

Material zur Vorbereitung auf die Landesrunde der Mathematik-Olympiade für Schüler der Klasse 8, Teil 2

Inhaltsverzeichnis	Seiten- anzahl
1. Hinweise zur Betreuung	8
2. Aufgaben	8
2.1 Zahlentheorie (9 Aufgaben) (Z)	
2.3 Kombinatorik (3 Aufgaben) (K)	
2.4 Geometrie (16 Aufgaben) (G)	
3. Lösungen	25
4. Hinweise zur Lösungsfindung und zur didaktischen Aufbereitung	<u>6</u>
	47

Kontaktadresse: hww.koenig@t-online.de

Hiermit gestatten wir den Besuchern unserer Seite, sich dieses Material von unserer Homepage zum persönlichen Gebrauch herunter zu laden.

Dieser Teil 2 des Materials setzt die Bearbeitung des Teils 1 voraus und knüpft an analoges Material für Schüler der Klassen 6 und 7 an, das man ebenfalls auf unserer Homepage www.bezirkskomitee.de findet.

Die Aufgaben wurden bewusst auf genau 8 Seiten untergebracht, so dass man für den Schüler durch Verwenden des „Broschürendrucks“ (bei entsprechender Druckertechnik) und Falten von zwei beidseitig bedruckten Blättern eine gut handhabbare Aufgabensammlung herstellen kann.

Wir wären allen Nutzern dieses Materials für eine Information über dessen Einsatz nebst Einschätzung, gewonnenen Erfahrungen und entdeckten Fehlern sehr dankbar!

Hinweise zur Betreuung

Beachten Sie bitte auch die „Einleitung“ und die „Hinweise zur Betreuung“ aus dem Teil 1 dieses Materials.

Wir bieten den Eltern den Teil 2 der Aufgabensammlung bereits zu Beginn des neuen Schuljahrs an, obwohl wir keinesfalls annehmen, dass bis zu diesem Zeitpunkt die Nutzung der Aufgaben des Teils 1 bereits abgeschlossen ist. Wir sind auch nicht der Meinung, dass man alle 37 Aufgaben des Teils 1 lösen lassen sollte, bevor man die Aufgaben des Teils 2 einsetzt. Wir empfehlen jedoch, spätestens Anfang Oktober nur noch Aufgaben des Teils 2 zu stellen, damit bis zur 3. Stufe der MO noch genügend Zeit zur Verfügung steht, sich mit diesen schwereren Aufgaben zu beschäftigen.

Wir wiederholen die diesbezüglichen Hinweise aus dem Teil 1 des Materials speziell für die Betreuer, die mit dem Teil 2 einsteigen. Die neuen Informationen findet man ab Seite 7.

Vor allem geht es darum, den Schüler zum *selbständigen Lösen problemhafter Aufgaben* anzuregen.

Der Betreuer sollte jeweils etwa 3 bis 5 geeignete Aufgaben zum Bearbeiten auswählen und dem Schüler einen Termin zum Besprechen seiner Lösungsversuche nennen. Wenn der Schüler glaubt, eine Lösung gefunden zu haben, soll er trotzdem die zugehörige *Lösung durcharbeiten*, um im Laufe der Zeit auch die *Technik der Lösungsdarstellung* zu erlernen. Wenn er keine Lösung gefunden hat, soll der Betreuer ihm die „*Hinweise zur Lösungsfindung*“ erläutern und ihn zu einem neuen Lösungsversuch auffordern.

Die Aufgaben der vier Aufgabengruppen sind jeweils nach dem Schwierigkeitsgrad geordnet. Dies trifft auch auf die angegebene Reihenfolge der Aufgabengruppen zu. Die zur Bearbeitung ausgewählten Aufgaben sollten aus mindestens zwei dieser Aufgabengruppen entnommen werden.

