil kleiner wird.]

Der Formulierung „Wie *muss P* auf der Strecke $\overline{AB}$ liegen, ..." ist zu entnehmen, dass auch die *Umkehrung* des oben genannten Satzes bewiesen werden muss, worin die Schwierigkeit dieser Aufgabe liegt. Abweichend von der Musterlösung kann man auch wie folgt vorgehen:

- *Günstige Bezeichnungen* einführen!
  [$\overline{PM}$ schneide $\overline{NC}$ in O und $\overline{BC}$ in $S$.]
- *Vergleiche* die Inhalte der Teilflächen $APSC$ und $PBS$, wenn $P$ zwischen $A$ und $N$ liegt.
  [Man kann zeigen, dass die Dreiecke *PSO* und *MCO* kongruent sind, dass daher das Dreieck *OSC* einen kleineren Inhalt hat als das Dreieck *PSO* und dass daher die Teilfläche $APSC$ einen kleineren Inhalt hat als die Teilfläche $PBS$.]



***Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung***
***mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler***

**www.bezirkskomitee.de**

# Trainingsaufgaben für die Mathematik-Olympiade

**für individuell betreute Schüler der Klassenstufe 8 zur Vorbereitung auf eine erfolgreiche Teilnahme an der 2./3. Stufe der 52. MO in der Olympiadeklasse 9**

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

du gehörst zu den erfolgreichsten Startern bei der 3. Stufe der MO in der Olympiadeklasse 8. Daher erhältst du eine Auswahl von Aufgaben, die in den vergangenen Jahren in der Mathematik-Olympiade der Klassenstufe 9 gestellt wurden. Wenn du dich mit diesen Aufgaben beschäftigst, steigen deine Chancen, durch ein gutes Abschneiden bei der 2. Stufe der diesjährigen Olympiade die Qualifikation zur 3. Stufe zu schaffen.

Die beiliegenden Aufgaben sind in vier Gruppen eingeteilt (Logik/Kombinatorik, Arithmetik, Zahlentheorie, Geometrie). Die jeweils hinter der Aufgabennummer angegebene Prozentzahl zeigt an, welcher Anteil der insgesamt bei dieser Aufgabe erreichbaren Punkte von den Startern des jeweiligen Olympiadejahrgangs im Regierungsbezirk Chemnitz tatsächlich erreicht wurde.

**Empfehlungen für ein erfolgreiches Training:**

Teile dir die Arbeit in Etappen ein und wähle für jede Etappe Aufgaben aus allen vier Themengebieten aus. Lasse dich dabei von deinem Betreuer beraten.

Dein Betreuer erhält neben den Aufgaben auch die Lösungen. Nach dem Besprechen einer Aufgabe wird er dir eine Kopie der zugehörigen Lösung geben. Er wird dir mitteilen, zu welchen Aufgaben du eine schriftliche Lösung anfertigen sollst, damit er erkennen kann, bis zu welchem Grad du die Technik des Darstellens einer Lösung beherrschst. Bei allen anderen Aufgaben reicht es aus, wenn du dir Notizen zu dem von dir gefundenen Lösungsweg machst. Wenn du trotz Anstrengung keinen Lösungsweg findest, dann notiere dir die gescheiterten Lösungsversuche. Dein Betreuer wird dir in der Besprechung dann entsprechende Tipps geben.

Damit du den Überblick über die bereits bearbeiteten Aufgaben behältst, sollst du in der Übersicht immer ankreuzen, welche Aufgabe du schon bearbeitet hast und welche Lösungen bereits besprochen wurden.
Wir wünschen dir beim Rechnen und Knobeln viel Erfolg und Freude!

| Aufgaben-nummer | | Aufgabe bearbeitet | Lösung besprochen | Notizen |
|---|---|---|---|---|
| 430931 | 91% | | | |
| 440934 | 75% | | | |
| 450931 | 65% | | | |
| 420931 | 59% | | | |
| 420934 | 47% | | | |
| 490934 | 39% | | | |
| 400931 | 32% | | | |
| 430936 | 30% | | | |
| 440935 | 60% | | | |
| 430933 | 54% | | | |
| 460931 | 52% | | | |
| 400932 | 49% | | | |
| 450933 | 48% | | | |
| 480935 | 50% | | | |
| 440933 | 40% | | | |
| 490935 | 31% | | | |
| 410931 | 86% | | | |
| 430934 | 76% | | | |
| 490931 | 77% | | | |
| 390935 | 71% | | | |
| 400936 | 66% | | | |
| 460934 | 66% | | | |
| 420932 | 66% | | | |
| 450934 | 55% | | | |
| 410935 | 62% | | | |
| 440932 | 59% | | | |
| 410934 | 46% | | | |
| 410933 | 44% | | | |
| 480933 | 39% | | | |
| 440931 | 96% | | | |
| 390933 | 72% | | | |
| 390934 | 64% | | | |
| 480931 | 63% | | | |
| 470933 | 57% | | | |
| 400935 | 56% | | | |
| 410932 | 50% | | | |
| 420933 | 49% | | | |
| 430933 | 47% | | | |
| 380936 | 41% | | | |
| 450936 | 36% | | | |



**Aufgabe 420933** (49%)

Wir denken uns zwei „eingerostete“ Zirkel der folgenden Art:

(1) Mit dem ersten Zirkel kann man nur noch Kreise mit dem festen Radius r zeichnen.
(2) Ist k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, dann kann man mit dem zweiten Zirkel zu jedem Punkt $P \in k$ einen Punkt $Q \in k$ konstruieren, so dass $\angle PMQ = 13°$ gilt.

Untersuchen Sie, ob man mit einem derartigen Zirkelpaar die Eckpunkte eines regelmäßigen 15-Ecks konstruieren kann.

**Aufgabe 430933** (47%)

O sei ein gegebener Punkt der Ebene.

a) Geben Sie eine Figur an, die bei Drehung mit Zentrum O um 48° in sich übergeht
b) Finden Sie die kleinste Winkelgröße $\phi > 0$, für die gilt:
Jede Figur, die bei Drehung mit dem Zentrum O um 48° in sich übergeht, geht auch bei Drehung mit Zentrum O um $\phi$ in sich über.

**Aufgabe 380936** (41%)

Auf der Seite $\overline{BC}$ eines Dreiecks $ABC$ liege ein Punkt $M$. Ferner seien ein Punkt $N$ auf $\overline{AB}$ und ein Punkt $P$ auf $\overline{AC}$ so gelegen, dass $NM \parallel AC$ und $PM \parallel AB$ gilt.

Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die beiden folgenden Aussagen (a) und (b) gelten:

(a) Genau dann, wenn das Dreieck $ABC$ gleichschenklig mit $|AB| = |AC|$ ist, gilt die Gleichung $|AN| + |AP| = |AB|$.

(b) Ohne weitere Voraussetzungen über das Dreieck (wie die eben in (a) gestellte) gilt für die Verhältnisse $p = |AN| : |AC|$ und $q = |AP| : |AC|$ stets die Gleichung $p + q = 1$.

Hinweis: Der folgende Satz darf (ohne Beweis) als Hilfsmittel verwendet werden: Wenn zwei Dreiecke in zwei entsprechenden Winkeln übereinstimmen, dann stimmen sie in den Verhältnissen entsprechender Seiten überein.

**Aufgabe 480931** (63%)

Zwei verschiedene Geraden schneiden das Innere eines regelmäßigen Fünfecks und zerteilen es dadurch in Vielecke. Es bezeichne $S$ die Summe der Beträge der Innenwinkel aller dieser Vielecke.

Finden Sie alle Werte von $S$, die dabei auftreten können.

**Aufgabe 470933** (57%)

Gegeben sind ein Dreieck $ABC$ sowie eine Parallele $g$ zur Seite $\overline{AB}$, welche die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ im Inneren in den Punkten $G$ bzw. $F$ schneidet. Weiter schneide die Parallele zu $\overline{AC}$ durch $F$ die Seite $\overline{AB}$ in $E$ und es schneide die Parallele zu $\overline{BC}$ durch $G$ die Seite $\overline{AB}$ in $D$.

Dabei möge $g$ so gewählt sein, dass $D$ auf der Strecke $\overline{AE}$ liegt.

a) Wie muss man $g$ wählen, damit die Dreiecke $ADG$, $BFE$ und $CGF$ flächengleich sind?

b) Wie muss man $g$ wählen, damit die Fläche des Vierecks $DEFG$ maximal wird?