Beim Betreuen sollte man sich stets vergegenwärtigen, welche ***didaktischen Ziele*** man erreichen möchte. Bereits im Material für die ***Klassen 5/6*** sind dies folgende Ziele:

- Verwenden von *Tabellen* als heuristisches Hilfsmittel und beim Darstellen von Lösungen
- Verwenden von *Mengendiagrammen* beim Lösen einschlägiger Aufgaben
- Übergang von einem *Lösungsschema* zu einer sprachlich gefälligeren Darstellung, bei der jedoch die logische Struktur der Lösung deutlich sichtbar bleibt
- *Einzigkeits-* und *Existenznachweis* bei Aufgaben des Typs „Ermittle alle Elemente, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen“
- Einführen von *günstigen* Bezeichnungen; Übersetzen *aus der Wortsprache in eine Zeichensprache* (speziell in die Sprache der *Gleichungen*)

- Beim *systematischen Probieren* (Ermitteln aller möglichen Fälle) stets ein *Ordnungsprinzip* verwenden (lexikografisch, der Größe nach u.ä.)
- Bevorzugen der Lösungsstrategie *Folgern aus gegebenen Bedingungen*, dabei Suche nach der „*informativsten Bedingung*“
- Ein Verfahren zum Ermitteln der *Summe einer endlichen arithmetischen Reihe*

In den **Klassen 6/7** werden diese Ziele auf einem höheren Leistungsniveau weiter verfolgt. Neu hinzugekommen sind folgende Ziele:

Neben dem bereits bekannten *Vorwärtsarbeiten (VA)* (Folgern aus gegebenen Bedingungen) spielt vor allem bei geometrischen Aufgaben das *Rückwärtsarbeiten (RA)* eine wichtige Rolle. Der Schüler soll lernen, die *Hilfsmittelfrage* und die *Teilzielfrage* beim *kombinierten RA und VA* bewusst einzusetzen.

Dem Schüler sollen die *Gemeinsamkeiten beim Lösen von Aufgaben* aus inhaltlich verschiedenen Aufgabenklassen bewusst werden.

Es gibt Sachaufgaben, logisch-kombinatorische Aufgaben, zahlentheoretische oder geometrische Bestimmungsaufgaben, durch deren Formulierung die *eindeutige Lösbarkeit* vorausgesetzt wird. Bei solchen Aufgaben ist eine Probe (Existenznachweis) aus logischer Sicht nicht erforderlich, meist aber sehr nützlich, um Fehler aufzuspüren. Wenn eine solche Probe zusätzlich verlangt wird, dann muss dies bei Sach- und Anwendungsaufgaben stets eine *Probe am Text* sein.

Alle derartigen Aufgaben können aber auch so formuliert werden, dass neben dem *Einzigkeitsnachweis* (einer Herleitung) auch ein *Existenznachweis* erforderlich ist. Dies ist bei folgenden Formulierungen der Fall:

- Ermittle *alle* Elemente, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen.
- *Weise nach*, dass die Aufgabe *eindeutig* lösbar ist.
- *Untersuche*, ob die Aufgabe *eindeutig* lösbar ist.

Um diese Gemeinsamkeit zwischen inhaltlich verschiedenen solchen Aufgaben hervorzuheben, werden in den vorgeschlagenen Lösungen stets die Bezeichnungen „I.“ und „II.“ verwendet und abschließend hervorgehoben: „Aus I. und II. folgt, dass die angegebenen Lösungen die einzigen Lösungen der Aufgabe sind“.

Man sollte von den Schülern verlangen, diese Art der Formulierung einer Lösung zu übernehmen.

Wir halten es auch für wichtig, dass die Schüler erkennen, dass auch geometrische Ortsaufgaben, Konstruktionsaufgaben sowie Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungs- oder Ungleichungssysteme, deren Lösungsmenge nicht durch äquivalentes Umformen ermittelt werden kann, zu dieser Aufgabenklasse gehören.

Einer Herleitung (Einzigkeitsnachweis) ist oft nicht zu entnehmen, ob alle gegebenen Bedingungen tatsächlich verwendet wurden oder ob auch „überflüssige Bedingungen“ vorkommen. Aufgaben, bei denen dies der Fall ist, nennt man „überbestimmt“.