**Aufgabe 400935** (56%)

Auf dem Bogen eines Halbkreises mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ seien drei Punkte $C$, $D$ und $E$ so gelegen, dass die Sehnen $\overline{AC}$ und $\overline{CD}$ einander gleichlang sind, der Punkt $E$ dem Bogen von $D$ nach $B$ angehört und keine zwei dieser fünf Punkte miteinander zusammenfallen.

Beweisen Sie, dass unter dieser Voraussetzung die Sehnen $\overline{AE}$ und $\overline{BC}$ einander im gleichen Winkel schneiden wie die Sehnen $\overline{CE}$ und $\overline{BD}$.

**Aufgabe 410932** (50%)

Das Viereck $ABCD$ sei ein gleichschenkliges Trapez mit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $|AD| = |BC|$, in dem die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ senkrecht zueinander sind.

Beweisen Sie: Die Mittellinie und die Höhe des Trapezes $ABCD$ sind gleich lang.



# I. Logik / Kombinatorik

**Aufgabe 430931** (91%)

Gegeben sei ein quadratisches Gitter aus 10 x 10 kongruenten Teilquadraten.

Wie viele Quadrate gibt es, deren Seiten auf den Linien dieses Gitters liegen?

**Aufgabe 440934** (75%)

Bei einem Schwimmwettkampf haben sich acht Schwimmer für den Endlauf qualifiziert. Unter den Endlaufteilnehmern befinden sich drei Amerikaner, ein Australier, zwei Deutsche, ein Engländer und ein Russe.

Wie viele verschiedene Reihenfolgen des Einlaufs dieser acht Schwimmer gibt es, bei denen sich unter den ersten drei Schwimmern mindestens ein Deutscher befindet?

**Aufgabe 450931** (65%)

Für eine Projektarbeit sollen die 9 Schüler eines Kurses in Gruppen aufgeteilt werden. Dabei sind nur Gruppen zu zwei oder zu drei Schülern zugelassen.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Gruppeneinteilung gibt es, wenn nicht nur berücksichtigt wird, wie viele Schüler in einer Gruppe sind, sondern auch welche?

**Aufgabe 420931** (59%)

Die Eckpunkte eines regelmäßigen $2n$-Ecks sollen mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2n$ beschriftet werden, so dass gilt:

(1) Jede der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2n$ beschriftet genau einen Eckpunkt.

(2) Für jede Seite $s$ ist die Summe der Zahlen an den Eckpunkten von $s$ gleich der Summe der Zahlen an den Eckpunkten der Seite, die $s$ diametral gegenüberliegt.

a) Geben Sie für ein Sechseck eine solche Beschriftung an.

b) Beweisen Sie, dass für ein Achteck eine solche Beschriftung nicht existiert.

**Aufgabe 420934** (47%)

Abelix und Bebelix spielen "Diagonalix“ mit einem 2003-Eck, dessen Ecken auf einem Kreis liegen: Abelix und Bebelix zeichnen abwechselnd Diagonalen, d. h. Verbindungsstrecken zwischen zwei nicht benachbarten Eckpunkten, ein. Keine neue Diagonale darf eine vorhandene in einem inneren Punkt schneiden. Gewonnen hat, wer die letzte erlaubte Strecke zeichnet. Abelix beginnt.

Kann ein Spieler den Sieg erzwingen?

**Aufgabe 490934** (39%)

Über eine Menge $M$ sei Folgendes bekannt:

(1) Die Menge $M$ ist eine Teilmenge der Menge $\{1, 2, ..., 16\}$ .

(2) Von je drei verschiedenen Zahlen der Menge $M$ haben mindestens zwei einen gemeinsamen Teiler größer als $1$ .

Was ist die maximale Anzahl von Elementen solch einer Menge $M$ ?

**Aufgabe 400931** (32%)

Wenn zwei Personen einen Kuchen teilen sollen, so können sie das Prinzip „Der eine teilt, der andere wählt“ anwenden. Dabei kann jeder der beiden mit dem Ergebnis zufrieden sein.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem ein Kuchen auf fünf Personen aufgeteilt werden kann, und begründen Sie, dass jeder mit dem Ergebnis zufrieden sein kann.

**Aufgabe 430936** (30%)

Die Zielscheibe für ein Pfeilwurfspiel ist ein Kreis mit 20 gleich großen Sektoren, auf welche die natürlichen Zahlen $1$ bis $20$ verteilt sind. Damit der Ärger beim Verwerfen groß ist, ist die Differenz der Zahlen zweier benachbarter Sektoren groß.