Eine in der Herleitung nicht verwendete Bedingung kann mit den restlichen Bedingungen verträglich sein, sie kann aber auch einer dieser Bedingungen widersprechen. In diesem Fall hätte die Aufgabe keine Lösung.

Dies erklärt die *logische Notwendigkeit einer Probe* bei Aufgaben, bei denen die eindeutige Lösbarkeit nicht vorausgesetzt wird. Dies macht auch klar, dass stets eine Probe am Aufgabentext und nicht etwa nur für die Ansatzgleichung erforderlich ist.

Um die genannten Ziele zu erreichen, ist es günstig, die gegebenen *Bedingungen* am Beginn der Lösung etwa durch (a), (b), ... zu *bezeichnen* und unter Verwendung einer „*Symbolsprache*“ in einer „*Kurzform*“ festzuhalten.

Dies trifft auch für die ab Klasse 6/7 neu auftretenden *Beweisaufgaben* zu. Der Schüler muss erkennen, dass ein Beweis nicht nur aus einer Folge von unbegründeten Feststellungen bestehen darf, etwa in der Form „Es gilt, es gilt, es gilt Damit ist die Behauptung bewiesen.“. Aus logischer Sicht ist ein Beweis eine Folge von *Schlussfolgerungen* der Form „Aus ... folgt ... weil ...“, die nachweist, dass die Behauptung aus den Voraussetzungen folgt und daher der *Satz* bewiesen ist. Deshalb sollte man die Formulierung „damit ist die Behauptung bewiesen“ strikt vermeiden, denn es wird stets ein Satz bewiesen.

Diese logische Struktur lässt sich besonders deutlich durch die Darstellung des Beweises in Form eines dreispaltigen *Beweisschemas* festhalten, das der Form eines *Lösungsschemas* entspricht, wie dies der Schüler der Klasse 5/6 bereits kennen gelernt hat. Der ersten Spalte des Beweisschemas kann entnommen werden, woraus jeweils gefolgert wird und bei welchen Schlussfolgerungen die gegebenen Voraussetzungen jeweils benötigt werden. Auf diese Weise fallen die beiden am häufigsten vorkommenden *Darstellungsfehler* auf: Es ist nicht zu erkennen, aus welchen Voraussetzungen oder abgeleiteten Feststellungen gefolgert wird; es fehlt die Angabe des verwendeten Hilfsmittels (Satz, Definition, Regel). Außerdem werden auch Zirkelschlüsse bei dieser Form der Darstellung deutlich erkennbar.

Auch bei Beweisen wird man bald zu einer sprachlich gefälligeren Darstellungsform übergehen, bei der jedoch die logische Struktur eines Beweises ebenfalls deutlich sichtbar sein sollte.

Bei Bestimmungsaufgaben kommen zu den Aufgaben mit konkreten Daten *parameterhaltige Aufgaben* hinzu.

Neu in Klasse 6/7 sind auch Aufforderungen, sich Wissen und Können aus dem Arbeitsmaterial für den Korrespondenzzirkel Mathematik für Klasse 7 anzueignen. In diesen Klassenstufen ist in der Regel eine Unterstützung und Kontrolle durch den Betreuer unerlässlich.

Bei Schülern aus den **Klassen 7/8** sollte sich der Betreuer zunächst die Lösungen ansehen, die sein Schützling bei der 3. Stufe der MO abgegeben hat, um feststellen zu können, wie weit dieser die *Technik der Lösungsdarstellung* bereits beherrscht.

Es ist keinesfalls erforderlich, vom Schüler zu jeder Aufgabe eine „druckreife“ schriftliche Darstellung der Lösung zu verlangen. Solange der Schüler die Technik der Lösungsdarstellung jedoch noch nicht beherrscht, sollte man dies in regelmäßigen Abständen fordern.

Alle für die Klasse 6/7 gestellten Ziele werden in Klasse 7/8 auf einem höheren Leistungsniveau weiter verfolgt.

Neu hinzugekommen ist folgendes Ziel: Der Schüler ist in der Lage, sich aus dem Arbeitsmaterial des KZM7 und KZM8 *selbständig Wissen und Können* auch auf Gebieten *anzueignen*, die nicht zum Unterrichtsstoff gehören. Der Schüler sollte diesbezüglich motiviert und kontrolliert werden.

Bei den **Sach- und Anwendungsaufgaben** soll der Schüler zeigen können, in welchem Maß er das Lösen solcher bereits seit der Klasse 5/6 gestellten Aufgaben beherrscht.

Mit Ausnahme der Aufgaben S3), S9), S10) und S12) wird durch deren Formulierung die *eindeutige Lösbarkeit vorausgesetzt*. Bei der S2) und S4) wird zusätzlich eine Probe gefordert.

Bei der S3) kann man überprüfen, ob der Schüler bereits selbst erkennt, dass durch die Anforderung „Weise nach, dass ...“ eine *Probe erforderlich* ist. Wenn dies nicht der Fall ist, dann sollte er im Arbeitsmaterial des KZM7 den Abschnitt „1.5. Das Lösen von Bestimmungsaufgaben“ noch einmal durchlesen. Bei der S9), S10) und S12) sollte man die Darstellung in der Form „I. ... II. Aus I. und II. folgt ...“ fordern.

Die S5) und S6) sind *parameterhaltige* Aufgaben, bei denen Werte des Parameters zu ermitteln sind, für welche die gesuchten Zahlen eine gegebene Bedingung erfüllen.

Bei der S7), S8) und S9) handelt es sich um eine *Bewegungsaufgabe*, eine *Leistungsaufgabe* und eine *Mischungsaufgabe*.

Mit Hilfe dieser Aufgaben kann man überprüfen, ob der Schüler die heuristischen Vorgehensweisen „*Einführen günstiger Bezeichnungen*“ und „*Übersetzen in die Sprache der Gleichungen*“ bereits beherrscht.

Das „*Folgern aus den gegebenen Bedingungen*“ sollte stets bevorzugt verwendet werden. Das „*systematische Probieren*“ sollte nur eingesetzt werden, wenn es angemessen ist.

Bei den Aufgaben aus der **Zahlentheorie** sind mit Ausnahme der Z1), Z8) und Z9) alle vom Typ „*Ermittle alle ...*“, deren Lösung in der Form „I. ... II. Aus I. und II. folgt ...“ dargestellt wird.

Zur Z1) soll sich der Schüler an Hand des 1. Beiblatts zum Arbeitsmaterial für den KZM8 die *Potenzgesetze aneignen*.

Bei der Z3) und Z4) ist bei der Lösungsfindung *systematisches Probieren* günstig.

Bei der Suche nach einer Lösung der Z4) und der Z8) ist es günstig, zunächst einen *Spezialfall* bzw. eine *einfachere Aufgabe* zu lösen.

Bei der Z7) ist eine *günstige Wahl der Variablen* von entscheidender Bedeutung.

Zum Lösen der Z9) wird das *Verfahren zum Ermitteln der Summe einer endlichen arithmetischen Reihe* benötigt, das unter „Methode des Erstklässlers Gauß“ sowohl im Arbeitsmaterial zu den Aufgaben für die Klasse 5/6 als auch für Klasse 6/7 beschrieben wird.

Bei den Aufgaben aus der **Kombinatorik** stehen das Erarbeiten des im Beiblatt „Kombinatorik“ enthaltenen Inhalts sowie das Anwenden der dort angegebenen *Formeln* für das Berechnen der Anzahl der *Permutationen*, *Kombinationen* und *Variationen* (ohne Wiederholung der Elemente) im Vordergrund. Diese Aufgaben sind so formuliert, dass die *eindeutige Lösbarkeit* vorausgesetzt wird.

In der K1) wird ein Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit verlangt. Wie auch bei der K7) und der K8) ist eine Lösung mit Hilfe der Formeln nicht möglich, hier führt nur das *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* zum Ziel.

Bei den Beweis- und Bestimmungsaufgaben aus der **Geometrie** steht im Vordergrund, die bei den geometrischen Aufgaben des Materials für Klasse 6/7 eingeführten heuristischen Vorgehensweisen des *kombinierten Rückwärtsarbeitens und Vorwärtsarbeitens* bei Verwendung der *Hilfsmittelfrage* und der *Teilzielfrage* sowie dem Einführen günstiger *Hilfslinien* oder *Hilfspunkte* zu üben und zu festigen.