Ermitteln Sie, wie groß die Summe der Beträge aller 20 Differenzen der Zahlen benachbarter Sektoren maximal werden kann.



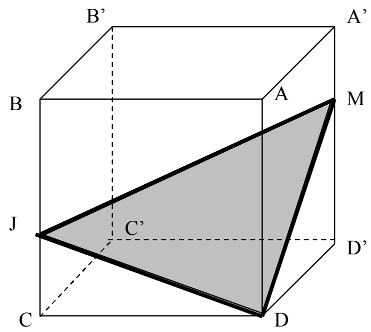
# IV. Geometrie

**Aufgabe 440931** (96%)

Ein Würfel ABCDA’B’C’D’ hat die Kantenlänge $1$ .

Auf seiner Kante $\overline{BC}$ liegt ein Punkt J mit $3 \cdot |CJ| = |BC|$, auf der Kante $\overline{A'D'}$ ein Punkt M mit $3 \cdot |A'M| = |A'D'|$.

Ermitteln Sie den Umfang des Dreiecks MDJ.




**Aufgabe 390933** (72%)

Beweisen Sie: In jedem konvexen Fünfeck gilt die Ungleichung

$$u < s < 2u . \qquad (1)$$

Dabei bezeichne u den Umfang des Fünfecks und s die Summe der Diagonalenlängen.

**Aufgabe 390934** (64%)

Gegeben sei ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C und der Kathetenlänge 2.
Über den Seiten des Dreiecks seien nach außen die Quadrate BCDE, ABGF und ACJH gezeichnet.

Beweisen Sie, dass es eine Kreislinie gibt, auf der die Punkte D, E, F, G, H und J liegen und berechnen Sie den Radius dieses Kreises.

**Aufgabe 410935** (62%)

Die 5-stellige Zahl 21978 ergibt nach Multiplikation mit 4 ihr Spiegelbild 87912. Für welche Multiplikatoren $m > 1$ gibt es fünfstellige Zahlen abcde so, dass $abcde \cdot m = edcba$ gilt?

Hinweis: Eine Zahl aus n Ziffern heißt genau dann n-stellig, wenn die erste Ziffer von 0 verschieden ist.

**Aufgabe 440932** (59%)

Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl n die Zahl

$$m = 7^{2n} + 7^{n+1} - 7^{n} + 5$$

durch 12 teilbar ist.

**Aufgabe 410934** (46%)

Ermitteln Sie alle Paare (m, n) natürlicher Zahlen, für die gilt:

$$5^{m+1} + 3 = 2(5^{n} - 5^{m}) .$$

*Hinweis:* auch die Zahl 0 wird als natürliche Zahl bezeichnet.

**Aufgabe 410933** (44%)

Für jede natürliche Zahl n ist der Bruch $\dfrac{n^3-3n^2+2n-3}{n^3+3n^2+2n+3}$ kürzbar.

Beweisen Sie diese Aussage.

**Aufgabe 480933** (39%)

a) Es sei p eine beliebige Primzahl mit der Eigenschaft $p > 3$ .
   Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl n gibt, so dass $p^2 = 24n + 1$ gilt.

b) Es seien p und n positive ganze Zahlen, für die $p^2 = 24n + 1$ gilt.
   Untersuchen Sie, ob p dann notwendigerweise eine Primzahl sein muss.



# II. A r i t h m e t i k

**Aufgabe 440935** (60%)

Ermitteln Sie alle reellen Zahlenpaare (x ; y), für die gilt

$$\left|x^2 - y\right| = 3 \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{x^2}{y} + \frac{y}{x^2} - 2} = \frac{3}{2} \quad .$$

**Aufgabe 430933** (54%)

Ermitteln Sie alle reellen Lösungstripel (a; b; c) des Gleichungssystems

$$a + b \cdot c = 1$$
$$b + c \cdot a = 1$$
$$c + a \cdot b = 1.$$

**Aufgabe 460931** (52%)

Die aufsteigende Folge $(a_n)$ mit

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4,\ a_4 = 9,\ a_5 = 10,\ a_6 = 12,\ a_7 = 13, \ldots$$

besteht aus allen positiven ganzen Zahlen, welche eine Dreier-Potenz oder eine Summe von verschiedenen Dreier-Potenzen sind.

Finden Sie das hundertste Glied $a_{100}$ dieser Folge.