Dazu gehört eine gezielte Wiederholung aus dem Unterricht bekannter Sätze und das Aneignen noch unbekannter planimetrischer Sätze.

Großer Wert wird darauf gelegt, dass der Schüler für die im Aufgabentext angegebene Voraussetzungen oder Bedingungen *Bezeichnungen* einführt und sie bei Verwendung einer geeigneten *Symbolik* vor dem Beweis oder der Lösung in *Kurzform* festhält. Nur im Aufgabentext der G3) wird dem Schüler vorgeführt, wie dies aussehen kann.

Um zu überprüfen, ob der Schüler fähig ist, einen Beweis in Form eines *Beweisschemas* darzustellen, wird er in der G1) aufgefordert, dies zu tun. Bei allen anderen Aufgaben wird nur verlangt, dass die Darstellung der Lösung deren logische Struktur klar erkennen lässt.

In der G1) und der G4) wird der Schüler aufgefordert, Abschnitte des Arbeitsmaterials für den KZM7 durchzuarbeiten, beim Lösen der G3), G5) und G6) soll er sich weiteres Begleitmaterial ansehen.

Soweit die Wiederholung der „*Hinweise für Betreuer*“ aus dem Teil 1 des Materials.

Der **Teil 2** behandelt nur noch Aufgaben aus der Zahlentheorie, der Kombinatorik und der Geometrie.

Hierbei spielt das *selbständige Aneignen von Wissen und Können* aus dem Arbeitsmaterial des KZM7 eine wichtige Rolle. In den Aufgaben Z10), Z11) und Z14) betrifft dies den Euklidischen Algorithmus, die Grundgleichung der Zahlentheorie und das Rechnen mit Kongruenzen, in der G14) das Verallgemeinern von Sätzen und in der G19) das Stoffgebiet Ähnlichkeit / Strahlensätze.

In den Aufgaben Z17) und G9) sollen die Schüler nachweisen, dass sie die Technik der Darstellung in Form eines *Beweisschemas* beherrschen.

Bei den zahlentheoretischen Aufgaben spielt die Strategie „*Übersetze in die Sprache der Kongruenzen*“ eine wichtige Rolle.

Mit Hilfe der Z18) kann man überprüfen, ob der Schüler die Technik der Lösungsdarstellung von Aufgaben des Typs „Ermittle alle ...“ in der Form *I. Einzigkeitsnachweis, II. Existenznachweis* beherrscht.

Die drei Aufgaben aus der *Kombinatorik* sind von relativ hohem Schwierigkeitsgrad.

Die Aufgaben G9) und G10) sind *Bestimmungsaufgaben*, die G11) bis G19) *Beweisaufgaben*. Ihr Schwierigkeitsgrad ist so hoch, dass sich die Strategie des *Rückwärtsarbeitens* als besonders effektiv erweist. Man sollte überprüfen, ob der Schüler die *Teilzielfrage* und die *Hilfsmittelfrage* beim kombinierten *VA und RA* kennt und beim Suchen nach einem Lösungsweg auch bewusst einsetzt. Auf diese Weise kann man auf nützliche *Hilfslinien* oder *Hilfspunkte* stoßen.

Nur bei der G9) und der G18) werden die gegebenen *Bedingungen* bzw. *Voraussetzungen* konkret vorgegeben und mit (a), (b), ..., (e) bzw. V_1, V_2, \dots, V_5 bezeichnet. Bei allen anderen Aufgaben muss dies der Schüler selbst leisten. Man sollte darauf bestehen, dass die gegebenen Bedingungen / Voraussetzungen zu Beginn der Lösung nochmals festgehalten werden und dass dies möglichst durch Verwenden einer *Symbolsprache* in „Kurzform“ geschieht. Alle abgeleiteten Feststellungen, auf die später zurückgegriffen wird, sind mit (1), (2), ... zu bezeichnen. Nur auf diese Weise kann man die Forderung erfüllen, dass bei jeder Feststellung angegeben werden soll, aus welchen Bedingungen / Voraussetzungen und bereits abgeleiteten Feststellungen sie folgt.

Der Schüler sollte sich angewöhnen, bei jeder Lösung zu überprüfen, ob tatsächlich alle gegebenen Bedingungen / Voraussetzungen benötigt werden. Ist dies nicht der Fall, dann soll überprüft werden, ob die nicht benötigte Bedingung / Voraussetzung einer anderen Startgröße widerspricht (vgl. die Rolle des Existenznachweises bei Bestimmungsaufgaben). Ist dies bei Beweisaufgaben nicht der Fall, dann kann man die „überflüssige“ Voraussetzung weglassen und gelangt auf diese Weise zu einer *Verallgemeinerung* des bewiesenen Satzes.

Diesbezüglich spielen die Aufgaben G11), G14), G16) und G17) eine besondere Rolle. Es sind ehemalige MO-Aufgaben, die jeweils um einen Auftrag erweitert wurden. Bei der G11) soll der Schüler durch das Zeichnen genauer Figuren zu einer *Vermutung* gelangen, ob der für spitzwinklige Dreiecke bewiesene Satz auch für stumpfwinklige oder rechtwinklige Dreiecke gilt. Bei der G14) und G16) ist zu untersuchen, ob dies zutrifft, was *Fallunterscheidungen* und *Beweise* erfordert. Bei der G17) ist zu begründen, warum die Voraussetzung „nicht rechtwinklig“ keine notwendige Einschränkung ist.

Die Aufgaben G20) bis G24) sind *Konstruktionsaufgaben* und knüpfen an die Aufgaben G15) bis G19) aus dem Teil 2 des Materials für Klasse 7 an.

Wir legen aus didaktischen Gründen großen Wert darauf, die Konstruktionsaufgaben so zu formulieren, dass ihre Zugehörigkeit zu der großen *Aufgabenklasse des Typs* „Ermittle alle ...“ deutlich sichtbar wird. (Es gibt auch andere Auffassungen, bei denen Konstruktionsaufgaben als sehr spezielle Aufgaben erscheinen, die mit allen anderen Aufgabenarten keine Gemeinsamkeiten aufweisen.)

Bereits im Teil 1 des Materials für Schüler der Klassen 5/6 bei der ersten behandelten Aufgabenart „Ermitteln von Zuordnungen und Anordnungen“ lernt der Schüler mit den Aufgaben ZA6) bis ZA8) Aufgaben dieses Typs kennen. Im Abschnitt „Zahlen werden gesucht“ sind es die Aufgaben Z3) bis Z8). Bereits hier lernt er die Form der Darstellung *I. Einzigkeitsnachweis, II. Existenznachweis*“ kennen. Die in unserem Material nicht vorkommenden geometrischen Ortsaufgaben sowie das Ermitteln der Lösungsmenge von (nicht algorithmisch lösba- ren) Gleichungen oder Gleichungssystemen gehören ebenfalls zu diesem Typ von Bestimmungsaufgaben.

Nur in einer Hinsicht unterscheiden sich Konstruktionsaufgaben von den anderen Aufgaben dieses Typs: Es ist nicht die Erfüllungsmenge einer Konjunktion von Aussageformen (speziell einer einzigen Aussageform) zu ermitteln, sondern ein (Konstruktionsbeschreibung genanntes) *algorithmisches Verfahren*, das alle Figuren liefert, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen.

Da wir uns das Ziel stellen, das problemlösende Denken des Schülers zu entwickeln, legen wir hier auf das Anfertigen einer genauen Konstruktionszeichnung (einer Aufgabe der darstellenden Geometrie) keinen großen Wert. Wichtig für den Schüler ist dagegen die Erkenntnis, dass die anzuwendende *Methode der Hilfselemente* nichts anderes ist als das beim Lösen vieler anderer Aufgaben ebenfalls anwendbare kombinierte *Vorwärtsarbeiten* und *Rückwärtsarbeiten*.