**Aufgabe 400932** (49%)

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (x ; y) natürlicher Zahlen x, y, für die

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y} \qquad (1)$$

gilt.

**Aufgabe 450933** (48%)

Für welche reellen Zahlen *x* gilt

$$\frac{x}{\lfloor x \rfloor} + \frac{\lfloor x \rfloor}{x} < \frac{x}{\lceil x \rceil} + \frac{\lceil x \rceil}{x} \ ?$$

*Hinweis*: $\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl k mit $k \le x$ und $\lceil x \rceil$ ist die kleinste ganze Zahl l mit $l \ge x$.

**Aufgabe 480935** (50%)

Zeigen Sie, dass für alle nichtnegativen reellen Zahlen a, b, c mit $a + b + c = 1$ stets $\frac{1}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$ gilt.

**Aufgabe 440933** (40%)

Lässt sich die Gleichungspyramide

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$
$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

analog so fortsetzen, dass in der n-ten Gleichung ($n \geq 4$) $2n + 1$ aufeinander folgende Quadratzahlen so angeordnet sind, dass von diesen Zahlen auf der linken Seite die ersten $n + 1$ und auf der rechten Seite die restlichen n vorkommen?
Geben Sie im Falle der Fortsetzbarkeit die n-te Gleichung (in Abhängigkeit von n) an.

**Aufgabe 490935** (31%)

Es seien a, b, c, x und y positive reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass wenigstens eine der Zahlen $\frac{x}{a(b+c)}$ oder $\frac{y}{(a+b)c}$ kleiner ist als $\frac{x+y}{(a+c)b}$.

---

## III. Zahlentheorie

**Aufgabe 410931** (86%)

Die Zahl 2002 ist eine Palindrom-Zahl, das heißt: Wenn man ihre Ziffern in umgekehrter Reihenfolge schreibt, erhält man wieder dieselbe Zahl.

Wie groß ist die Summe aller anderen 4-stelligen Palindrom-Zahlen?

Hinweis: Eine Zahl aus n Ziffern heißt genau dann n-stellig, wenn die erste Ziffer von 0 verschieden ist.

**Aufgabe 430934** (76%)

Wie viele vierstellige Zahlen gibt es, deren Ziffern alle verschieden sind und die aus zwei geraden und zwei ungeraden Ziffern bestehen?

Hinweis: Eine Zahl aus n Ziffern heißt genau dann n-stellig, wenn die erste Ziffer von 0 verschieden ist.



**Aufgabe 490931** (77%)

Es sei $n = 10m + 1$ mit einer ungeraden natürlichen Zahl m .

Zeigen Sie, dass dann $n^5 - 51$ durch 100 teilbar ist.

**Aufgabe 390935** (71%)

Wie viele Lösungen in ganzen Zahlen hat

a) die Gleichung $|a| + |b| = 5$ ,

b) die Ungleichung $1 < |a| + |b| < 999$ ?

**Aufgabe 400936** (66%)

a) Über eine natürliche Zahl $z > 10$ sei vorausgesetzt, dass ihre letzte Ziffer eine 5 ist. Kann man aus dieser Voraussetzung eine Antwort auf die Frage herleiten, ob die drittletzte Ziffer der Zahl $z^2$ gerade oder ungerade ist?

b) Über eine natürliche Zahl z sei vorausgesetzt, dass ihre letzten zwei Ziffern 55 lauten. Leiten Sie aus dieser Voraussetzung die Antwort auf die Frage her: Wie lautet die drittletzte Ziffer der Zahl $z^2$?

**Aufgabe 460934** (66%)

Es seien p und q zwei Primzahlen mit $2 < p < q$, zwischen denen keine weitere Primzahl liegt.

Zeigen Sie, dass sich $p + q$ in ein Produkt von mindestens drei echten Faktoren zerlegen lässt.
Beispiele: $3 + 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $7 + 11 = 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Hinweis: Als echten Faktor einer natürlichen Zahl N bezeichnet man einen Teiler d von N mit $1 < d < N$.

**Aufgabe 420932** (66%)

Beweisen Sie, dass für jedes Paar $(a ; b)$ ganzer Zahlen gilt: Sind beide Zahlen gerade oder beide ungerade, so lässt sich ihr Produkt als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen.

**Aufgabe 450934** (55%)

Finden Sie alle ganzen Zahlen $a$, für die auch $\frac{69-6a}{2a+1}$ eine ganze Zahl ist.